ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Oscillations harmoniques

5.1 Définition de l'oscillation harmonique

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

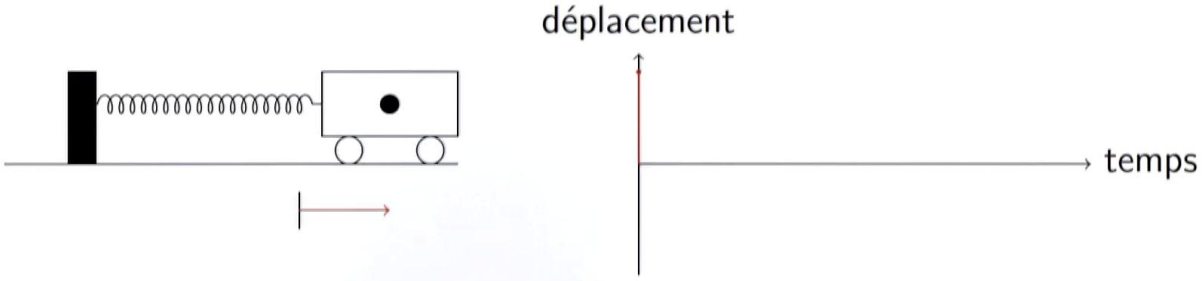
Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Introduction : oscillations harmoniques

Dans la description de phénomènes périodiques, on utilise une classe de fonctions comme éléments fondamentaux : la classe des fonctions harmoniques.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Guten Tag, ich heiße Sie herzlich willkommen zu unserem Kurs: Trigonometrische Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen, im fünften Kapitel zu den harmonischen Schwingungen. In der Beschreibung physikalischer, periodischer Phänomene benutzt man eine Art von Funktionen als fundamentales Element der Beschreibung dieser Bewegungen: Diese werden harmonische Funktion genannt und beschreiben harmonische Schwingungen. Hier sehen Sie eine Standardkonstellation: Diese vertikale Wand und diese Feder, die einen Wagen hält. Hier haben wir ein Gleichgewicht und dort messen wir die Bewegung. Der kleine Wagen ist in die rechte Richtung gestellt worden, die Feder ist gespannt und sobald wir den kleinen Wagen loslassen, können wir seine Bewegung aufzeichnen: die Länge wird hier in Rot dargestellt.

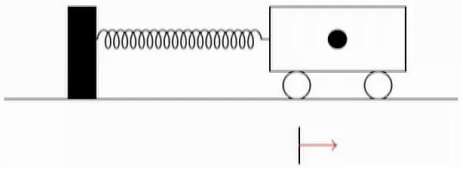
Notes

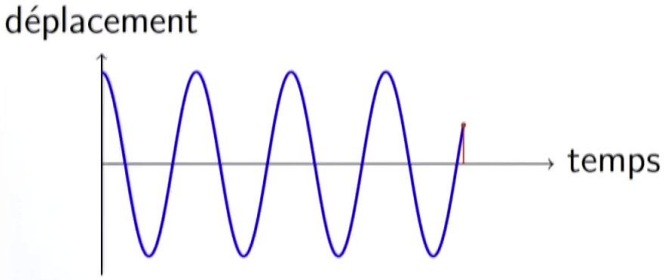
Summary

0m 03s

Introduction : oscillations harmoniques

Dans la description de phénomènes périodiques, on utilise une classe de fonctions comme éléments fondamentaux : la classe des fonctions harmoniques.





Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir beobachten diese Hin- und Rückbewegung nach links und nach rechts usw. und hier haben wir einen Graphen, der die Bewegung beschreibt. Wenn man solche Phänomene beschreibt, verwendet man oft die harmonischen Funktionen.

Notes

Summary

0m 56s

Définition : oscillations harmoniques

Définition

On appelle oscillation harmonique une fonction du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) := A \sin(\omega t + \varphi),$$

ou du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) := A \cos(\omega t + \varphi),$$

avec $A > 0$.

- La constante A s'appelle l'amplitude de l'oscillation,
- la constante φ est la phase de l'oscillation.

Wir werden die harmonischen Schwingungen als Funktion zweier Arten erörtern. Sehen wir uns das Ganze genauer an: Es handelt sich hier um eine Funktion, die allen reellen Zahlen t eine reelle Zahl r zuordnet, welche gemäß dem Gesetz A mal Sinus (Omega t plus Phi) berechnet wird. Man kann Sinus auch durch Cosinus ersetzen und erhält die Formel: A mal Cosinus (Omega t plus Phi). Für gewöhnlich versuchen wir eine Kostante A zu erhalten, die positiv ist. Diese Konstante bezeichnen wir als Schwingungsamplitude und die Größe bzw. Konstante Phi dahinter heißt Schwingungsphase.

