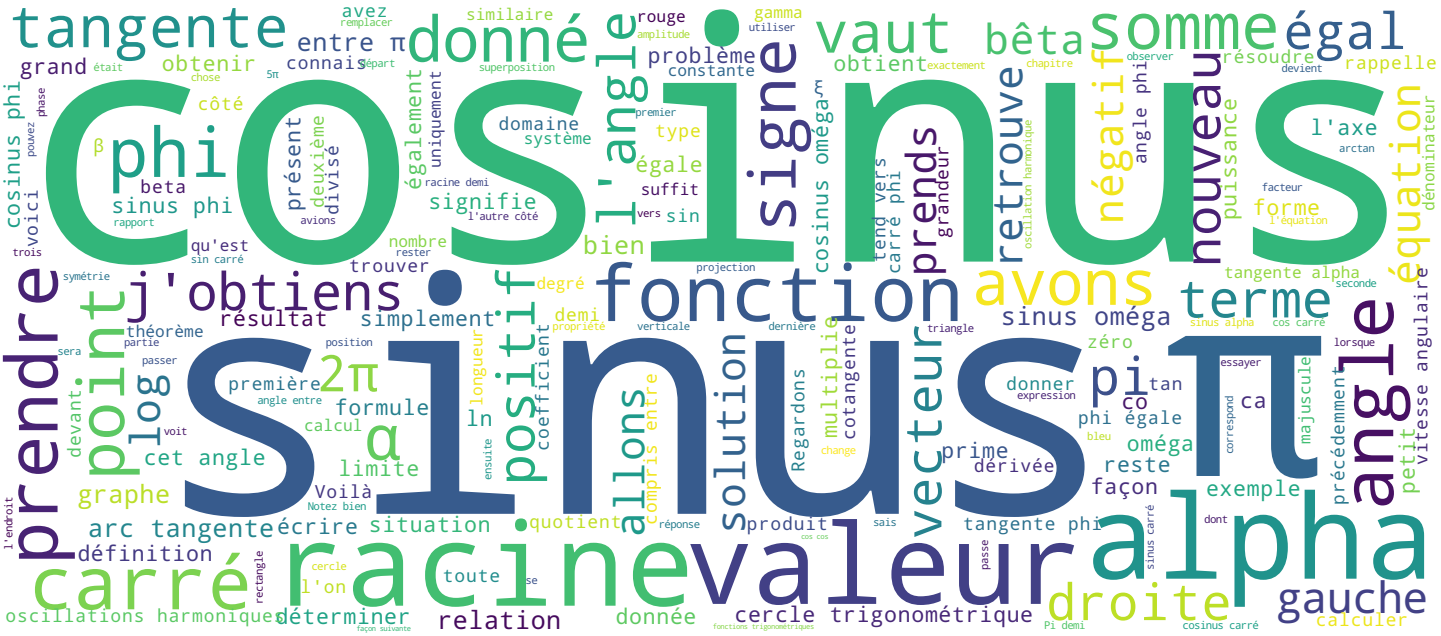
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Oscillations harmoniques

5.2 La superposition d'oscillations harmoniques

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Le principe de superposition

Soient f et g deux oscillations harmoniques de même vitesse angulaire ω :

$$f(t) := A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) := B \cos \omega t, \qquad A, B \neq 0.$$

Nous allons montrer que la somme

$$(f+g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto (f+g)(t) := A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

est également une oscillation harmonique de même vitesse angulaire ω.

Bonjour. La dernière fois, j'ai introduit la notion d'oscillation harmonique donc de fonctions qui étaient d'un type très particulier, à savoir une constante A qui multiplie un sinus ou un cosinus d'un angle qui était donné par une expression du type oméga t +phi. Oméga t + phi qui était un angle qui décrivait un mouvement circulaire. Aujourd'hui, je vais m'intéresser à la superposition de telles oscillations harmoniques. Nous allons prendre deux oscillations harmoniques. Ce qui est important ici est de voir immédiatement que les deux oscillations harmoniques ici la première : A fois sinus oméga t et ici B fois cosinus oméga t. Les deux oscillations ont une même vitesse angulaire oméga. On va aussi admettre que les amplitudes A et B ne sont pas nulles. Si l'une ou l'autre était nulle, la superposition deviendrait triviale parce que qu'entend-on par superposition ? Par superposition, on entend simplement le fait que l'on considère la fonction f + g, c'est-à-dire une fonction qui à tout t va simplement faire correspondre la valeur obtenue en additionnant A fois sinus oméga t c'est le f de t et B fois cosinus oméga t, ce qui est le g de t. Nous allons montrer que cette combinaison, cette somme est également une oscillation harmonique avec une même vitesse angulaire oméga mais avec une amplitude et une phase qu'il nous faudra déterminer.

