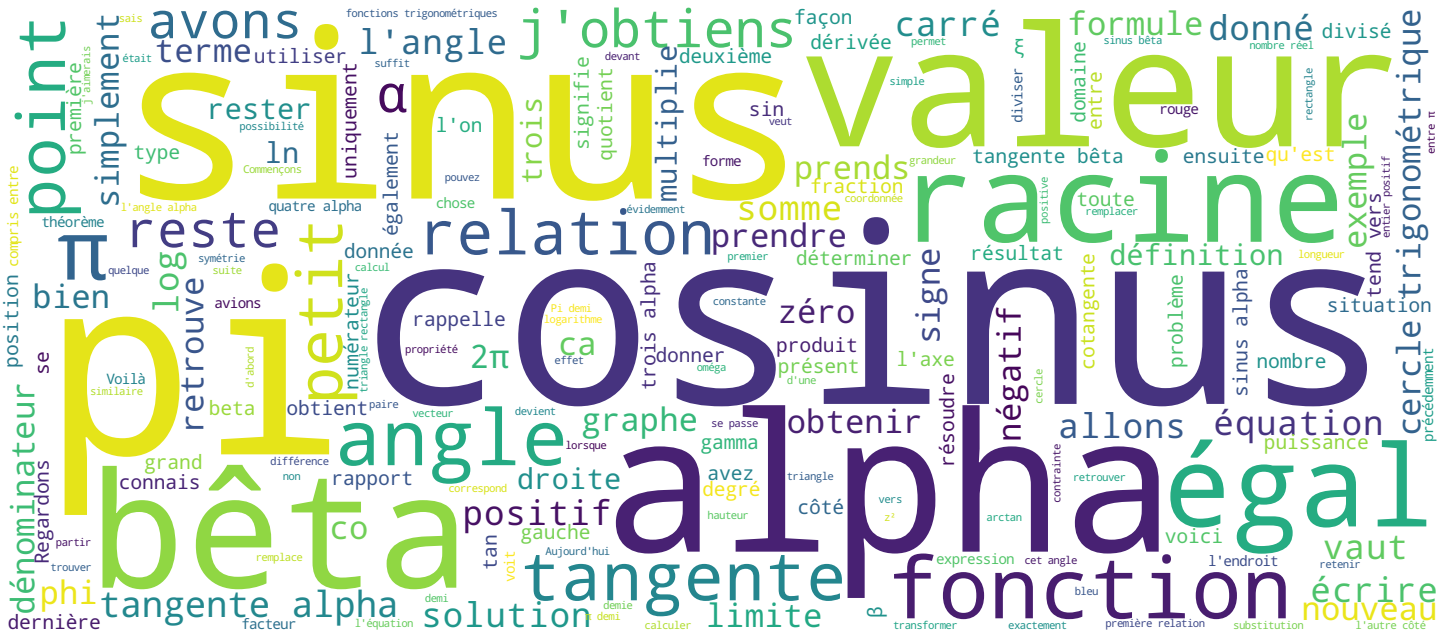
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Formules trigonométriques

4.4 Exemples

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Exemple 5

Exemple

Déterminer la valeur exacte de $\tan(\alpha+\beta)$ sachant que

$$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin(\beta) = \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi.$$

Bonjour et soyez les bienvenus à mon cours sur les fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles. Les dernières fois, je vous ai présenté les formules trigonométriques c'est-à-dire toute une gamme de relations remplies par les fonctions sinus, cosinus, tangentes et cotangentes. Aujourd'hui, je vais vous présenter deux exemples dans lesquels j'utilise l'une ou l'autre de ces relations trigonométriques. Commençons par l'exemple suivant : nous aimerions déterminer la valeur exacte de tangente alpha plus bêta, sachant que l'on connaît tangente alpha, tangente alpha vaut moins racine de deux demie. Pour bêta, on connaît une relation. On sait que sinus bêta est égal à cosinus de bêta/3. Et en outre, on sait que bêta doit être compris entre 19 pi/4 et 5 pi.