Notes

Summary

1m 17s

Remarque 1

Une expression de la forme $B \sin(\omega t + \varphi)$, avec $B < 0$,

peut s'écrire $|B| \sin(\omega t + \varphi + \pi)$.

Beachten wir jedoch, dass auch eine Gleichung des Typs B mal Sinus (Omega t + Phi) mit einem Wert B, der negativ ist, in Betracht zu ziehen ist.. Wir müssen also den Wert B durch einen absoluten Wert B ersetzten. mir fehlt also ein Zeichen, das ich in Sinus einfügen kann, indem ich Pi hier hinzufüge. Daraus folgt für einen Term mit B gleich negativ läuft auf einen vergleichbaren Term mit B gleich positiv (dem absoluten Wert von B) hinaus, aber die Phase ändert sich.

Notes

Summary

2m 02s

Remarque 1

Une expression de la forme $B \sin(\omega t + \varphi)$, avec $B < 0$,

peut s'écrire $|B| \sin(\omega t + \varphi + \pi)$.

On en déduit donc que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto B \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad B < 0,$$

est également une oscillation harmonique d'amplitude $|B|$ et de phase $\varphi + \pi$.

De même, la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto B \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad B < 0,$$

est une oscillation harmonique d'amplitude $|B|$ et de phase $\varphi + \pi$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich kann also sagen, wenn ich eine Funktion des Typs B mal Sinus (Omega t plus Phi) mit B gleich negativ habe, ist dies ebenfalls eine harmonische Schwingung mit einer Amplitude, die sich nun aus dem absoluten Wert für B ergibt und einer Phase, die sich nicht aus Phi, sondern aus Phi plus Pi ergibt. Ebenso kann man natürlich für den Cosinus verfahren. Wenn ich also B mal Cosinus (Omega t plus Phi) mit B gleich negativ habe, kann man sagen, dass die Amplitude durch den absoluten Wert B ausgedrückt wird und die Phase einfach Phi plus Pi ist. Beachten Sie, dass ich, wenn ich B gleich Null wähle, sozusagen eine degenerierte harmonische Schwingung habe: f von t ist nämlich immer gleich 0. Das ist ein Fall, den man als unnatürlich, als begrenzt bezeichnen kann.

Notes

Summary

2m 34s

Remarque 2

Une expression de la forme

$$A \sin(\omega t + \varphi)$$

peut s'écrire

$$A \cos(\omega t + \varphi - \tfrac{\pi}{2}) .$$

De même, on a

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi + \tfrac{\pi}{2}) , \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ein anderer Hinweis: Wenn Sie den Term A mal Sinus (Omega t plus Phi) betrachten, kann man Sinus immer durch Cosinus ersetzen. Es gilt natürlich, den Winkel zu ändern und Omega t plus Phi durch den komplementären Winkel zu ersetzen. Daraus folgt Pi Halbe minus Omega t plus Phi. Wenn Sie aufgepasst haben, ist Ihnen natürlich klar, dass dies nicht Pi Halbe minus die Summe von Omega plus Phi ist, sondern Omega t plus Phi minus Pi Halbe. Man kann dies so beschreiben, weil der Kosinus gleich ist. Man kann auch folgenden Term notieren: A mal Cosinus (Omega t plus Phi), bei dem man den Cosinus durch Sinus ersetzt. Wenn Sie die Umformung oben verfolgt haben, dann sehen Sie, wenn Sie dieses Mal den Sinus durch den Kosinus ersetzen, müssen Sie lediglich Pi Halbe der Phase hinzufügen.

