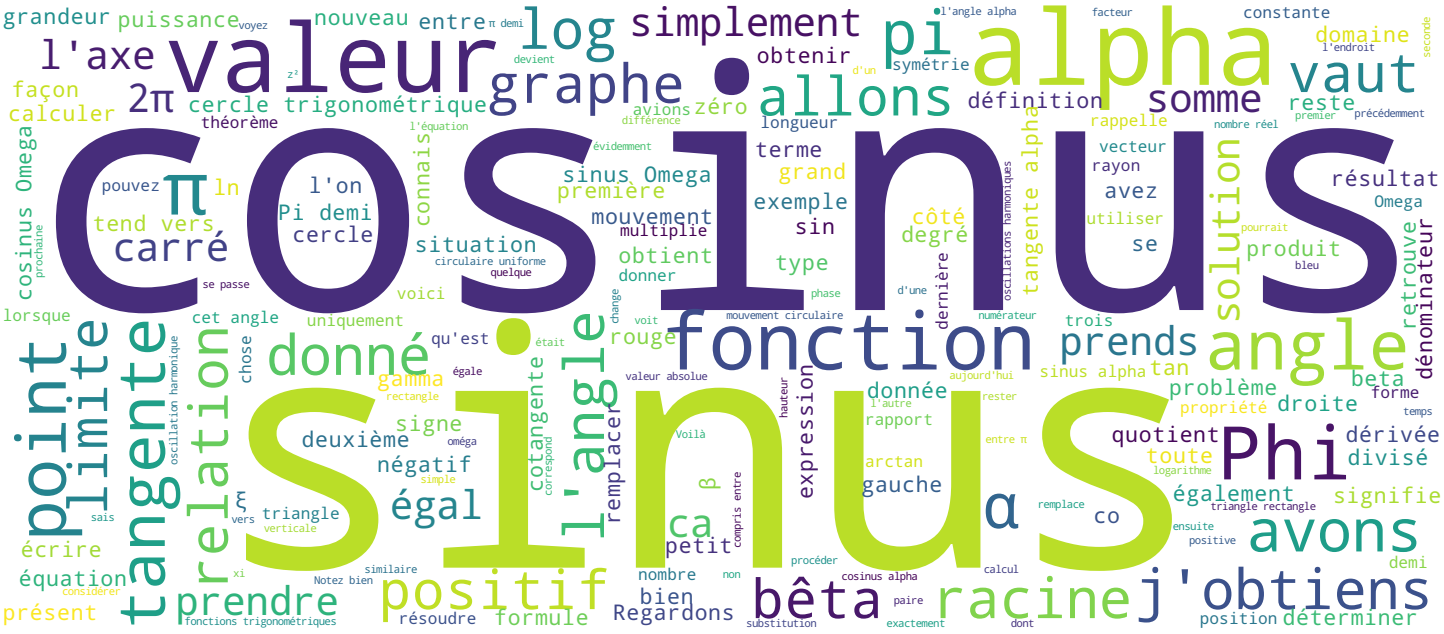
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Oscillations harmoniques

5.1 Définition de l'oscillation harmonique

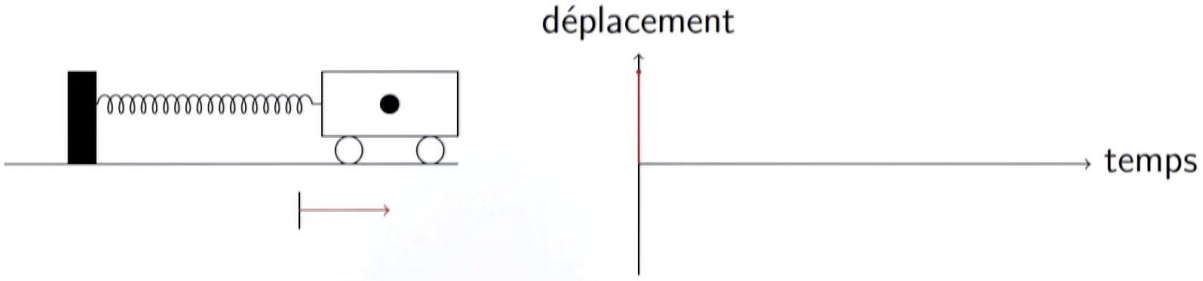
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Introduction : oscillations harmoniques