Notes

Summary

0m 03s

Exemple 5 : solution

Données : $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3}$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

On cherche : $\tan(\alpha+\beta)$

(I) Nous allons utiliser $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

Il manque : $\tan\beta$

(II) $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3}$

Voici ce qui est donné : sont donnés : tangente alpha, avec sa valeur de moins racine deux demie. Egalement donné : la relation sinus bêta est égal au cosinus bêta/3 avec 19 pi/4 plus petit que bêta plus petit ou égal que 5 pi. Et ce qui est recherché : alors on cherche la valeur exacte de tangente alpha plus bêta. Alors comment s'y prendre ? Nous allons utiliser une relation trigonométrique que j'ai présentée la dernière fois. Donc premièrement, nous allons utiliser tangente alpha plus bêta est égal à la somme tangente alpha plus tangente bêta divisée par un moins tangente alpha fois tangente bêta. Si je regarde cette expression, je m'aperçois que la partie tangente alpha, ici, elle est connue, ce qui me manque, c'est tangente bêta. Ce que je dois faire c'est essayer de déterminer la valeur de tangente bêta. Alors je peux utiliser cette deuxième partie de la donnée où je connais une relation remplie par bêta. Allons-y. Je pars donc avec l'équation sinus bêta égal cosinus bêta/3. C'est une relation qui contient deux fonctions trigonométriques, ça c'est toujours un peu plus problématique, on préfère en avoir qu'une seule. Alors on peut exprimer le sinus par cosinus, ou le cosinus par le sinus.

Notes

Summary

0m 54s

Exemple 5 : solution

Données : $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3}$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

On cherche : $\tan(\alpha+\beta)$

(I) Nous allons utiliser $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

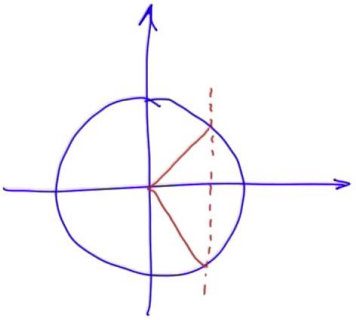
Il manque : $\tan\beta$

(II) $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3} \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\beta}{3}$

- $\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta \mod 2\pi$ et $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

et/ou

- $\frac{\beta}{3} = -\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \mod 2\pi$ et $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$



Ici, je vais exprimer ce sinus bêta à l'aide d'un cosinus. Donc je peux écrire de façon équivalente : le cosinus de pi/2 moins bêta, ça c'est en fait le sinus bêta, est égal au cosinus de bêta/3. Alors j'ai à présent une équation du type cosinus égal cosinus. Sur le cercle trigonométrique, cela signifie que la valeur du cosinus est donnée. Voilà. Et cela signifie que l'on peut trouver deux positionements d'angle pour un cosinus donné. Ici, si l'on compare les deux cosinus, alors ou bien les deux angles correspondent à la même position du point, ou les deux angles correspondent à des positions différentes. Je peux donc écrire : l'angle bêta/3 est égal à l'angle pi/2 moins bêta modulo deux pi. Donc là, aussi bien l'angle pi/2 moins bêta que bêta/3 sont dans une même position. Une autre possibilité, c'est que bêta/3 est égal à moins cet angle pi/2 moins bêta modulo deux pi. Et les deux fois, nous avons que bêta est compris entre 19/4 pi et 5 pi. Alors nous allons procéder simplement de la façon suivante : nous allons analyser la première de ces possibilités, c'est-à-dire que nous allons essayer de déterminer bêta à partir de cette équation et de cette contrainte supplémentaire, et à partir des valeurs, ou de la valeur de bêta obtenue, nous allons calculer tangente bêta et nous ferons, par la suite, la même chose avec la deuxième ligne.

Notes

Summary

2m 48s

Exemple 5 : solution (suite)

A) Analyse de la 1ère relation

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta \mod 2\pi$ et $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta + k2\pi \iff \frac{4\beta}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \iff \beta = \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Il faut que $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2} \leq 5\pi$

Donc nous commençons par analyser la première relation. Je vous rappelle cette première relation : bêta/3 est égal à pi/2 moins bêta, et nous avons dit modulo deux pi, et nous savons que 19 pi/4 est plus petit que bêta, plus petit ou égal que 5 pi. Alors regardons cette première égalité, ici. Je peux donc écrire que bêta/3 est égal à pi/2 moins bêta plus k fois 2 pi, ça c'est le modulo 2 pi. K est un entier, positif ou négatif. Je peux transformer de façon équivalente cette relation. Je peux prendre ce moins bêta sur la gauche, il devient plus bêta donc en tout je vais avoir 4 bêta/3 qui est égal à pi/2 plus k fois 2 pi. Et je peux résoudre cette égalité par rapport à bêta et j'obtiens pour bêta, le bêta est égal, donc je le multiplie par 3/4 et cela va me donner 3 pi/8 plus k fois 3 pi/2. Bon, ça c'est la première relation. On a encore une contrainte sur bêta, nous allons à présent appliquer ces contraintes sur ces valeurs obtenues ici pour bêta. Donc il faut que : 19 pi/4 soit plus petit que bêta. J'écris ici cette expression, donc 3 pi/8 plus k fois 3 pi/2 plus petit ou égal que 5 pi. Cette double inéquation peut se traiter comme une inéquation simple.

