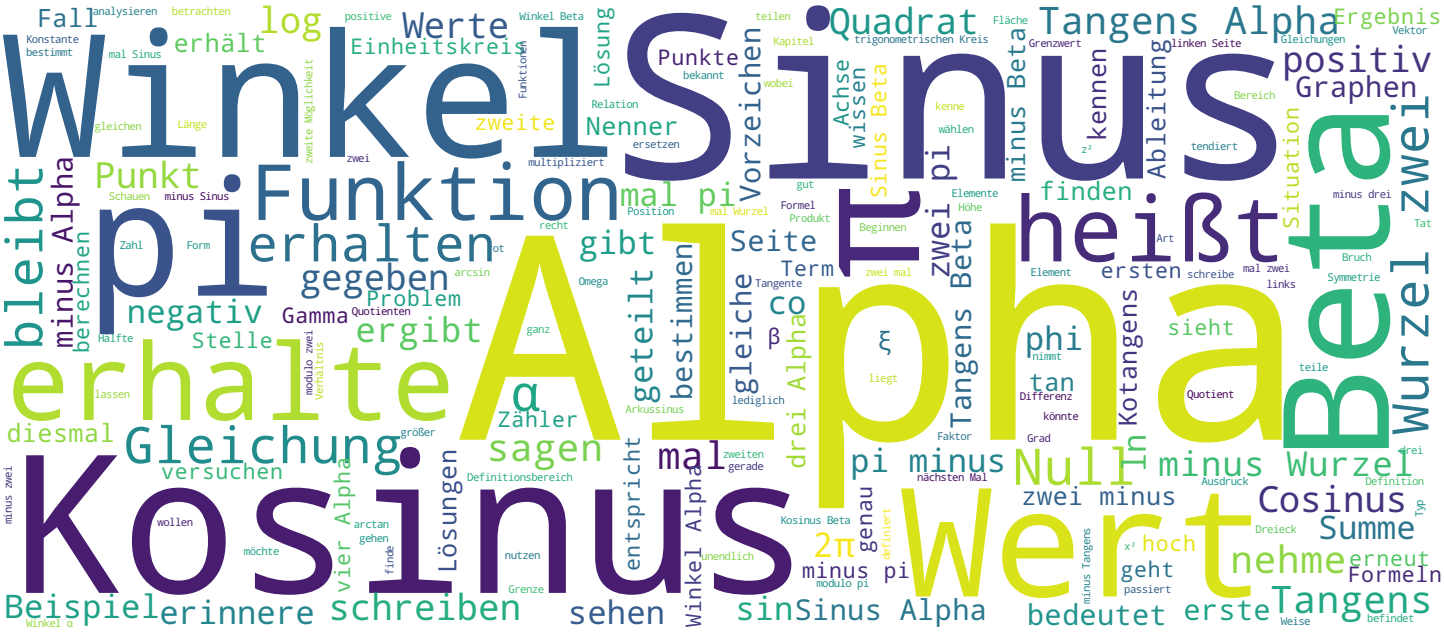
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Formules trigonométriques

4.4 Exemples

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



EPFL

Exemple 5

Exemple

Déterminer la valeur exacte de $\tan(\alpha+\beta)$ sachant que

$$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin(\beta) = \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi.$$

Guten Tag und herzlich willkommen in meinem Kurs über trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen. Während der letzten Sitzungen habe ich Ihnen die trigonometrischen Funktionen vorgestellt, das heiße, eine ganze Serie von erfüllten Relationen durch die Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens. Heute stelle ich Ihnen zwei Beispiele vor, in denen ich die eine oder andere dieser trigonometrischen Relationen benutze. Beginnen wir mit dem folgenden Beispiel: Wir würden gern den genauen Wert von Tangens Alpha plus Beta bestimmen, und wissen, dass wir Tangens Alpha kennen, Tangens Alpha hat den Wert minus Wurzel von zwei Halben. Für Beta kennen wir eine Relation. Wir wissen, dass Sinus Beta gleich Kosinus Beta/3 ist. Außerdem wissen wir, dass Beta zwischen 19 pi/4 und 5 pi liegen muss.

Notes

Summary

0m 03s

Exemple 5 : solution

Données : $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3}$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

On cherche : $\tan(\alpha+\beta)$

(I) Nous allons utiliser $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

Il manque : $\tan\beta$

(II) $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3}$

Hier also die Gegebenheiten: Gegeben sind: Tangens Alpha, mit dem Wert von minus Wurzel zwei Halbe. Auch gegeben ist: Die Relation Sinus Beta ist gleich Kosinus Beta/3 mit 19 pi/4 kleiner als Beta kleiner als oder gleich 5 pi. Und was gesucht ist: Nun, wir suchen den genauen Wert von Tangens Alpha plus Beta. Wie müssen wir das also angehen? Wir werden eine trigonometrische Relation benutzen, die ich letztes Mal vorgestellt habe. Also ersten, werden wir benutzen Tangens Alpha plus Beta ist gleich Summe Tangens Alpha plus Tangens Beta geteilt durch eins minus Tangens Alpha mal Tangens Beta. Wenn ich mir diesen Term anschaue, bemerke ich, dass der Teil Tangens Alpha, hier, bekannt ist, was mir fehlt, ist Tangens Beta. Ich muss jetzt versuchen, den Wert von Tangens Beta zu bestimmen. Also kann ich diesen zweiten Teil der Größe benutzen, wo ich eine Relation kenne, die durch Beta erfüllt ist. Los! Ich starte also mit der Gleichung Sinus Beta gleich Kosinus Beta/3. Das ist eine Gleichung, die zwei trigonometrische Funktionen beinhaltet, das ist immer ein wenig problematischer, wir ziehen es ja vor, nur eine zu haben. Also können wir Sinus durch Kosinus ausdrücken, oder Kosinus durch Sinus.