Notes

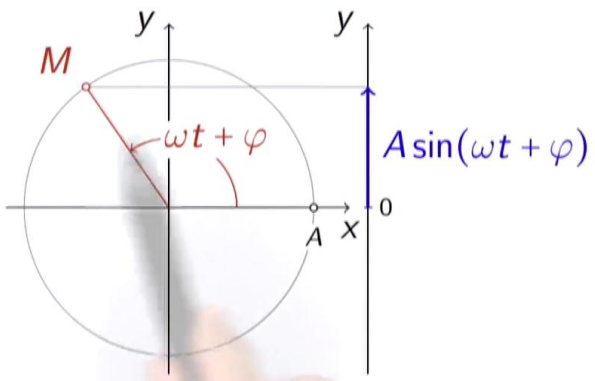
Summary

3m 25s

Projection sur les axes

Si on observe ce mouvement circulaire uniforme par projection orthogonale du point M sur l'axe des y, on obtient un mouvement de la forme

$$t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Warum erschienen uns diese harmonischen Schwingungen und ihre Funktionen oft so natürlich? Betrachten wir folgende Konstellation: wir nehmen einen Punkt M, der sich um einen kreisförmigen, gleichmäßigen Schwung, auf einem Kreis des Radius A bewegt. Das ist die Konstellation, die ich hier dargestellt habe. Also, in der Mitte haben wir hier den Winkel Alpha, in Rot, dieser wird dadurch bestimmt, dass die Bewegung gleichmäßig und kreisförmig ist - das haben wir bereits behandelt. Es ergibt sich daraus eine Konstante mal Zeit plus eine Konstante Omega t plus Phi. Omega ist die Winkelgeschwindigkeit, die in Radiant pro Zeiteinheit ausgedrückt wird. Phi entspricht dem Winkel wenn t gleich Null ist. Diese Bewegung werden wir nicht von oben betrachten, so wie wir es gerade auf dem Bildschirm tun, wir werden ausschließlich die Projektion der Bewegung von M - M bewegt sich - auf der y-Achse, vertikal, betrachten. Diese haben wir hier ein zweites Mal eingezeichnet, um die grafische Gestaltung sichtbarer machen zu können. Betrachte ich nur die vertikale Größe des Punktes M, erhält man tatsächlich A mal den Sinus des Winkels, das heißt, man erhält A mal Sinus (Omega t plus Phi).

Notes

Summary

4m 15s

Projection sur les axes

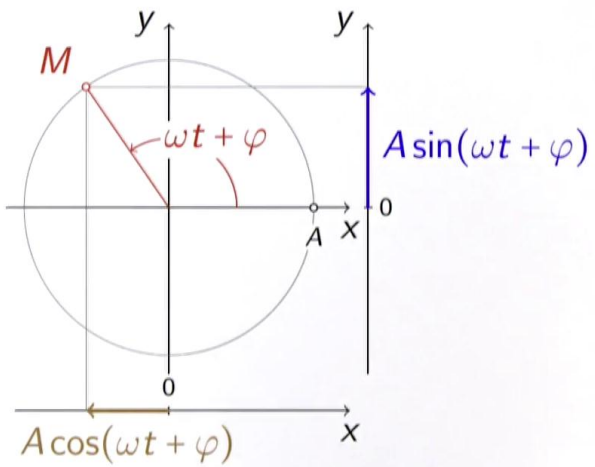
Si on observe ce mouvement circulaire uniforme par projection orthogonale du point M sur l'axe des y, on obtient un mouvement de la forme

$$t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

La projection orthogonale du point M sur l'axe des x est décrit par

$$t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dans les deux cas, le mouvement est décrit par une oscillation harmonique.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Man kann diese Bewertung ebenfalls sehen, indem man sie ausschließlich auf die horizontale x-Achse projiziert. In diesem Fall sieht man, dass A mal Cosinus dieses Winkels Omega t plus Phi ist. In den zwei Fällen der Beobachtungen der kreisförmigen und gleichmäßigen Bewegung, erhält man eine harmonische Schwingung, einmal A mal Sinus (Omega t plus Phi), in Blau, und einmal A mal Cosinus (Omega t plus Phi), in Rot.

Notes

Summary

5m 46s

Proposition : oscillations harmoniques

Proposition

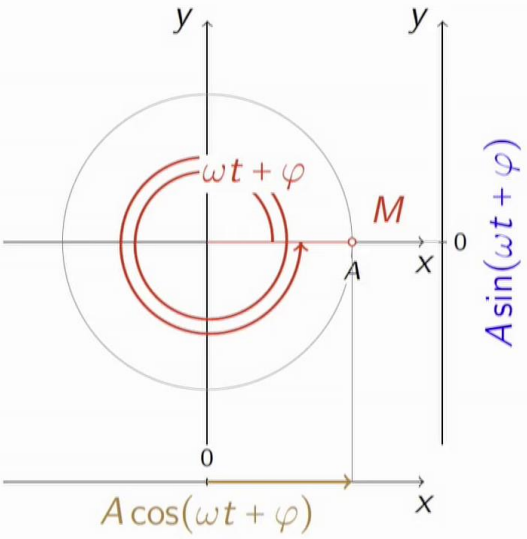
Si un point M suit un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon A,