Notes

Summary

4m 51s

Exemple 5 : solution (suite)

A) Analyse de la 1ère relation

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta \mod 2\pi$ et $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta + k2\pi \iff \frac{4\beta}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \iff \beta = \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Il faut que $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2} \leq 5\pi \quad | \cdot \frac{8}{\pi}$

$\iff 38 < 3 + 12k \leq 40 \quad | -3$

$\iff 35 < 12k \leq 37 \quad | \cdot \frac{1}{12}$

$\iff \frac{35}{12} < k \leq \frac{37}{12} \iff k = 3$

Donc $\beta = \frac{3\pi}{8} + \frac{9\pi}{2} = \frac{39\pi}{8}$

Je vais essayer d'isoler, si on veut, la valeur de k, puisque je cherche les k qui sont admissibles. Donc je vais commencer par multiplier par huit et diviser par pi. Cela me permet de me défaire des dénominateurs, de me défaire de ce pi qui apparaît presque partout. Donc j'obtiens de façon équivalente : 38 plus petit que 3 plus 12 k plus petit ou égal que 40. Alors, je vais me défaire de ce trois. Il me reste 35 plus petit que 12 k plus petit ou égal que 37 et je vais diviser par 12 pour obtenir 35/12 est plus petit que k et plus petit ou égal que 37/12. Alors on voit tout de suite que 36/12, ça serait trois. Ici, je suis un peu en-dessous de trois, un peu au-dessus, c'est-à-dire que j'obtiens effectivement une valeur unique, k égal à trois. Je peux conclure. J'ai pu déterminer un seul angle pour cette première relation. Nous aurons encore une deuxième possibilité à analyser par la suite, mais pour la première relation, j'ai qu'un seul angle bêta que je calcule en mettant k ici dedans, donc je vais obtenir 3 pi/8 plus, et j'obtiens ici, pour k égal à trois, j'obtiens 9 pi/2. Alors on peut mettre cela au même dénominateur. On peut écrire le tout en huitième. Donc là, je vais obtenir une amplification par quatre et j'obtiens donc 36 plus 3 qui me font 39 pi. Il me faut calculer en fait par bêta, mes tangentes de bêta.

Notes

Summary

6m 44s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan\beta$ pour $\beta = \frac{39\pi}{8}$

On a $\tan\frac{39\pi}{8} = \tan\left(\frac{39\pi}{8} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Mais $\tan^2\frac{\pi}{8} = \tan^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4}$

Donc calculons tangente bêta. Alors je vous rappelle que bêta c'était 39 pi/8. On a tangente de 39 pi/8. La fonction tangente est pi-périodique, c'est-à-dire que je peux additionner ou soustraire autant de fois que je le veux une valeur de pi à ces 39 pi/8. Alors je vais soustraire cinq pi. Donc je vais dire : tangente de 39 pi/8 moins 5 pi. Donc si là vous faites la différence, il vous reste un moins pi/8. Et je vous rappelle que la fonction tangente est impaire, c'est-à-dire que le signe moins peut passer devant tangente. Il me reste moins tangente pi/8. Donc j'ai réduit mon problème à déterminer tangente de pi/8. Comment faire ? Je vais utiliser des formules pour demi-angle et je peux procéder comme suit : je peux dire que tangente... Alors il y a au carré, là. La tangente au carré de pi/8 peut être écrite comme la tangente carré de la moitié de pi/4. Pi/4 est un angle remarquable, c'est pour cela que je me sers de cette relation. Et pour tangente carré, alors on a une relation, que je vous ai présentée lors de l'une des dernières séquences, c'est un moins le cosinus, ici, de pi/4 divisé par un plus le cosinus de pi/4. Et le cosinus de pi/4 on connaît, c'est racine de deux demie.

Notes

Summary

8m 30s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan\beta$ pour $\beta = \frac{39\pi}{8}$

On a $\tan\frac{39\pi}{8} = \tan\left(\frac{39\pi}{8} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Mais $\tan^2\frac{\pi}{8} = \tan^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4} = \frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$

$\tan\frac{\pi}{8} =$

Alors cette fraction, je vais l'amplifier par deux pour avoir une écriture quelque peu moins lourde. Donc j'obtiens ici deux moins racine de deux à diviser par deux plus racine de deux. Je vais en outre amplifier cette fraction par le conjugué du dénominateur, c'est-à-dire par deux moins racine de deux. Alors je peux dire que je multiplie en quelque sorte ici par un et j'obtiens donc au numérateur le deux moins racine de deux au carré, que je laisse tel quel, il va me rendre service, à diviser par... Et ici on a une relation du type A plus B fois A moins B, donc on va obtenir A carré moins B carré, donc j'obtiens le deux au carré qui fait quatre moins la racine de deux au carré qui vaut deux, il va me rester les deuxièmes. Là, j'ai tangente carré de pi/8, en fait, il me faut tangente de pi/8. Je vous rappelle que si vous connaissez le carré d'un nombre, vous ne connaissez pas nécessairement ce nombre, vous le connaissez uniquement au signe près, mais pi/8 est un angle du premier radian, donc tangente va être positif. Je peux donc choisir, si un angle ici devant la racine a un signe plus, j'ai deux moins racine de deux au carré sur deux.