Dans la description de phénomènes périodiques, on utilise une classe de fonctions comme éléments fondamentaux : la classe des fonctions harmoniques.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour. Je vous souhaite la bienvenue au cours : Fonctions trigonométriques logarithmiques et exponentielles, au chapitre Cinq, dédié aux oscillations harmoniques. Dans la description de phénomènes physiques qui sont périodiques, on utilise une classe de fonction comme éléments fondamentaux pour décrire de tels mouvements : c'est la classe des fonctions qu'on appelle harmoniques qui décrivent des oscillations dites harmoniques. Vous avez ici une situation que je dirais standard : ce mur vertical, ce ressort qui retient un wagon. Ici, on aurait la position d'équilibre, ici nous mesurons le déplacement. Donc le petit charriot a été déplacé vers la droite, le ressort est tendu et lorsqu'on qu'on lâche ce petit wagonnet, on peut enregistrer son mouvement : ici la longueur rouge est enregistrée.

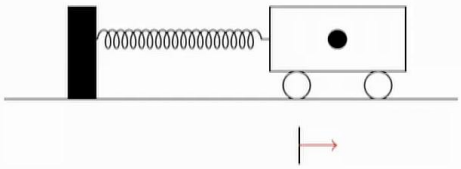
Notes

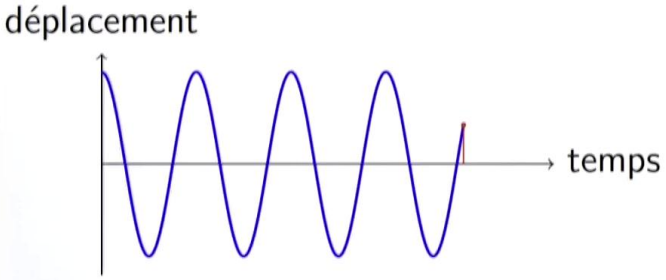
Summary

0m 03s

Introduction : oscillations harmoniques

Dans la description de phénomènes périodiques, on utilise une classe de fonctions comme éléments fondamentaux : la classe des fonctions harmoniques.





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On observe ce mouvement d'aller-et-retour vers la gauche, vers la droite, etc... et on a ici un graphe qui décrit ce mouvement. Lorsqu'on décrit de tels phénomènes, on utilise souvent ce qu'on appelle des fonctions harmoniques.

Notes

Summary

0m 56s

Définition : oscillations harmoniques

Définition

On appelle oscillation harmonique une fonction du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) := A \sin(\omega t + \varphi),$$

ou du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) := A \cos(\omega t + \varphi),$$

avec $A > 0$.

- La constante A s'appelle l'amplitude de l'oscillation,
- la constante φ est la phase de l'oscillation.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On va appeler oscillation harmonique une fonction du type comme celle-ci ou celle-là. Alors regardons de plus près : c'est une fonction qui, à tout nombre réel t associe un nombre réel r de t qui est calculé selon la loi A fois sinus (Omega t plus Phi). On peut aussi remplacer le sinus par cosinus et alors on a A fois cosinus (Omega t plus Phi). Usuellement, on essaye d'avoir une constante A qui est positive. Cette constante positive on va l'appeler l'amplitude de l'oscillation et la grandeur/constante Phi derrière, on l'appelle la phase de l'oscillation.

Notes

Summary

1m 17s

Remarque 1

Une expression de la forme $B \sin(\omega t + \varphi)$, avec $B < 0$,

peut s'écrire $|B| \sin(\omega t + \varphi + \pi)$.