Notes

Summary

0m 54s

Exemple 5 : solution

Données : $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3}$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

On cherche : $\tan(\alpha+\beta)$

(I) Nous allons utiliser $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

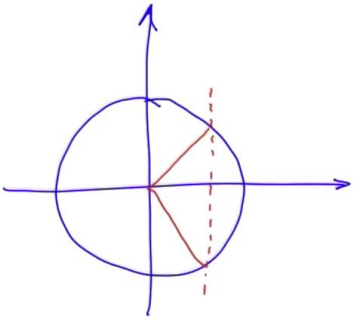
Il manque : $\tan\beta$

(II) $\sin\beta = \cos\frac{\beta}{3} \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\beta}{3}$

- $\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta \mod 2\pi$ et $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

et/ou

- $\frac{\beta}{3} = -\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \mod 2\pi$ et $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$



Hier werde ich Sinus Beta mithilfe von Kosinus ausdrücken. Ich kann wie folgt schreiben: Kosinus von pi/2 minus Beta, das hier ist eigentlich Sinus Beta, ist gleich Kosinus von Beta/3. Somit habe ich jetzt eine Gleichung des Typs Kosinus gleich Kosinus. Auf dem trigonometrischen Kreis bedeutet das, dass der Wert von Kosinus gegeben ist. So. Und das bedeutet, dass wir zwei Winkelpositionen finden kann für einen gegebenen Kosinus. Wenn man hier die beiden Kosinus vergleicht, dann entsprechen entweder die beiden Winkel der gleichen Position des Punktes, oder die beiden Winkel entsprechen unterschiedlichen Positionen. Ich kann also schreiben: Winkel Beta/3 ist gleich Winkel pi/2 minus Beta modulo zwei pi. Also da sind sowohl der Winkel pi/2 minus Beta als auch Beta/3 in einer gleichen Position. Eine andere Möglichkeit ist, dass Beta/3 gleich minus diesem Winkel pi/2 minus Beta modulo zwei pi ist. Und beide Male wissen wir, dass Beta innerhalb von 19 pi/4 pi und 5 pi liegt. Wir werden also einfach wie folgt vorgehen: Wir werden die erste dieser Möglichkeiten analysieren, das heißt, dass wir versuchen werden, Beta ab dieser Gleichung und dieser zusätzlichen Abhängigkeit zu bestimmen, und ab dieser Werte, oder ab dem bekannten Wert von Beta, werden wir Tangens Beta errechnen und anschließend das gleiche mit der zweiten Zeile machen.

Notes

Summary

2m 48s

Exemple 5 : solution (suite)

A) Analyse de la 1ère relation

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta \mod 2\pi$ ⇔ $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta + k2\pi \iff \frac{4\beta}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \iff \beta = \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Il faut que $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2} \leq 5\pi$

Beginnen wir also mit der Analyse der ersten Relation. Ich erinnere Sie an diese erste Relation: Beta/3 ist gleich pi/2 minus Beta, und wir haben gesagt modulo zwei pi, und wir wissen, dass 19 pi/4 kleiner ist als Beta, kleiner oder gleich 5 pi. Also schauen wir diese erste Übereinstimmung an, hier. Ich kann also schreiben, dass Beta/3 gleich pi/2 minus Beta plus k mal 2 pi ist, das da ist modulo 2 pi. K ist ein Ganzes, positiv oder negativ. Diese Relation kann ich wie folgt umwandeln. Ich kann dieses minus Beta auf die linke Seite nehmen, es wird plus Beta und insgesamt habe ich dann 4 Beta/3 gleich pi/2 plus k mal pi. Und ich kann diese Übereinstimmung auflösen gegenüber Beta und erhalte für Beta Beta gleich somit multipliziere ich mit 3/4 und das gibt 3 pi/8 plus k mal 3 pi/2. Gut, das ist die erste Gleichung. Wir haben noch eine Abhängigkeit auf Beta, wir werden jetzt diese Abhängigkeiten auf diese Werte, die wir hier für Beta erhalten haben, anwenden. Also muss: 19 pi/4 kleiner sein als Beta. Ich schreibe diesen Term hierhin, also 3 pi/8 plus k mal 3 pi/2 kleiner oder gleich 5 pi. Diese doppelte Ungleichung kann wie eine einfache Ungleichung behandelt werden.