Notes

Summary

10m 18s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan\beta$ pour $\beta = \frac{39\pi}{8}$

On a $\tan\frac{39\pi}{8} = \tan\left(\frac{39\pi}{8} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Mais $\tan^2\frac{\pi}{8} = \tan^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4} = \frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$

$\tan\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{|2-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$

$-\tan\frac{\pi}{8} = 1-\sqrt{2} = \tan\beta$

Je vais tirer ces racines séparément au numérateur et au dénominateur en faisant quand même attention si je tire la racine d'un nombre élevé au carré, on obtient ce nombre en valeur absolue. Alors soyons prudent en mettant des valeurs absolues. Tirons la racine de deux. Cependant deux moins racine de deux est positif, si bien que je peux laisser tomber ces valeurs absolues, et je peux encore amplifier ici par racine de deux afin de faire disparaître au dénominateur cette racine et qu'est-ce qu'il me reste ? Il me reste alors deux fois racine de deux moins deux divisé par deux, cela se simplifie encore par deux. Il me reste racine de deux moins un. Alors ça c'est tangente pi/8. En fait, il me faut moins tangente de pi/8. Et ça, ça va être un moins racine de deux, et ça, c'est la valeur recherchée de tangente bêta.

Notes

Summary

11m 40s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan(\alpha+\beta)$

On a $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+(1-\sqrt{2})}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{2}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-2}$

Je peux à présent calculer tangente de alpha plus bêta. En effet, on a tangente de alpha plus bêta. C'est une fraction. Au numérateur, j'ai la somme de tangente alpha et de tangente bêta. Au dénominateur, j'ai un moins tangente alpha fois tangente bêta. Je connais à présent toutes les valeurs qui interviennent dans cette fraction. Je connais tangente alpha et tangente bêta. Pour tangente alpha, je sais que je peux écrire moins racine deux demie. Pour tangente bêta, je sais que je peux écrire un moins racine de deux. La barre de fraction. J'ai un, j'ai moins tangente alpha, donc je vais avoir plus racine de deux qui multiplie tangente bêta qui est un moins racine de deux. De nouveau, cette fraction je l'amplifie par deux afin d'éviter les doubles fractions. Ce qui me reste, c'est un moins racine de deux plus deux moins deux fois racine de deux, au numérateur. Et au dénominateur, si j'amplifie par deux, il va me rester un deux plus une racine de deux moins deux. Donc au dénominateur, il reste en fait uniquement une racine de deux, et au numérateur, il va me rester le deux ici, il va me rester moins trois fois racine de deux, et le tout divisé par racine deux.

Notes

Summary

12m 40s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan(\alpha+\beta)$

On a $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+(1-\sqrt{2})}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{2}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-2}$

$= \dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}-6}{2} = \sqrt{2}-3$

On va encore rendre rationnel le dénominateur, donc je vais encore amplifier par racine de deux, ce qui me donne deux fois la racine de deux moins trois fois deux six, à diviser par deux, et je peux simplifier cette fraction par deux et il va me rester racine de deux moins trois. Voilà, donc j'ai obtenu la valeur de tangente alpha plus bêta dans le premier cas. Je vous rappelle que nous avions encore une deuxième possibilité pour bêta. Alors analysons cette seconde possibilité.

Notes

Summary

14m 09s

Exemple 5 : solution (suite et fin)

B) Analyse de la seconde relation

Il faut $\frac{\beta}{3} = -\frac{\pi}{2} + \beta + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

c.à.d. $\beta = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi$ avec "