1. *le mouvement de la projection orthogonale de M sur l'axe des y est alors décrit par l'oscillation harmonique*

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi),$$

2. *le mouvement de la projection orthogonale de M sur l'axe des x est décrit par l'oscillation harmonique*

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi).$$



Lassen Sie uns dieses zentrale Ergebnis in einem Satz formulieren: wir nehmen einen Punkt M an, der einer kreisförmigen, gleichmäßigen Bewegung auf einem Kreis des Radius A folgt. Hier der Kreis des Radius A und dort der Punkt M, der sich mit kreisförmiger und gleichmäßiger Bewegung dreht. Die Bewegung der orthogonalen Projektion von M auf der y-Achse wird durch die harmonische Schwingung A mal Sinus (Omega t plus Phi) beschrieben, das haben wir hier. Verfolgt man diese Bewegung mit orthogonaler Projektion des Punktes M auf der x-Achse, erhält man A mal Cosinus (Omega t plus Phi). Hier haben Sie die Bewegung und Sie haben hier den Wechsel der Größen A mal Sinus (Omega t plu Phi) und A mal Cosinus (Omega t plus Phi), was der jeweiligen Beobachtung bei Projektion auf die y-Achse bzw. bei Projektion auf die x-Achse entspricht.

Notes

Summary

6m 18s

Remarque 2 bis

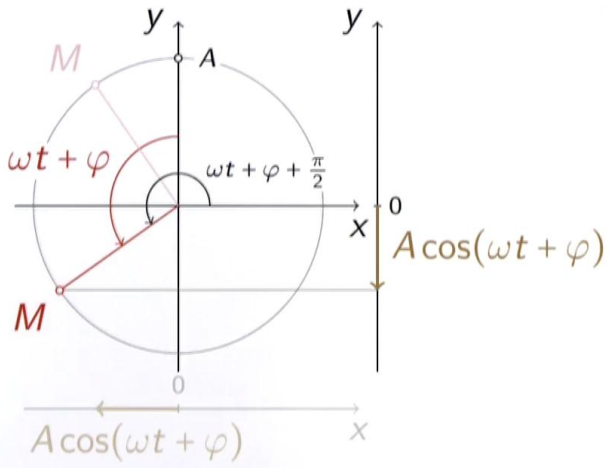
L'oscillation harmonique

$$t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi), \quad (t \in \mathbb{R})$$

décrit le mouvement de la projection du point M sur l'axe des x.

Si on veut visualiser ce mouvement sur l'axe vertical, il suffit d'utiliser la remarque 2 précédente :