Notes

Summary

0m 04s

Problème

Les deux oscillations harmoniques

$$f(t) = A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) = B \cos \omega t$$

étant données, on cherche à déterminer une amplitude $C \geq 0$ et une phase $\varphi \in]-\pi, \pi]$ telles que

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin (\omega t + \varphi) .$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Le problème est donc le suivant : Étant donné les deux oscillations harmoniques. A fois sinus oméga t respectivement B fois cosinus oméga t on cherche à déterminer l'amplitude C. On va essayer de la déterminer positive. On va déterminer une phase. On essaiera de prendre cette phase entre -π et +π avec -π non admis et π admis et on essaiera alors d'écrire la somme. A fois sinus oméga t plus B fois cosinus oméga t comme une amplitude C et on va prendre un sinus sous la forme oméga t plus phi. On a à nouveau la même vitesse angulaire mais on a un déphasage. Notez bien que si j'augmente cet angle phi d'un multiple de π l'expression ne changerait pas. Donc, il est tout à fait naturel de dire OK, essayons de trouver une phase qui est simplement comprise entre -π et π.

Notes

Summary

1m 43s

Résolution

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin (\omega t + \varphi) .$$

On développe $\sin (\omega t + \varphi)$ à l'aide des formules d'addition :

$$\begin{aligned} A \sin \omega t + B \cos \omega t &= C \sin \omega t \cdot \cos \varphi + C \cos \omega t \cdot \sin \varphi \\ &= C \cos \varphi \cdot \sin \omega t + C \sin \varphi \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

Voici le problème que nous voulons résoudre. Nous voulons rechercher C et phi si A, oméga et B sont donnés. Le calcul que je vais faire, le développement que je vais faire, il faut le retenir. Dans les calculs concrets, on utilisera toujours ce processus que je démontre ici que j'expose ici sous une forme tout à fait littérale avec des coefficients A, B, oméga qui sont des lettres et pas des nombres. L'astuce, c'est d'attaquer ici cette somme : Sinus oméga t plus phi et de développer ce sinus par une formule d'addition, la formule d'addition pour le sinus. Alors si on le fait, on obtient le résultat que voici : Le sinus, ici, j'ai une somme d'angles donc cela va me faire le sinus du premier angle fois le cosinus du deuxième angle et le cosinus du premier fois le sinus du deuxième le C étant une constante qui multiplie cette somme. Donc je peux écrire ce C devant chaque terme. Une fois arrivé ici, il faut comparer ce que nous avons sur la gauche et ce que nous avons sur la droite. Si j'observe, je vois par exemple ici ce sinus oméga t, je le retrouve ici et il serait donc tout à fait naturel d'exiger que C fois cosinus phi, qui est ici en rouge, corresponde à la valeur A majuscule.

Notes

Summary

2m 36s

Résolution

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin (\omega t + \varphi) .$$

On développe $\sin (\omega t + \varphi)$ à l'aide des formules d'addition :

$$\begin{aligned} A \sin \omega t + B \cos \omega t &= C \sin \omega t \cdot \cos \varphi + C \cos \omega t \cdot \sin \varphi \\ &= C \cos \varphi \cdot \sin \omega t + C \sin \varphi \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

Puis en identifiant les coefficients respectifs, on obtient

$$\begin{cases} A = C \cos \varphi \\ B = C \sin \varphi . \end{cases}$$

De façon tout à fait similaire, j'ai ici le cosinus oméga t que je retrouve sur la gauche et le coefficient qui est devant le cosinus c'est C fois sinus phi et il devrait correspondre à B. Si bien que si je veux résoudre mon problème, il suffit de résoudre ce problème : Il suffit de déterminer C majuscule et phi en sorte que C fois Cos phi donne A et C fois sin phi donne B. Notez bien que nous ne cherchons pas à trouver toutes les solutions possibles pour C et phi, nous cherchons uniquement une représentation possible avec un C que nous aimerions avoir positif si bien que C est l'amplitude et avec un phi qui est compris entre -π et +π par commodité.