Mais $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi \leq 5\pi \iff 19 < 3 + 12k \leq 20$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Je vous rappelle cette deuxième relation. Il faut que bêta/3 soit égal à moins pi/2 plus bêta plus... Alors on avait dit modulo deux pi, donc plus k fois deux pi, avec k un entier positif ou négatif, k dans le Z. Ensuite, il faut également remplir cette relation 19 pi/4 plus petit que bêta, plus petit ou égal à 5 pi. Avec cette première égalité ici, on peut procéder comme précédemment. Donc je peux regrouper bêta sur la gauche, résoudre par rapport à bêta. Ce qui va sortir, et je vous laisse vérifier ces calculs, vous allez obtenir pour bêta, cette fois-ci, la valeur de 3 pi/4 plus k fois 3 pi, avec toujours cette même contrainte. Je peux peut-être résumer cela ainsi. Regardons ce que cela signifie si j'introduis cette valeur de bêta dans cette contrainte. Donc j'ai 19 pi/4 qui doit être plus petit que 3 pi/4 plus k fois 3 pi, qui doit être plus petit ou égal que 5 pi. On peut traiter ça comme précédemment, donc on peut simplifier par pi, ou multiplier par quatre. Ce qui va rester c'est 19 plus petit que 3 plus 12 k, plus petit ou égal à 20. Vous soustrayez 3, vous divisez par 12. Donc j'ai 16 plus petit que 12 k, plus petit ou égal que 17.

Notes

Summary

14m 49s

Exemple 5 : solution (suite et fin)

B) Analyse de la seconde relation

Il faut $\frac{\beta}{3} = -\frac{\pi}{2} + \beta + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

c.à.d. $\beta = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi$ avec "

Mais $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi \leq 5\pi \iff 19 < 3 + 12k \leq 20$

$\iff 16 < 12k \leq 17$

$\iff \frac{4}{3} < k \leq \frac{17}{12}$

Il n'existe aucun tel $k \in \mathbb{Z}$.

(III) Réponse : $\tan(\alpha+\beta) = \sqrt{2} - 3$

Et j'ai pour finir 16/12, c'est-à-dire si je simplifie par quatre, j'ai 4/3 plus petit que k, plus petit ou égal que 17/12. Cette fois-ci, les 4/3 sont légèrement plus grands que 1, les 17/12 sont plus petits que 2, donc je n'arriverai à trouver aucun tel k, donc il n'existe aucun k. Cette fois-ci, je n'obtiens aucune valeur pour tangente alpha plus bêta et je peux donner la réponse que voici : pour tangente alpha plus bêta, nous avons obtenu racine de deux moins trois. Permettez-moi quand même d'attirer votre attention sur le fait que un problème tel que je viens de le résoudre pourrait donc tout à fait avoir plusieurs réponses pour tangente alpha plus bêta. En effet, il suffit que la seconde relation aboutisse pour une ou plusieurs valeurs possibles de k, et on retrouve alors une multiplicité de réponses.

Notes

Summary

16m 38s

Exemple 6

Exemple

Résoudre l'équation suivante :

$$\sin\alpha + \cos(5\,\alpha) = \cos(3\,\alpha) - \sin(7\,\alpha)\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Considérons après un deuxième exemple. Nous voulons résoudre une équation sinus alpha plus cosinus cinq alpha redonne la même chose que cosinus trois alpha moins sinus de sept alpha, alpha étant un nombre réel quelconque. Il n'est pas tout à fait facile de voir comment attaquer cette problématique ou ce problème. On peut évidemment essayer de, peut-être, transformer des sommes en produits, ça c'est toujours intéressant lorsqu'on a des équations. Si on veut le faire, cela vaut la peine de remarquer un lien, c'est-à-dire de remarquer que, par exemple, si je regarde les deux termes en cosinus, d'abord ils sont déjà en cosinus, et si je fais la somme, parce que je vous rappelle qu'en transformant des sommes en produits, on obtient des demies sommes et des demies différences d'angles, donc ça c'est intéressant de regarder ce qu'on aurait comme sommes ou différences d'angles. Ici, la somme des angles serait huit alpha et pour les sinus, également huit alpha.

Notes

Summary

17m 44s

Exemple 6 : solution

Nous utilisons le fait que

$$5\alpha + 3\alpha = \alpha + 7\alpha$$

Notre équation s'écrit donc

$$\sin\alpha + \sin 7\alpha = \cos 3\alpha + \cos 5\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\frac{\alpha+7\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-7\alpha}{2} = -2 \cdot \sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha-5\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha \cdot$$

Donc on va utiliser ce fait. On va donc écrire notre équation en regroupant les termes en sinus et en regroupant les termes en cosinus. Je peux donc écrire : sinus de alpha plus sinus de sept alpha est égal au cosinus de trois alpha plus le cosinus de cinq alpha. Utilisons à présent nos formules qui permettent de transformer une somme de sinus en un produit. Ces relations sont tout à fait équivalentes, c'est-à-dire qu'elles sont valables pour toutes les valeurs de alpha, donc je peux écrire : il y a un facteur deux qui apparaît. Ensuite, si vous consultez cette formule, si vous ne l'avez pas retenue par cœur, essayez quand même de la retenir par cœur, on obtient le sinus de la demi-somme, donc le sinus de alpha plus 7 alpha/2, qui multiplie le cosinus de la demi-différence. Donc alpha moins 7 alpha/2, est égal... Pour la somme des cosinus, on a un facteur moins deux qui apparaît et ensuite on a le sinus de la demi-somme qui multiplie le sinus de la demi-différence. Alors, bien évidemment ici, les facteurs deux, je peux m'en passer. Donc ce qui me reste, c'est le sinus de quatre alpha qui multiplie... Alors ici j'ai alpha moins 7 alpha/2, cela donne moins trois alpha.