Notes

Summary

4m 51s

Exemple 5 : solution (suite)

A) Analyse de la 1ère relation

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta \mod 2\pi$ de $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{2} - \beta + k2\pi \iff \frac{4\beta}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \iff \beta = \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Il faut que $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{3\pi}{2} \leq 5\pi \quad |\cdot\frac{8}{\pi}$

$\iff 38 < 3 + 12k \leq 40 \quad |-3$

$\iff 35 < 12k \leq 37 \quad |\cdot\frac{1}{12}$

$\iff \frac{35}{12} < k \leq \frac{37}{12} \iff k = 3$

Donc $\beta = \frac{3\pi}{8} + \frac{9\pi}{2} = \frac{39\pi}{8}$

Ich werde versuchen, sozusagen, den Wert von k zu isolieren, da ich die k suche, die zulässig sind. Also beginne ich damit, mal acht zu multiplizieren und durch pi zu teilen. Dadurch entledige ich mich der Nenner, ich entledige mich dieses pis, das fast überall auftaucht. Und ich erhalte gleichwertig: 38 kleiner als 3 plus 12 k kleiner als oder gleich 40. So, ich entledige mich jetzt dieser drei. Bleibt 35 kleiner als 12 k kleiner als oder gleich 37, und ich werde durch 12 teilen, um 35/12 ist kleiner als k kleiner als oder gleich 37/12. Man sieht sofort, dass 36/12 drei wäre. Hier bin ich etwas unter drei, ein bisschen drüber, das heißt, ich erhalte tatsächlich einen eindeutigen Wert, k gleich 3. Ich kann abschließen. Ich konnte einen einzigen Winkel für diese erste Relation bestimmen. Wir werden noch eine zweite Möglichkeit haben, anschließend zu analysieren, aber für die erste Relation habe ich einen einzigen Winkel Beta, den ich berechne, indem ich k hier hinein stecke, also erhalte ich 3 pi/8 plus und ich erhalte hier für k gleich 3 ich erhalte 9 pi/2. Also können wir das in den gleich Nenner stellen. Wir können alles in Achtel schreiben. Also dort erhalte ich eine Vervielfältigung mal vier und ich erhalte also 36 plus 3 was 39 pi macht. Ich muss tatsächlich über Beta meine Tangens von Beta berechnen.

Notes

Summary

6m 44s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan\beta$ pour $\beta = \frac{39\pi}{8}$

On a $\tan\frac{39\pi}{8} = \tan\left(\frac{39\pi}{8} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Mais $\tan^2\frac{\pi}{8} = \tan^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4}$

Also berechnen wir Tangens Beta. Ich erinnere Sie daran, dass Beta 39 pi/8 war. Wir haben Tangens von 39 pi/8. Die Tangensfunktion ist pi-periodisch, das heißt, dass ich so oft, wie ich es will einen Wert von pi, zu diesen 39 pi/8 hinzufügen oder von ihnen abziehen kann. Also ziehe ich hier fünf pi ab. Also sage ich: Tangens von 39 pi/8 minus 5 pi. Wenn Sie also hier die Differenz ziehen, bleibt Ihnen eins minus pi/8. Und ich erinnere Sie daran, dass die Funktion Tangens ungerade ist, das heiß, dass das Vorzeichen minus vor Tangens gestellt werden kann. Ich behalte minus Tangens pi/8. Ich habe somit mein Problem, Tangens von pi/8 festzulegen, reduziert. Wie weiter? Ich werde die Formeln für halbe Winkel benutzen und ich kann wie folgt verfahren: Ich kann sagen, dass Tangens... Also gibt es hier ein Quadrat. Tangens² von pi/8 kann geschrieben werden wie Tangens² von der Hälfte von pi/4. Pi/4 ist ein bemerkenswerter Winkel, deshalb nutze ich diese Relation. Und für Tangens², also eine andere Relation, die ich Ihnen während einer der letzten Sitzungen vorgestellt habe, ist es eins minus Kosinus hier von pi/4 geteilt durch plus Kosinus von pi/4. Und Kosinus von pi/4 kennen wir, das ist Wurzel von zwei Halben.

Notes

Summary

8m 30s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan\beta$ pour $\beta = \frac{39\pi}{8}$

On a $\tan\frac{39\pi}{8} = \tan\left(\frac{39\pi}{8} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Mais $\tan^2\frac{\pi}{8} = \tan^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4} = \frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$

$\tan\frac{\pi}{8} =$

Also diesen Bruch werde ich mit 2 erhöhen, um eine etwas weniger schwere Schreibweise zu erhalten. Ich erhalte also hier zwei minus Wurzel zwei geteilt durch zwei plus Wurzel zwei. Ich werde diesen Bruch im Übrigen mit der konjugiert-komplexen Zahl des Zählers multiplizieren, das heißt mal zwei minus Wurzel zwei. Also ich kann sagen, dass ich hier sozusagen mal ein nehme und ich erhalte somit im Zähler zwei minus Wurzel zwei zum Quadrat, den ich so stehen lasse, er wird mir noch nützlich sein, geteilt durch... Und hier haben wir ein Relation des Typs A plus B mal A minus B, also erhalten wir A² minus B², also erhalte ich 2², was vier macht, minus Wurzel 2 zum Quadrat, was 2 ist, es bleiben die Halben. Da habe ich Tangens² von pi/8, und eigentlich brauche ich Tangens von pi/8. Ich erinnere Sie daran, dass wenn Sie die Quadratzahl einer Zahl kennen, Sie nicht unbedingt diese Zahl kennen, Sie kennen sie lediglich bis auf das Vorzeichen, aber pi/8 ist ein Winkel, des ersten Radianten, also wird Tangens positiv sein. Ich kann demnach wählen, ob ein Winkel hier vor der Wurzel ein Plus-Vorzeichen hat, ich habe zwei minus Wurzel zwei zum Quadrat auf zwei.