Notes

Summary

3m 56s

Solution

- Calcul de l'amplitude C, $(C \geq 0)$:

$$\begin{cases} A = C\cos\varphi \\ B = C\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = C^2\cos^2\varphi \\ B^2 = C^2\sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow A^2 + B^2 = C^2$$

$$\Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad C > 0, \quad \text{car} \quad A, B \neq 0.$$

Les calculs que je présente on peut toujours les faire dans des cas concrets. On part depuis ce système qu'on vient de mentionner l'idée est d'élever au carré la première équation donc de dire si j'ai un membre à gauche qui est égal à un membre à droite. Je peux en déduire, ce n'est pas équivalent mais je peux en déduire que le carré à gauche, c'est un carré équivaut au carré à droite c'est C carré cos carré phi. Je procède de façon tout à fait similaire sur la deuxième équation. B égale C fois sin phi. B au carré est égal, et là j'élève au carré ce produit, C carré sin carré phi. Une fois que j'ai ces deux équations je peux additionner les deux termes à gauche les deux termes à droite et je devrais ré-obtenir la même chose. Notons bien bien que si j'additionne sur la gauche j'obtiens A carré plus B carré sur la droite, j'obtiens un C carré que je peux mettre en évidence et qui va multiplier la somme cosinus carré phi plus sin carré de phi qui vaut 1. Donc j'obtiens simplement A carré plus B carré égale C carré. Je peux donc trouver une valeur C en prenant la racine je vais prendre la racine avec le signe positif ici plus la racine A carré plus B carré parce que j'aimerais avoir C positif.

Notes

Summary

4m 39s

Solution

- Calcul de l'amplitude C, $(C \geq 0)$:

$$\begin{cases} A = C\cos\varphi \\ B = C\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = C^2\cos^2\varphi \\ B^2 = C^2\sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow A^2 + B^2 = C^2$$

$$\Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad C > 0, \quad \text{car} \quad A, B \neq 0.$$

- Détermination d'une phase φ :

$$\cos\varphi = \frac{A}{C} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{B}{C} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi = \frac{B}{A}.$$

On en déduit φ à partir de $\tan\varphi = \frac{B}{A}$ et de la position du point $P(\varphi)$ sur le cercle trigonométrique.

Une fois que je connais cette valeur de C, je retourne sur le système de départ qui est ici. Je peux dire que je connais cette valeur de C alors je passe cette valeur de C de l'autre côté. Je vous rappelle que C ne peut pas être nul parce que A et B sont non nuls donc A carré plus B carré est non nul je peux écrire que le cosinus de phi est donné par A sur C des deux côtés et le sinus de phi est donné par B sur C. Personnellement, je préfère écrire ces deux équations sous la forme de tangente. Je prends tangente phi tangente phi, c'est simplement le sinus divisé par le cosinus et cela fait B sur A. Il nous faut déterminer phi depuis cette équation tangente phi égale B sur A. Il y a un petit problème, c'est que la fonction tangente est π périodique et nous cherchons un angle phi sur une plage de longueur 2π entre -π et +π. Donc il faudra ajuster éventuellement des valeurs obtenues et on va se servir alors d'une considération sur la connaissance du cosinus et du sinus. Vous voyez, le cosinus va avoir le même signe que A majuscule le sinus le même signe que B majuscule c'est-à-dire qu'à l'aide des signes de A et de B, je peux indiquer dans quel quadrant se trouve cet angle phi. Et ensuite, j'essaie de résoudre tangente phi égale B sur A et j'essaie de trouver un angle qui est dans le bon quadrant.

Notes

Summary

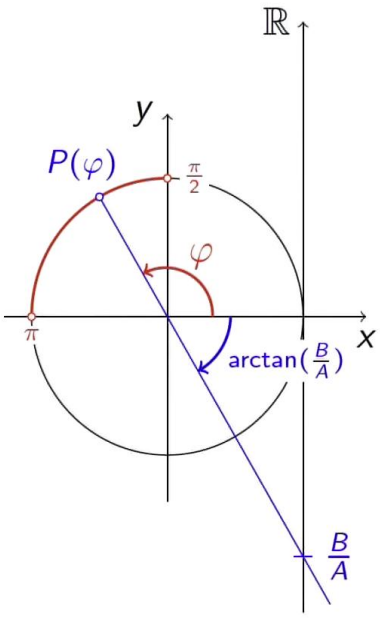
5m 54s

Remarque

On peut toujours choisir la phase φ dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$, en procédant comme suit :