Notes

Summary

18m 48s

Exemple 6 : solution

Nous utilisons le fait que

$$5\alpha + 3\alpha = \alpha + 7\alpha$$

Notre équation s'écrit donc

$$\sin\alpha + \sin 7\alpha = \cos 3\alpha + \cos 5\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\frac{\alpha+7\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-7\alpha}{2} = -2 \cdot \sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha-5\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha \cdot \cos 3\alpha = -\sin 4\alpha \cdot \sin(-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha \left[\cos 3\alpha - \sin\alpha\right] = 0$$

"type $A(\alpha) \cdot B(\alpha) = 0$"

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

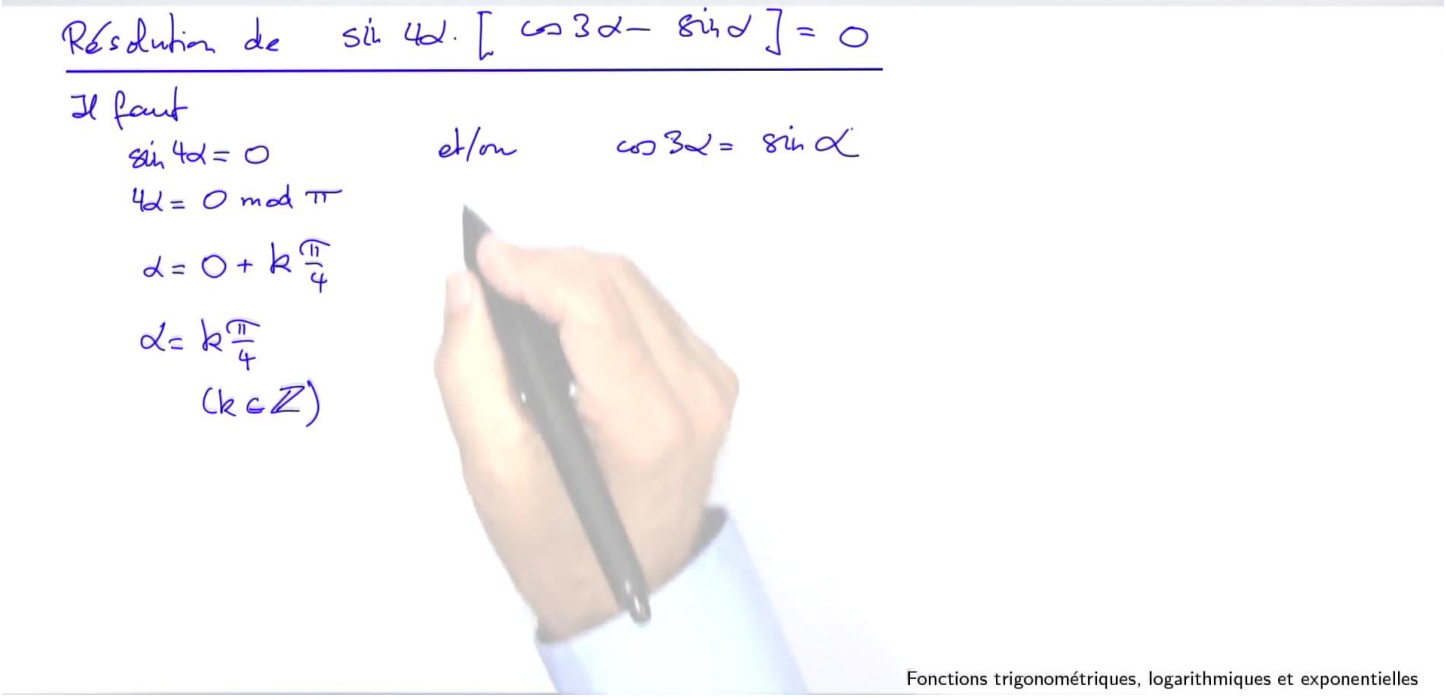
Le cosinus est pair donc je peux immédiatement écrire que c'est le cosinus de trois alpha égal, le signe moins, il va me rester, et, ici, j'obtiens un sinus de quatre alpha qui multiplie un sinus trois alpha moins cinq alpha donne moins deux alpha, donc un sinus de moins alpha. On remarque immédiatement ici la présence d'un facteur commun. Devant cette situation, il est assez judicieux de regrouper l'ensemble des termes sur un seul côté. Je vais vous proposer de les regrouper sur la gauche et se faisant, de mettre ce terme commun en évidence. Alors il reste un sinus quatre alpha, ici il me reste un cosinus trois alpha, ici le sinus moins alpha, en fait le sinus est impair, donc c'est un moins sinus alpha avec le moins donne un plus. Puis de l'autre côté, je retrouve un moins sinus alpha qui donne zéro. Alors j'aimerais quand même insister sur le fait, ça c'est l'équation d'un type où un produit donne zéro, donc je vais écrire que ceci est une équation du type : une expression en alpha fois une deuxième expression en alpha qui donne égal à zéro. Pour obtenir zéro, il faut que un des termes au moins s'annule.