Remarquons, cependant, qu'on peut considérer une expression du type B fois sinus (Omega t + Phi) avec un B négatif. Ce qu'il faut faire, c'est remplacer alors le B par valeur absolue de B; il me manque alors un signe moins que je peux inclure dans le sinus en rajoutant ici Pi. Donc une expression avec un B négatif revient à une expression similaire avec un B positif (la valeur absolue de B) mais c'est la phase qui change.

Notes

Summary

2m 02s

Remarque 1

Une expression de la forme $B \sin(\omega t + \varphi)$, avec $B < 0$,

peut s'écrire $|B| \sin(\omega t + \varphi + \pi)$.

On en déduit donc que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto B \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad B < 0,$$

est également une oscillation harmonique d'amplitude $|B|$ et de phase $\varphi + \pi$.

De même, la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto B \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad B < 0,$$

est une oscillation harmonique d'amplitude $|B|$ et de phase $\varphi + \pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc je peux dire que si j'ai une fonction du type B fois sinus (Omega t plus Phi) avec un B négatif, c'est également une oscillation harmonique d'amplitude, cette fois-ci valeur absolue de B et la phase, ce n'est pas Phi mais c'est Phi plus Pi. On peut procéder tout à fait de façon similaire avec le cosinus. Donc si j'ai un B fois cosinus (Omega t plus Phi) avec un B négatif, alors on peut dire que l'amplitude c'est valeur absolue de B et la phase est simplement Phi plus Pi. Notez bien que si je prends B égal à zéro, on pourrait dire qu'on a une oscillation harmonique dégénérée : c'est simplement f de t est toujours égal à zéro. C'est un cas qu'on pourrait qualifier de dégénéré, de limite.

Notes

Summary

2m 34s

Remarque 2

Une expression de la forme

$$A \sin(\omega t + \varphi)$$

peut s'écrire

$$A \cos(\omega t + \varphi - \tfrac{\pi}{2}) .$$

De même, on a

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi + \tfrac{\pi}{2}) , \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Autre remarque : si vous considérez cette expression A fois sinus (Omega t plus Phi) on peut toujours remplacer le sinus par un cosinus. Il faut changer l'angle, remplacer Omega t plus Phi par l'angle complémentaire donc Pi demi moins sur Omega t plus Phi. Si vous êtes attentif, en fait, ici, ce n'est pas Pi demi moins cette somme Omega plus Phi mais c'est Omega t plus Phi moins Pi demi. Alors on peut l'écrire de cette façon parce que le cosinus est pair. On peut également aller dans l'autre sens, on peut écrire une expression du type A fois cosinus (Omega t plus Phi); on peut remplacer ce cosinus par le sinus. Si vous observez cette transformation ci-dessus, vous voyez que, cette fois-ci, si je remplace le cosinus par sinus, je dois simplement ajouter à la phase Pi demi.

Notes

Summary

3m 25s

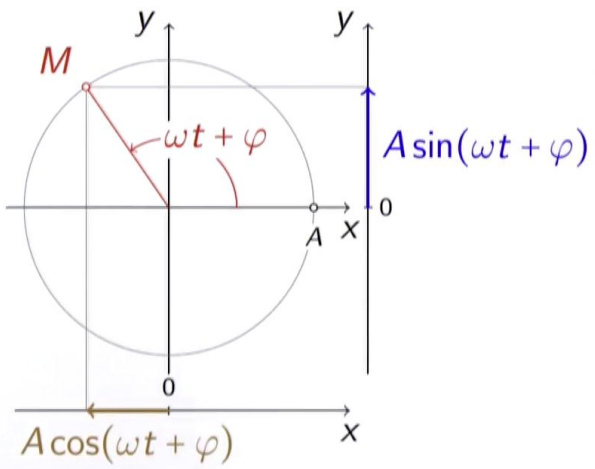
Projection sur les axes

Si on observe ce mouvement circulaire uniforme par projection orthogonale du point M sur l'axe des y, on obtient un mouvement de la forme