Notes

Summary

10m 18s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan\beta$ pour $\beta = \frac{39\pi}{8}$

On a $\tan\frac{39\pi}{8} = \tan\left(\frac{39\pi}{8} - 5\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Mais $\tan^2\frac{\pi}{8} = \tan^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\pi/4}{1+\cos\pi/4} = \frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$

$\tan\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{|2-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$

$-\tan\frac{\pi}{8} = 1-\sqrt{2} = \tan\beta$

Ich werde die Wurzeln separat in den Zähler und in den Nenner ziehen, und passe dabei trotzdem auf, dass wenn ich die Wurzel einer zum Quadrat erhöhten Zahl ziehe, man die Zahl als absoluten Wert erhält. Also seien wir vorsichtig mit der Verwendung absoluter Zahlen. Ziehen wir die Wurzel von zwei. Allerdings ist zwei minus Wurzel zwei positiv, sodass ich diese absoluten Werte fallen lassen kann, und ich kann hier noch mit Wurzel zwei erhöhen, um diese Wurzel aus dem Nenner zu bekommen, und was bleibt? Ich habe dann noch zwei mal Wurzel zwei minus zwei geteilt durch zwei, das kürzt man noch durch zwei. Es bleibt Wurzel zwei minus eins. Das ist also Tangens pi/8. Im Grunde genommen brauche ich minus Tangens von pi/8. Und das, das wird eins minus Wurzel zwei, und das ist der gesuchte Wert von Tangens Beta.

Notes

Summary

11m 40s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan(\alpha+\beta)$

On a $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+(1-\sqrt{2})}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{2}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-2}$

$= \dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Jetzt kann ich Tangens von Alpha plus Beta berechnen. Tatsächlich haben wir Tangens von Alpha plus Beta. Es ist ein Bruch. Im Zähler habe ich die Summe von Tangens Alpha und Tangens Beta. Im Nenner habe ich eins minus Tangens Alpha mal Tangens Beta. Ich kenne jetzt alle Werte, die in diesem Bruch vorkommen. Ich kenne Tangens Alpha und Tangens Beta. Für Tangens Alpha weiß ich, dass ich schreiben kann minus Wurzel zwei Halbe. Für Tangens Beta, weiß ich, dass ich schreiben kann eins minus Wurzel zwei. Der Bruchstrich. Ich habe eins, ich habe Tangens Alpha, also habe ich plus Wurzel zwei, die Tangens Alpha multipliziert, das eins minus Wurzel zwei ist. Diesen Bruch erhöhe ich nochmals mit zwei, um Doppelbrüche zu vermeiden. Was bleibt, ist eins minus Wurzel zwei plus zwei minus zwei mal Wurzel zwei im Zähler. Und im Nenner, wenn ich mit zwei erhöhe, bleibt zwei plus Wurzel zwei minus zwei. Im Nenner bleibt also eigentlich nur Wurzel zwei, und im Zähler bleibt mir diese zwei hier, mir bleibt minus drei mal Wurzel zwei, das Ganze geteilt durch Wurzel zwei. Wir machen den Nenner noch rational, also erhöhe ich noch mit Wurzel zwei, wodurch ich zwei mal Wurzel zwei erhalte, minus drei mal zwei sechs, geteilt durch zwei, und ich kann diesen Bruch durch zwei kürzen, und dann bleibt Wurzel zwei minus drei.

Notes

Summary

12m 40s

Exemple 5 : solution (suite)

Calcul de $\tan(\alpha+\beta)$

On a $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+(1-\sqrt{2})}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{2}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-2}$

$= \dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}-6}{2} = \sqrt{2}-3$

So, also habe ich den Wert von Tangens Alpha plus Beta im ersten Fall erhalten. Ich erinnere Sie daran, dass wir noch eine zweite Möglichkeit für Beta hatten. Analysieren wir also diese zweite Möglichkeit.