- si $A<0$ et $B>0$, on a $\cos\varphi<0$ et $\sin\varphi>0$: le point $P(\varphi)$ est dans le deuxième quadrant et on pose

$$\varphi := \arctan\left(\frac{B}{A}\right)+\pi,$$



Illustrons ça quelque peu. Si, par exemple, A est positif A est la grandeur qui équivaut au signe du cosinus donc je sais que le cosinus est positif. Sur le cercle trigonométrique, cela signifie que je me trouve sur la partie ici en rouge. Je me trouve entre. -π/2 et π/2. Alors, arc tangente de B sur A B sur A peut être positif ou négatif selon le signe de B. Mais arc tangente va me livrer un angle entre -π/2 et π/2. Donc là, j'obtiens immédiatement le bon résultat. Ici, vous avez la situation si B sur A est négatif. Si B sur A est négatif, cela signifie que A est positif B est négatif je me trouve dans le quatrième quadrant je dois donc trouver un angle entre 0 et -π/2 et arc tangente livre exactement une telle valeur. Regardons une autre situation : A est négatif et B est positif donc le cosinus est négatif et le sinus est positif. Je me trouve donc sur le deuxième quadrant. C'est-à-dire que si mon angle doit être phi, donc si mon angle phi que je recherche doit être entre -π et +π je dois trouver un angle entre π/2 et π. Ici sur ce quart de cercle en rouge. Si je prends maintenant arc tangente de B sur A, B sur A qui va être négatif arc tangente va me livrer un angle entre 0 et -π/2.

Notes

Summary

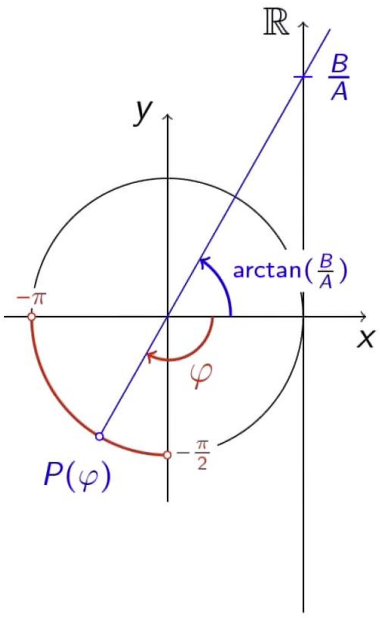
7m 28s

Remarque

On peut toujours choisir la phase φ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, en procédant comme suit :

- si $A < 0$ et $B < 0$, on a $\cos\varphi < 0$ et $\sin\varphi < 0$: le point $P(\varphi)$ est dans le troisième quadrant et on pose

$$\varphi := \arctan\left(\frac{B}{A}\right) - \pi.$$



Si je veux donc obtenir le bon angle je dois corriger cet angle rendu par arc-tangente de +π ce que je fais ici. Finalement si les deux constantes A et B sont négatives, cela signifie que le cosinus est négatif à cause de A le sinus est négatif à cause de B donc je me retrouve ici dans le troisième quadrant. Il me faut donc un angle entre -π et -π/2 cette fois-ci. Arc tangente de B sur A. B sur A est positif. Arc tangente va me livrer un angle entre 0 et π/2 et cette fois-ci je dois corriger cet angle de -π pour être dans le bon quadrant.

Notes

Summary

8m 56s

Trois variantes

Nous venons de voir que la somme des deux oscillations harmoniques

$$f(t) = A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) = B \cos \omega t$$

est aussi une oscillation harmonique de la forme $C \sin(\omega t + \varphi)$.

Mais nous pouvons changer l'expression de cette oscillation en posant :

- $A \sin \omega t + B \cos \omega t := C \sin(\omega t - \varphi)$ ou
- $A \sin \omega t + B \cos \omega t := C \cos(\omega t + \varphi)$ ou
- $A \sin \omega t + B \cos \omega t := C \cos(\omega t - \varphi)$.

Voilà ! Ce que nous venons de faire, c'est que nous avons montré que si on fait la somme de deux oscillations harmoniques de même vitesse angulaire, on obtient à nouveau une oscillation harmonique que nous pourrons écrire sous la forme C fois sinus oméga t plus phi. Nous avons montré comment on peut déterminer l'amplitude C et la phase phi. Cependant, on pourrait non pas choisir C fois sinus oméga t plus phi mais on peut tout à fait choisir C fois sinus oméga t moins phi. On peut aussi remplacer le sinus par un cosinus, donc cosinus oméga t plus phi voire cosinus oméga t moins phi. L'écart se gère de façon tout à fait similaire.