$$t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

La projection orthogonale du point M sur l'axe des x est décrit par

$$t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pourquoi ces oscillations harmoniques, ces fonctions, apparaissent souvent de façon, je dirais, naturelle? On va considérer la situation suivante, on va prendre un point M qui va bouger selon un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon A majuscule. C'est la situation que j'ai décrite ici. Alors, l'angle au centre ici en rouge : alpha va être donné parce que le mouvement est circulaire uniforme -ça, nous l'avons traité- cela va être du type une constante fois temps, plus une constante Omega t plus Phi. Omega, c'est ce que nous avions appelé la vitesse angulaire qui est exprimée en radians par unité de temps et Phi correspond à l'angle lorsque t vaut zéro. On va observer ce mouvement, non pas depuis en haut comme nous le faisons maintenant sur l'écran; nous allons observer uniquement la projection du mouvement de M -M bouge ici-, sur l'axe des y, vertical que nous avons écrit ici une deuxième fois pour avoir un peu plus de visibilité sur le graphisme. Si j'observe uniquement la grandeur verticale de ce point M, on obtient bel et bien A fois le sinus de l'angle, c'est-à-dire qu'on obtient A fois sinus (Omega t plus Phi). On peut également observer ce mouvement uniquement par sa projection sur l'axe des x à l'horizontale.

Notes

Summary

4m 15s

Projection sur les axes

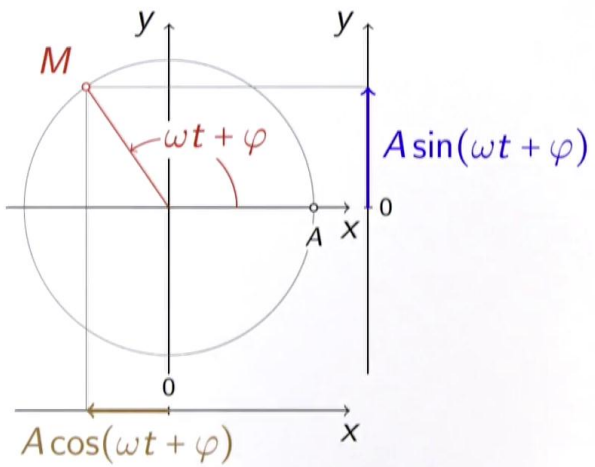
Si on observe ce mouvement circulaire uniforme par projection orthogonale du point M sur l'axe des y, on obtient un mouvement de la forme

$$t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

La projection orthogonale du point M sur l'axe des x est décrit par

$$t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dans les deux cas, le mouvement est décrit par une oscillation harmonique.



Dans ce cas, ce que l'on va observer, c'est A fois le cosinus de cet angle Omega t plus Phi. Dans les deux cas des deux observations de ce mouvement circulaire uniforme, j'obtiens une oscillation harmonique, une fois A fois sinus (Omega t plus Phi) en bleu, et une fois A fois cosinus (omega t plus Phi) [en rouge].

Notes

Summary

5m 52s

Proposition : oscillations harmoniques

Proposition

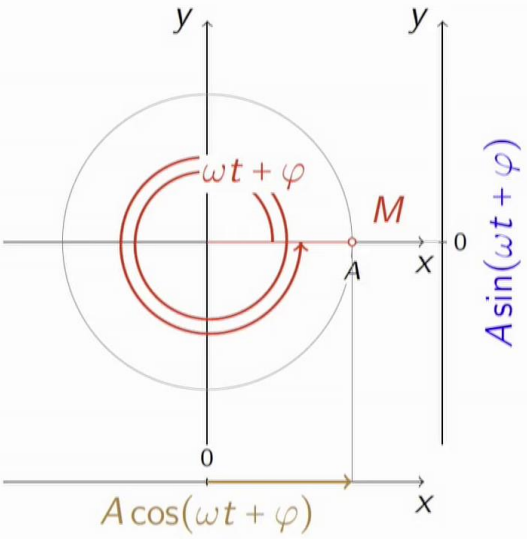
Si un point M suit un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon A,

1. *le mouvement de la projection orthogonale de M sur l'axe des y est alors décrit par l'oscillation harmonique*

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi),$$

2. *le mouvement de la projection orthogonale de M sur l'axe des x est décrit par l'oscillation harmonique*