Notes

Summary

14m 31s

Exemple 5 : solution (suite et fin)

B) Analyse de la seconde relation

Il faut $\frac{\beta}{3} = -\frac{\pi}{2} + \beta + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

c.à.d. $\beta = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi$ avec "

Mais $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi \leq 5\pi \iff 19 < 3 + 12k \leq 20$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich erinnere Sie an diese zweite Relation. Beta/3 muss gleich minus pi/2 sein, plus Beta plus... Wir hatten also gesagt modulo zwei pi, also plus k mal zwei pi, mit einem ganzen pi, positiv oder negativ, k in Z. Dann muss auch noch diese Relation 19 pi/4 erfüllt werden, kleiner Beta, kleiner oder gleich 5 pi. Mit dieser ersten Übereinstimmung hier können wir wie vorhin vorgehen. Also kann ich Beta auf der linken Seite zusammenziehen, und auflösen gegenüber Beta. Was resultieren wird, ich lasse Sie die Berechnungen prüfen, Sie erhalten für Beta diesmal den Wert 3 pi/4 plus k mal 3 pi, mit immer noch der gleichen Abhängigkeit. Ich kann das vielleicht so zusammenfassen. Schauen wir einmal, was es bedeutet, wenn ich diesen Wert von Beta in diese Abhängigkeit einfüge. Also ich habe 19 pi/4, das kleiner sein muss als 3 pi/4 plus k mal 3 pi, das kleiner oder gleich 5 pi sein muss. Wir können das wie vorhin behandeln, also können wir durch pi kürzen oder mal vier multiplizieren. Was bleibt ist 19 kleiner als 3 plus 12k kleiner oder gleich 20. Sie ziehen 3 ab, teilen durch 12. Somit habe ich 16 kleiner als 12 k, kleiner oder gleich 17.

Notes

Summary

14m 49s

Exemple 5 : solution (suite et fin)

B) Analyse de la seconde relation

Il faut $\frac{\beta}{3} = -\frac{\pi}{2} + \beta + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ avec $\frac{19\pi}{4} < \beta \leq 5\pi$

c.à.d. $\beta = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi$ avec "

Mais $\frac{19\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi \leq 5\pi \iff 19 < 3 + 12k \leq 20$

$\iff 16 < 12k \leq 17$

$\iff \frac{4}{3} < k \leq \frac{17}{12}$

Il n'existe aucun tel $k \in \mathbb{Z}$.

(III) Réponse : $\tan(\alpha+\beta) = \sqrt{2} - 3$

Und schlussendlich habe ich 16/12, das heißt ich kürze durch vier, ich habe 4/3 kleiner als k, kleiner oder gleich 17/12. Diesmal sind die 4/3 leicht größer als 1, die 17/12 sind kleiner als 2, also werde ich kein solches k finden, also gibt es kein k. Diesmal erhalte ich keinen Wert für Tangens Alpha plus Beta, und ich kann folgende Antwort geben: Für Tangens Alpha plus Beta haben wir Wurzel zwei minus drei erhalten. Erlauben Sie mir trotzdem noch einmal, Ihre Aufmerksamkeit auf die Tatsache zu lenken, dass ein Problem, wie ich es gerade gelöst habe, in der Tat mehrere Antworten für Tangens Alpha plus Beta haben könnte. In Wahrheit reicht es, dass die zweite Relation zu einem oder mehreren möglichen Werten von k führt, und schon findet man eine Vielzahl an Antworten.

Notes

Summary

16m 38s

Exemple 6

Exemple

Résoudre l'équation suivante :

$$\sin\alpha + \cos(5\,\alpha) = \cos(3\,\alpha) - \sin(7\,\alpha)\,, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Betrachten wir später ein zweites Beispiel. Wir möchten die Gleichung lösen: Sinus Alpha plus Kosinus fünf Alpha ist gleich Kosinus drei Alpha minus Sinus von sieben Alpha, wobei Alpha irgendeine reelle Zahl ist. Es ist nicht so ganz einfach, zu sehen, wie dieses Problematik oder dieses Problem anzugehen ist. Man kann natürlich vielleicht versuchen, die Summen in Produkte umzuwandeln, das ist immer interessant, wenn man Gleichungen hat. Wenn man das machen will, lohnt es sich, eine Verbindung zu bemerken, das heißt, zu bemerken, dass zum Beispiel, wenn ich die beiden Elemente in Kosinus anschaue, sind sie schon einmal in Kosinus, und wenn ich die Summe berechne, weil man, ich erinnere Sie daran, bei der Umwandlung von Summen in Produkte halbe Summen und halbe Winkeldifferenzen erhält, also das ist interessant, anzuschauen, was man als Summen oder Winkeldifferenzen hätte. Hier ist die Summe der Winkel acht Alpha und für Sinus ebenfalls acht Alpha.

Notes

Summary

17m 44s

Exemple 6 : solution

Nous utilisons le fait que

$$5\alpha + 3\alpha = \alpha + 7\alpha$$

Notre équation s'écrit donc

$$\sin\alpha + \sin 7\alpha = \cos 3\alpha + \cos 5\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\frac{\alpha+7\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-7\alpha}{2} = -2 \cdot \sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha-5\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha \cdot$$