Notes

Summary

20m 31s

Exemple 6 : solution (suite)



Résolvons donc cette équation. Alors je vais commencer par analyser le premier terme, celui que l'on pourrait appeler A de alpha, le crochet étant B de alpha, je vais l'annuler. Je vais écrire que le sinus de quatre alpha donne zéro. En outre, je peux écrire et/ou, donc il se peut tout à fait que les deux facteurs soient nuls, mais il faut que au moins un soit nul, alors j'ai le premier nul. Le deuxième nul donnerait que le cosinus de trois alpha est égal au sinus de alpha. Alors analysons séparément les deux cas. Donc pour sinus quatre alpha égal à zéro, je peux écrire que quatre alpha est égal à zéro modulo pi. Il faut peut-être consulter le cercle trigonométrique. Le sinus nul signifie que, sur le cercle trigonométrique, vous trouvez un point dont la coordonnée y vaut zéro, et ça c'est le cas pour zéro, pi, deux pi, trois pi, et cetera, moins pi, moins deux pi, donc l'angle quatre alpha doit être nul modulo pi. Cela revient à dire que alpha doit être de la forme zéro plus k fois pi/4, puisque j'ai divisé par quatre. Donc il va me rester alpha est égal simplement à un multiple entier positif ou négatif de pi/4. Voilà, ça c'est pour la première possibilité. Analysons l'autre possibilité.

Notes

Summary

21m 57s

Exemple 6 : solution (suite)

Résolution de $\sin 4\alpha \cdot [\cos 3\alpha - \sin\alpha] = 0$

Il faut

$\sin 4\alpha = 0$

$4\alpha = 0 \bmod \pi$

$\alpha = 0 + k\frac{\pi}{4}$

$\alpha = k\frac{\pi}{4}$

$(k \in \mathbb{Z})$

et/ou $\cos 3\alpha = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Donc

- 1ère famille de solutions

$3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$

c.à.d $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

- seconde famille de solutions

Là, j'ai une équation qui fait intervenir un cosinus et un sinus. Je n'aime pas beaucoup cela, je préfère avoir qu'une seule fonction trigonométrique. Je vous rappelle qu'on peut exprimer un cosinus par sinus, ou un sinus par cosinus, donc je vais utiliser une telle relation et écrire que, de façon équivalente, je peux dire que le cosinus de trois alpha est égal... et je remplace le sinus alpha par cosinus pi/2 moins alpha. Donc je vais avoir une première famille de solutions. La première famille signifie simplement que l'angle trois alpha et l'angle pi/2 moins alpha égale modulo 2 pi. Alors cette relation se résout par rapport à alpha. Donc on voit très bien que si je prends cet alpha, de l'autre côté je vais obtenir quatre alpha égale quelque chose. Je divise par quatre, qu'est-ce qu'il me reste ? Il me reste pour alpha le pi/8 plus, et k fois, de nouveau divisé par quatre, donc pi/2, avec k dans Z. J'ai également une seconde famille de solutions. Alors cette fois-ci, l'angle trois alpha et l'angle pi/2 moins alpha ne vont pas être égaux, mais vont être de signe différent modulo deux pi. Donc j'écris cette fois-ci que trois alpha est égal à...