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Formulons ce résultat central dans une proposition : on va donc admettre qu'un point M suit un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon A. Là, le cercle de rayon A; là, le point M qui va tourner avec un mouvement circulaire uniforme. Le mouvement de la projection orthogonale de M sur l'axe des y est alors décrit par une oscillation harmonique du type A fois sinus (Omega t plus Phi), c'est ce que nous avons ici. Si on suit ce mouvement par projection orthogonale de M sur l'axe des x, on va obtenir A fois cosinus (Omega t plus Phi). Là, vous avez le mouvement et vous avez la variation de ces grandeurs A fois sinus (Omega t) et A fois cosinus (Omega t plus Phi) qui correspondent à l'observation faite selon la projection sur l'axe des y respectivement sur l'axe des x.

Notes

Summary

6m 18s

Remarque 2 bis

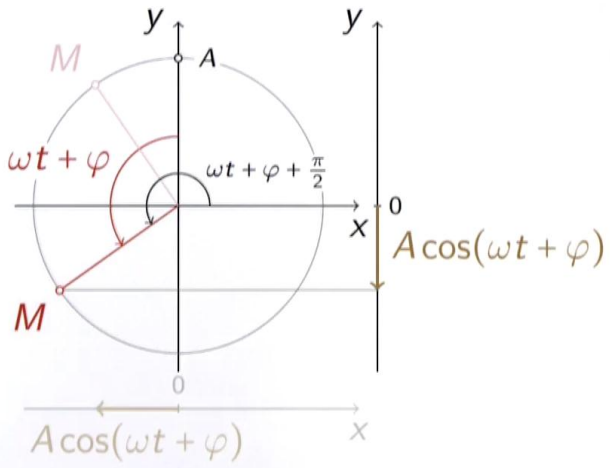
L'oscillation harmonique

$$t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi), \quad (t \in \mathbb{R})$$

décrit le mouvement de la projection du point M sur l'axe des x.

Si on veut visualiser ce mouvement sur l'axe vertical, il suffit d'utiliser la remarque 2 précédente :