Wir werden diese Tatsache verwenden. Wir schreiben also unsere Gleichung, indem wir die Elemente in Sinus zusammenführen und die Elemente in Kosinus zusammenführen. Ich kann also schreiben: Sinus von Alpha plus Sinus von sieben Alpha ist gleich Kosinus von drei Alpha plus Kosinus von fünf Alpha. Nutzen wir jetzt unsere Formeln, mit denen wir eine Summe von Sinus in ein Produkt umwandeln können. Diese Relationen sind in der Tat gleichwertig, das heißt, dass sie für alle Werte von Alpha gültig sind, also kann ich schreiben: Es gibt einen Faktor zwei, der auftaucht. Dann, wenn Sie sich diese Formel nachschlagen, sofern Sie sie nicht auswendig gelernt haben, versuchen Sie es trotzdem, sie auswendig zu lernen, erhalten wir Sinus der Halbsumme, also Sinus von Alpha plus 7 Alpha/2, was Kosinus der Halbdifferenz multipliziert. Also Alpha minus 7 Alpha/2, ist gleich... Für die Summe von Kosinus haben wir einen Faktor minus zwei, der auftaucht, und dann haben wir Sinus der Halbsumme, der den Sinus der Halbdifferenz multipliziert. Also, hier, natürlich, kann ich die Faktoren zwei vergessen. Also bleibt Sinus von vier Alpha, der multipliziert... Also hier habe ich Alpha minus 7 Alpha/2, das ist minus drei Alpha.

Notes

Summary

18m 48s

Exemple 6 : solution

Nous utilisons le fait que

$$5\alpha + 3\alpha = \alpha + 7\alpha$$

Notre équation s'écrit donc

$$\sin\alpha + \sin 7\alpha = \cos 3\alpha + \cos 5\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\frac{\alpha+7\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-7\alpha}{2} = -2 \cdot \sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha-5\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha \cdot \cos 3\alpha = -\sin 4\alpha \cdot \sin(-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha \left[\cos 3\alpha - \sin\alpha\right] = 0$$

"type $A(\alpha) \cdot B(\alpha) = 0$"

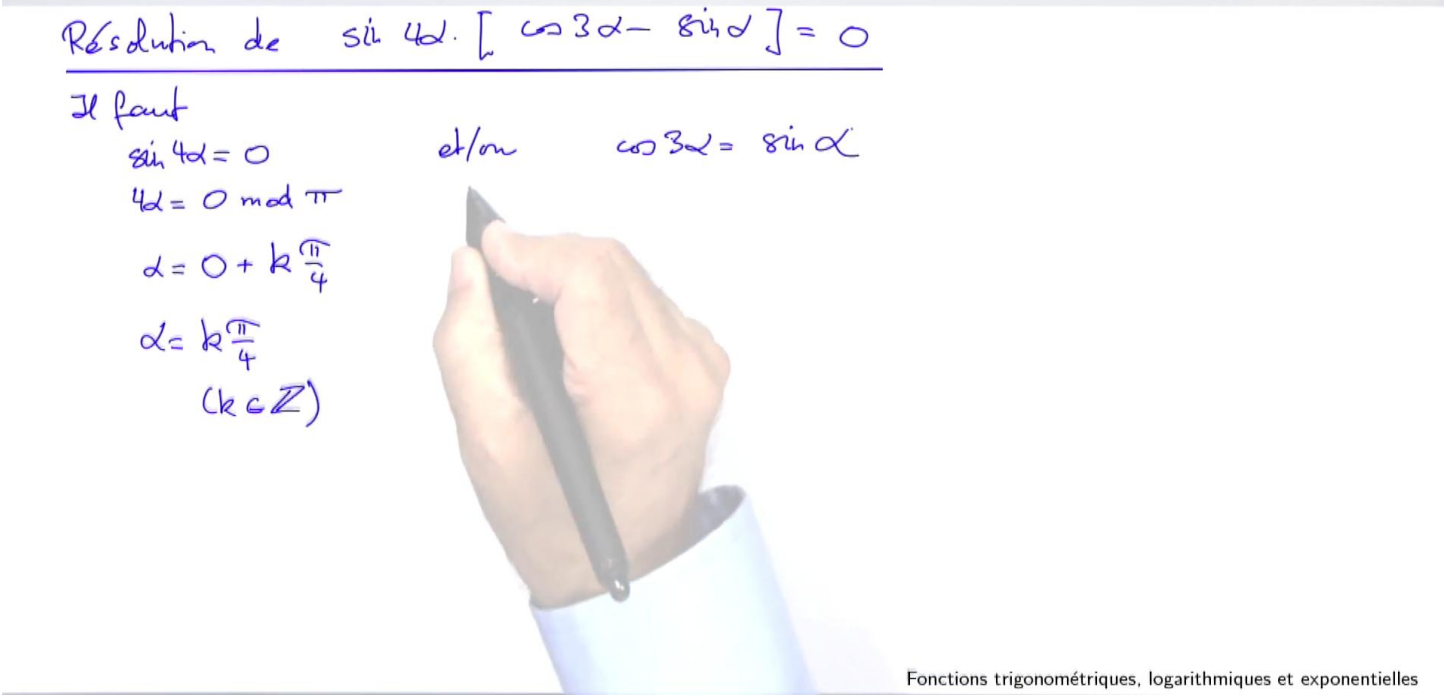
Kosinus ist gerade, also kann ich sofort schreiben, das Kosinus von drei Alpha gleich das Minus-Vorzeichen bleibt und hier erhalte ich Sinus von vier Alpha, der Sinus drei Alpha minus fünf Alpha multipliziert, ist minus zwei Alpha also Sinus von minus Alpha. Man bemerkt hier sofort die Anwesenheit eines gemeinsamen Faktors. Angesichts dieser Lösung ist es relativ sinnvoll, alle Elemente auf einer Seite zusammenzuführen. Ich schlage Ihnen vor, sie auf der linken Seite zusammenzuführen und dabei dieses gemeinsame Element hervorzuheben. Also bleibt Sinus vier Alpha, hier bleibt Kosinus drei Alpha, hier Sinus minus Alpha, im Grunde ist Sinus ungerade, also ist es minus Sinus Alpha, das mit dem Minus zum plus wird. Dann finde ich auf der anderen Seite minus Sinus Alpha, was Null ergibt. Ich würde gern auf der Tatsache bestehen, das ist die Gleichung eines Typs, wo ein Produkt Null ergibt, also ich schreibe, dass das hier eine Gleichung des Typs: ein Element in Alpha mal ein zweites Element in Alpha, das gleich Null ergibt. Um Null zu erhalten, muss sich mindestens ein Element auflösen.