Notes

Summary

23m 41s

Exemple 6 : solution (suite)

Résolution de $\sin 4\alpha \cdot [\cos 3\alpha - \sin\alpha] = 0$

Il faut

$\sin 4\alpha = 0$

$4\alpha = 0 \bmod \pi$

$\alpha = 0 + k\frac{\pi}{4}$

$\alpha = k\frac{\pi}{4}$

$(k \in \mathbb{Z})$

et/ou $\cos 3\alpha = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Donc

- 1ère famille de solutions

  $3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$

  c.à.d $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

- seconde famille de solutions

  $3\alpha = -\frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi$

  c.à.d $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Alors je prends moins pi/2 plus alpha modulo deux pi, donc plus k fois deux pi. Là de nouveau, je peux résoudre cette équation par rapport à alpha, c'est-à-dire que l'alpha de l'autre côté donne deux alpha. Je divise par deux, il reste alpha égal. Donc après division par deux, ici un moins pi/4 plus k fois pi, avec k dans Z. Je vais résumer maintenant cette situation. Donc j'ai ici une possibilité pour alpha. Ici, j'ai encore deux autres possibilités pour alpha.

Notes

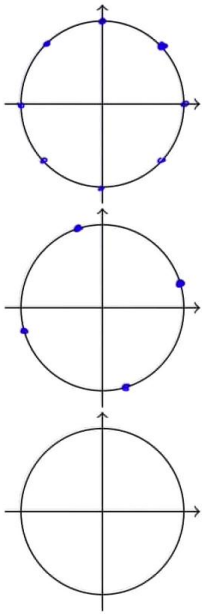
Summary

25m 13s

Exemple 6 : solution (suite et fin)

Résumons :

- $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$



Alors résumons la situation. Nous avions trouvé d'abord alpha égal k fois pi/4 où k est un entier positif ou négatif. Essayons de situer sur le cercle trigonométrique ces valeurs. Donc je vais obtenir, ici quelque part, une valeur de pi/4, c'est 45 degrés. Ensuite, deux fois, trois fois, et cetera. Donc si je prends deux fois pi/4, je vais être là. Donc chaque point ici, en fait, chaque position correspond à une valeur de alpha possible. Donc on peut dire que ici c'est pi/4, ou alors pi/4 plus deux pi ou moins deux pi et cetera, ça ce sont des valeurs possibles pour alpha. Ensuite, nous avions trouvé pour alpha, pi/8 plus k fois pi/2. Pi/8, où est-ce que je pourrais situer pi/8 ? Donc ici j'ai pi/4, j'ai encore la moitié qui serait ici. Et ensuite, il faut ajouter ou soustraire des multiples de pi/2, c'est-à-dire des quarts de cercle. Donc je vais me retrouver dans cette situation-là, là, là, et ensuite je me retrouve dans ces points avec des valeurs correspondantes aux différences de l'angle alpha. Là aussi, k est dans Z. Troisième possibilité, c'est qu'on avait trouvé k égal moins pi/4 plus k fois pi. Alors moins pi/4, je vais être ici, plus pi, là, et ensuite je me retrouve ici, là et là.

Notes

Summary

25m 48s

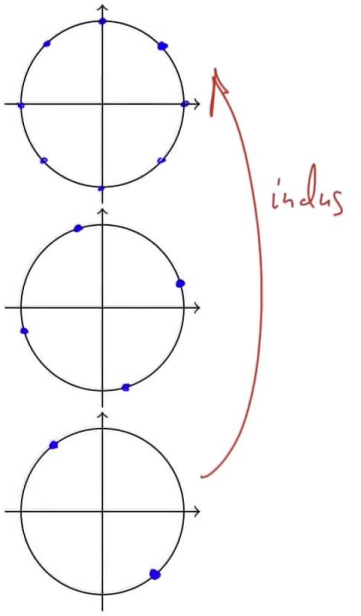
Exemple 6 : solution (suite et fin)

Résumons :

- $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Donc

$$S = \left\{ k \cdot \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Si l'on compare ces figures, on s'aperçoit qu'en fait les dernières solutions, ici, sont incluses dans les premières. Donc il suffit de retenir les deux premières possibilités et je peux donc écrire mon ensemble de solutions, l'ensemble de solutions S est donné par : une fois les multiples k fois pi/4, avec k dans Z, et ensuite, une deuxième famille des pi/8 plus k fois pi/2, avec k un élément de Z. Et voilà, ça c'est la solution de cet exercice.

Notes

Summary

27m 37s

Les formules trigonométriques

Un grand merci d'avoir suivi ce quatrième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Nous voilà arrivés à la fin de ce chapitre quatre. Je vous remercie pour l'attention que vous portez à ce cours. Je vous remercie pour le suivi que vous me donnez. Je vous félicite pour votre discipline et pour votre endurance dans la chose. J'adresse également un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet régulièrement. Merci Guido Burmeister. Merci Roger Sauser. Merci Olivier Woringer. À une prochaine.

Notes

Summary

28m 22s