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi + \tfrac{\pi}{2}).$$



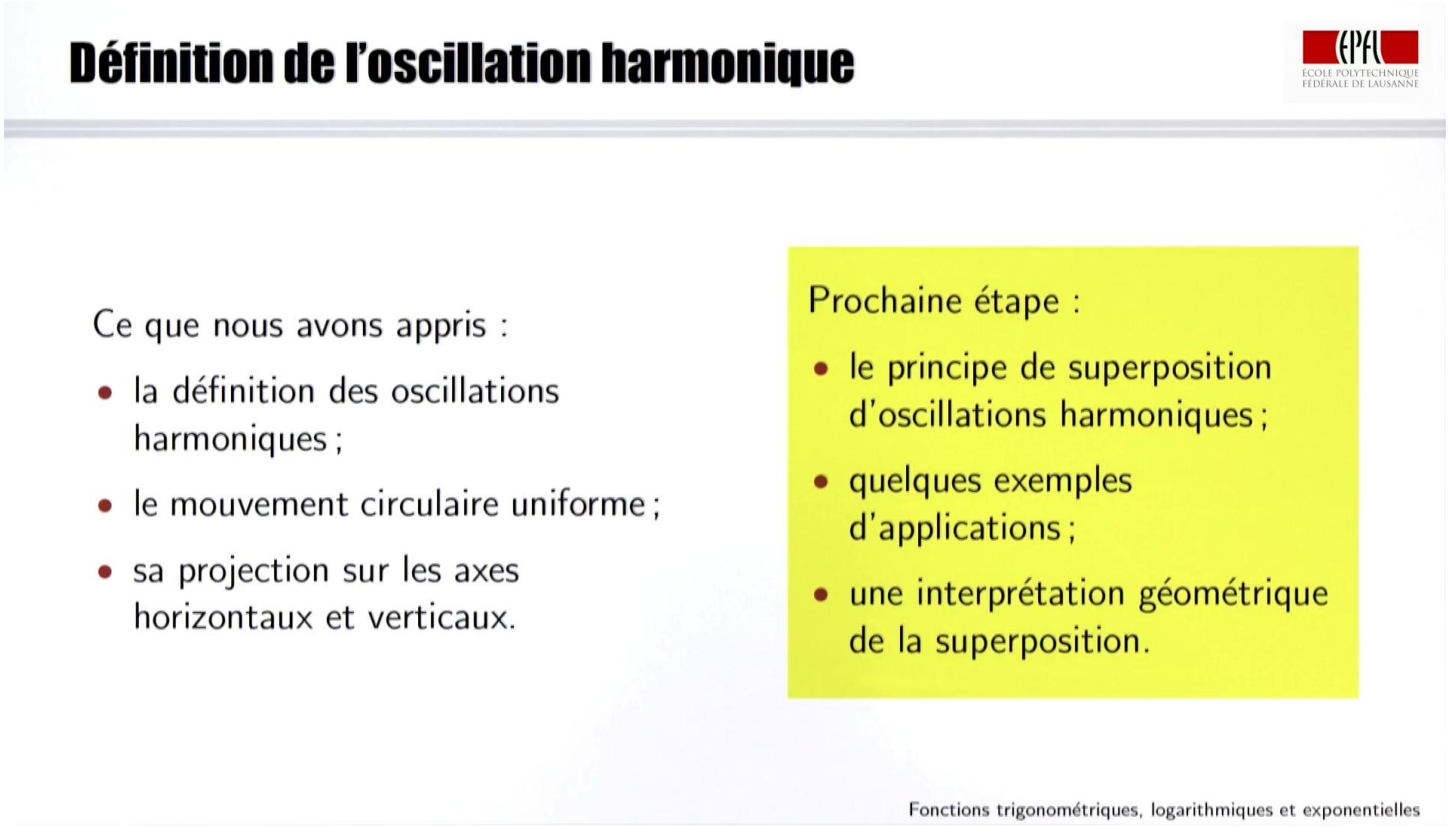
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Terminons par une petite remarque : ici, j'ai figé en quelque sorte ce mouvement, du point M sur ce cercle de rayon A majuscule et j'ai figé l'observation sur l'axe des x, ici. J'observe donc la grandeur A fois cosinus (Omega t plus Phi). On peut également visualiser cette grandeur sur l'axe vertical : il faut se rappeler que A fois cosinus (Omega t plus Phi) est donné par A fois sinus (Omega t plus Phi plus Pi demi). On en avait parlé au début. Cela signifie que je dois remplacer l'angle Omega t plus Phi par un angle Omega t plus Phi plus Pi demi, qui est ici en noir. On peut revenir à la situation d'avant : là on a Omega t plus Phi, cet angle doit être augmenté de Pi demi. J'ai là l'angle augmenté de Pi demi : cela signifie que Omega t plus Phi, je ne mesure non pas depuis l'axe des x mais depuis l'axe des y, ce qui fait qu'en tout il est majoré de Pi demi. Si maintenant j'observe sur la verticale le sinus Omega t plus Phi plus Pi demi qui correspond bien à A fois cosinus (Omega t plus Phi). Donc, avec cette astuce, on peut également visualiser le cosinus par une observation sur un axe vertical.

Notes

Summary

7m 17s



Qu'avons-nous appris aujourd'hui ? Je vous ai donné la définition des oscillations harmoniques, on a regardé le mouvement circulaire uniforme et nous avons constaté que si on projette un tel mouvement sur les axes x et y, on obtient effectivement des oscillations harmoniques du type A fois cosinus (Omega t plus Phi) respectivement A fois sinus (Omega t plus Phi). La prochaine fois, nous allons parler de la superposition d'oscillations harmoniques. Nous allons superposer de tels mouvements. On va donner quelques exemples d'application et on va terminer avec une interprétation géométrique de la superposition, sur une position autour du cercle trigonométrique. A la prochaine, merci.

Notes

Summary

8m 41s