Notes

Summary

20m 31s

Exemple 6 : solution (suite)



Wandeln wir also diese Gleichung um. Also ich beginne mit der Analyse des ersten Elements, das Element, welches wir A von Alpha nennen könnten, wobei die eckige Klammer B von Alpha ist, löse ich auf. Ich schreibe, dass Sinus von vier Alpha gleich Null ist. Übrigens kann ich und/oder schreiben, denn es kann durchaus sein, dass die Faktoren Null sind, aber es muss halt mindestens einer Null sein, also habe ich die erste Null. Die zweite Null ergäbe, dass Kosinus von drei Alpha gleich Sinus von Alpha ist. Analysieren wir beide Fälle unabhängig voneinander. Für Sinus vier Alpha gleich Null kann ich schreiben,d ass vier Alpha gleich Null modulo pi ist. Man muss vielleicht den trigonometrischen Kreis betrachten. Sinus Null bedeutet, dass Sie auf dem trigonometrischen Kreis einen Punkt finden, dessen Koordinant Null wert ist, und das ist der Fall für Null, pi, zwei pi, drei pi, etc., minus pi, minus zwei pi, also muss der Winkel vier Alpha Null modulo pi sein. Das ist, als würde man sagen, dass Alpha von der Art Null sein muss plus k mal pi/4, da ich durch vier geteilt habe. Also bleibt Alpha ist gleich einfach einem vielfachen Ganzen, positiv oder negativ, von pi/4. So, das wäre es für die erste Möglichkeit.

Notes

Summary

21m 57s

Exemple 6 : solution (suite)

Résolution de $\sin 4\alpha \cdot [\cos 3\alpha - \sin\alpha] = 0$

Il faut
- $\sin 4\alpha = 0$
  $4\alpha = 0 \bmod \pi$
  $\alpha = 0 + k\frac{\pi}{4}$
  $\alpha = k\frac{\pi}{4}$
  $(k \in \mathbb{Z})$

et/ou
- $\cos 3\alpha = \sin\alpha$
  $\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Donc
- 1ère famille de solutions
  $3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$
  c.à.d $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$
- seconde famille de solutions

Analysieren wir die andere Möglichkeit. Da habe ich eine Gleichung, die Kosinus und Sinus verwendet. Das mag ich nicht so sehr, ich ziehe es vor, lediglich eine trigonometrische Funktion zu haben. Ich erinnere Sie daran, dass man Kosinus durch Sinus ausdrücken kann, oder Sinus durch Kosinus, also werde ich eine solche Relation anwenden und schreiben, dass in gleicher Art und Weise ich sagen kann, dass Kosinus von drei Alpha gleich... und ich ersetze Sinus Alpha durch Kosinus pi/2 minus Alpha. Also habe ich eine erste Lösungsfamilie. Die erste Familie bedeutet lediglich, dass der Winkel drei Alpha und der Winkel pi/2 Alpha gleich modulo 2 pi ist. Also diese Relation löst sich gegenüber Alpha auf. Man sieht also sehr gut, dass wenn ich dieses Alpha nehme, ich auf der anderen Seite vier Alpha gleich irgendetwas haben werde. Ich teile durch vier, was bleibt? Es bleibt für Alpha pi/8 plus, und k mal, erneut geteilt durch vier, also pi/2 mit k in Z. Ich habe auch eine zweite Lösungsfamilie. Also diesmal sind der Winkel drei Alpha und der Winkel pi/2 minus Alpha nicht gleich, aber sie werden ein unterschiedliches Vorzeichen modulo zwei pi haben. Also schreibe ich diesmal, dass drei Alpha gleich...