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi + \tfrac{\pi}{2}).$$



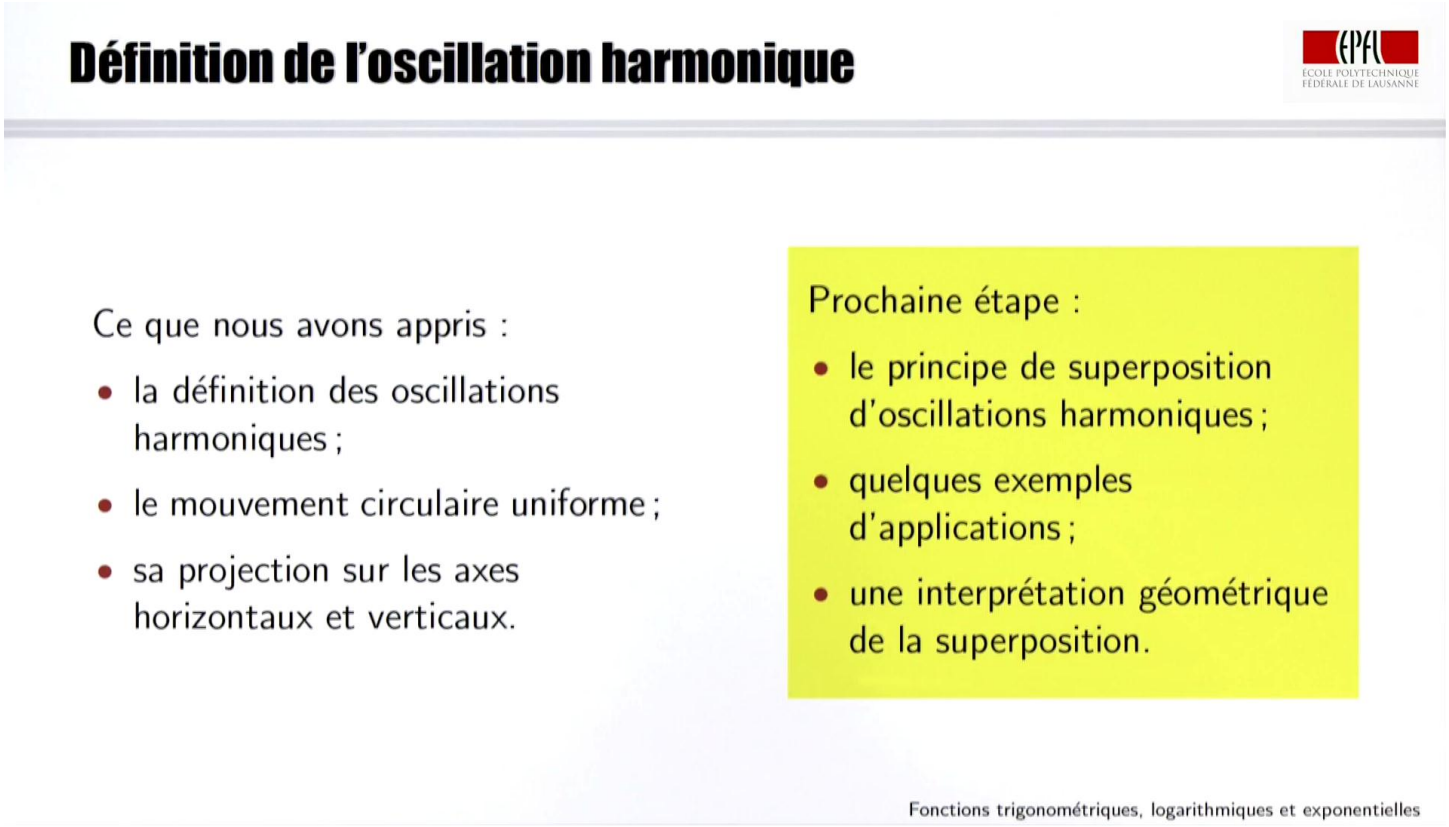
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Schließen wir mit einem kleinen Hinweis ab: Hier habe ich in gewisser Weise die Bewegung des Punktes M auf dem Kreis mit dem Radius A erstarren lassen und ich habe die Beobachtung auf der x-Achse, hier, erstarren lassen. Ich sehe also die Größe A mal Cosinus (Omega t plus Phi). Man kann diese Größe auch auf der vertikalen Achse darstellen: man muss sich klar machen, dass A mal Cosinus (Omega t plus Phi) durch A mal Sinus (Omega t plus Pi Halbe) gegeben ist. Darüber haben wir zu Beginn gesprochen. Das bedeutet, ich muss den Winkel Omega t plus Phi durch den Winkel Omega t plus Phi plus Pi demi ersetzten, der hier in Schwarz eingezeichnet ist. Man kommt also zurück zur Ausgangssituation: Omega t plus Phi, wobei dieser Winkel durch Pi Halbe erhöht werden muss. Ich habe den Winkel hier um Pi Halbe erhöht, das bedeutet dass Omega t plus Phi nunmehr nicht auf der x-Achse, sondern auf der y-Achse gemessen wird und alles um Pi Halbe erhöht wurde. Betrachte ich nun auf der Vertikalen Sinus Omega t plus Phi plus Pi Halbe, was A mal Cosinus (Omega t plus Phi) entspricht. Mit diesem Trick kann man also auch auf der vertikalen Achse den Cosinus darstellen.

Notes

Summary

7m 17s



Was haben wir heute gelernt? Ich habe Ihnen eine Definition der harmonischen Schwingungen gegeben, wir haben die kreisförmige und gleichmäßige Bewegung betrachtet und festgestellt, dass man, wenn man diese Bewegung auf den x- und y-Achsen darstellt, in der Tat harmonische Schwingungen erhält, die mit A mal Cosinus (Omega t plus Phi) bzw. A mal Sinus (Omega t plus Phi) bestimmt werden. Das nächste Mal werden wir über die Überlagerung harmonischer Schwingungen sprechen. Wir werden solche Bewegungen aufeinander legen und ich werde Ihnen einige Anwendungsbeispiele zeigen. Abschließen werden wir mit einer geometrischen Interpretation der Überlagerung rund um den Einheitskreis. Vielen Dank und bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

8m 41s