Notes

Summary

23m 37s

Exemple 6 : solution (suite)

Résolution de $\sin 4\alpha \cdot [\cos 3\alpha - \sin\alpha] = 0$

Il faut

$\sin 4\alpha = 0$

$4\alpha = 0 \bmod \pi$

$\alpha = 0 + k\frac{\pi}{4}$

$\alpha = k\frac{\pi}{4}$

$(k \in \mathbb{Z})$

et/ou $\cos 3\alpha = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Donc

- 1ère famille de solutions

  $3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$

  c.à.d $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

- seconde famille de solutions

  $3\alpha = -\frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi$

  c.à.d

  $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Somit nehme ich minus pi/2 plus Alpha modulo zwei pi, also plus k mal zwei pi. Da kann ich wieder diese Lösung gegenüber Alpha auflösen, das heißt, dass das Alpha von der anderen Seite zwei Alpha ergibt. Ich teile durch zwei, bleibt Alpha gleich. Also nach dem Teilen durch zwei, hier ein minus pi/4 plus k mal pi, mit k in Z. Ich werde diese Situation jetzt zusammenfassen. Also, ich habe hier eine Möglichkeit für Alpha. Hier habe ich noch zwei andere Möglichkeiten für Alpha.

Notes

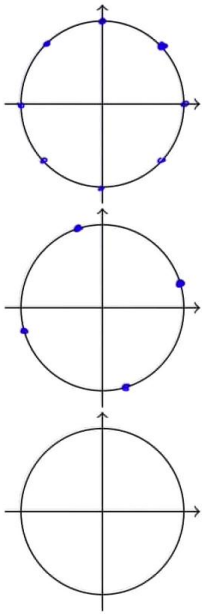
Summary

25m 13s

Exemple 6 : solution (suite et fin)

Résumons :

- $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$



Also fassen wir die Situation zusammen. Wir haben zuerst Alpha gleich k mal pi/4 gefunden, wo k ein Ganzes, positiv oder negativ, ist. Versuchen wir, diese Werte auf dem trigonometrischen Kreis zu situieren. Also erhalte ich hier irgendwo einen Wert von pi/4, das sind 45 Grad. Dann zwei mal, drei mal, etc. Also wenn ich zwei mal pi/4 nehme, bin ich hier. Tatsächlich entspricht jeder Punkt hier, jede Position entspricht einem möglichen Wert von Alpha. Man kann also sagen, dass das hier pi/4 ist, oder aber pi/4 plus zwei pi oder minus zwei pi etc., das da sind die möglichen Werte für Alpha. Dann hatten wir für Alpha pi/8 plus k mal pi/2 gefunden. Pi/8, wo könnte ich pi/8 situieren? Ich habe hier also pi/4, davon habe ich die Hälfte, die hier wäre. Und dann muss man die Vielfachen von pi/2 hinzufügen oder abziehen, das heißt Viertelkreise. Also bin ich dann in dieser Situation da, da, da, und dann in diesen Punkten mit den entsprechenden Werten der Winkeldifferenz von Alpha. Da ist k auch in Z. Dritte Möglichkeit, wir hatten k gleich minus pi/4 plus k mal pi gefunden. Also minus pi/4, da bin ich dann hier, plus pi, da, und dann bin ich hier, da und da.

Notes

Summary

25m 48s

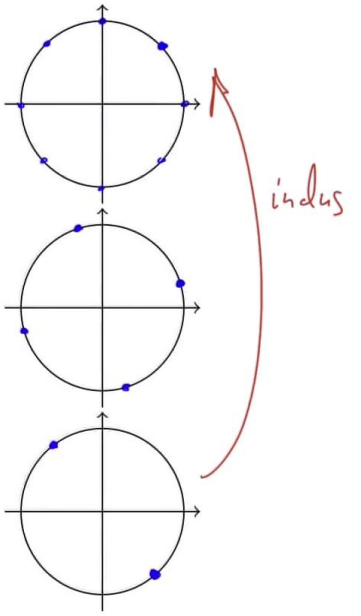
Exemple 6 : solution (suite et fin)

Résumons :

- $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Donc

$$S = \left\{ k \cdot \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Wenn man diese Figuren vergleicht, stellt man fest, dass die letzten Lösungen eigentlich, hier, in den ersten enthalten sind. Man muss sich also nur die beiden ersten Möglichkeiten merken, und dann kann ich die Gesamtheit meiner Lösungen schreiben, die Gesamtheit der Lösungen S ist gegeben durch: einmal die Vielfachen k mal pi/4, mit k in Z, und dann, eine zweite Familie, die pi/8 plus k mal pi/2, mit k als einem Element von Z. So, das ist die Lösung dieser Übung.

Notes

Summary

27m 37s

Les formules trigonométriques

Un grand merci d'avoir suivi ce quatrième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Jetzt sind wir am Ende dieses Kapitels angekommen. Ich danke Ihnen für die Aufmerksamkeit, die Sie diesem Kurs entgegenbringen. Ich bedanke mich dafür, dass Sie mir folgen. Ich beglückwünsche Sie für Ihre Disziplin und Ihre Ausdauer in diesem Thema. Gleichzeitig bedanke ich mich bei meinen Mitarbeitern, die regelmäßig dieses Projekt unterstützen. Danke, Guido Burmeister. Danke, Roger Sauser. Danke, Olivier Woringer. Bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

28m 22s