Notes

Summary

9m 34s

Trois variantes

- $A \sin\omega t + B \cos\omega t := C \cos(\omega t + \varphi)$

$$A \sin\omega t + B \cos\omega t = C \cos\varphi \cdot \cos\omega t - C \sin\varphi \cdot \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \qquad A = -C \sin\varphi \qquad \text{et} \qquad B = C \cos\varphi\,,$$

on en déduit

- le quadrant du point $P(\varphi)$,
- l'amplitude $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
- et la phase φ donnée par $\tan\varphi = -\frac{A}{B}$.

A titre d'exemple ici, pour être complet si je prends sinus oméga t moins phi le théorème d'addition me donne ici un signe moins et si je compare ici les coefficients comme précédemment donc, devant sinus oméga t j'ai C fois cosinus phi qui vaut A pour le cosinus oméga t. Alors là, il faut faire un peu attention. J'ai ici un B qui doit valoir, y compris le signe, moins C fois sinus phi. Donc on obtient un système dès le départ qui est un peu différent. On peut de nouveau déterminer le quadrant dans lequel se situe cet angle, on peut calculer C on va obtenir A carré plus B carré en prenant la racine de cette somme. On obtient C. Et la phase est de nouveau donnée par tangente phi qui cette fois-ci sera sous la forme moins B sur A. Il faudra de nouveau corriger ce qui est rendu par arc tangente comme nous l'avons fait précédemment. Si vous prenez un cosinus, voici ce qui arrive : De façon tout à fait similaire vous utilisez le terme d'addition pour le cosinus, c'est cos cos moins sin sin et vous re-comparez les coefficients donc A va être C fois cosinus... Pardon. A va être moins C fois sinus phi. Attention, il faut comparer le sinus oméga t avec sinus oméga t.

Notes

Summary

10m 15s

Trois variantes

- $A \sin\omega t + B \cos\omega t := C \cos(\omega t - \varphi)$

$$A \sin\omega t + B \cos\omega t = C \cos\varphi \cdot \cos\omega t + C \sin\varphi \cdot \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \qquad A = C \sin\varphi \qquad \text{et} \qquad B = C \cos\varphi\,,$$

on en déduit

- le quadrant du point $P(\varphi)$,
- l'amplitude $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
- et la phase φ donnée par $\tan\varphi = \frac{A}{B}$.

Donc, A c'est moins sinus phi et le B, c'est C fois cosinus phi le reste fonctionne de nouveau comme précédemment donc on va déterminer sur la base des signes le quadrant, le C est donné par la même formule de nouveau. Donc vous élevez au carré ces deux équations et vous les additionnez et phi est de nouveau donné par tangente phi égale. Alors, on va simplement prendre le quotient de sinus et de cosinus qui est moins A sur B. Si vous remplacez phi par moins phi, la seule chose qui change est que vous avez ici un signe qui change et dans la comparaison des coefficients B vaut C fois cosinus phi et A vaut C fois sinus phi et le reste découle de nouveau de façon tout à fait similaire.

Notes

Summary

11m 25s

Exemple 1

Exemple

Superposer les deux oscillations harmoniques

$$f(t) := \sqrt{3}\sin t \qquad \text{et} \qquad g(t) := -\cos t\,, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Appliquons ça maintenant à un cas concret, c'est-à-dire un cas où nous avons des valeurs pour A, B et oméga. Nous avons ici un premier exemple on va prendre racine de 3 fois sinus t d'un côté et g de t égale moins cosinus t. Ici, la vitesse angulaire oméga vaut 1. J'ai en fait 1 fois t et 1 fois t ici.

Notes

Summary

12m 10s

Exemple 1 : solution

Ansatz : $\sqrt{3}\sin t - \cos t = C\sin(t-\varphi)$

$= C[\sin t \cdot \cos\varphi - \cos t \cdot \sin\varphi]$

$= C\cdot\cos\varphi\cdot\sin t - C\cdot\sin\varphi\cdot\cos t$

On va prendre ce que l'on appelle un ansatz. Ce qui est donné, c'est racine de 3 sinus t moins cosinus t. Alors j'aimerais écrire cela comme une seule oscillation harmonique avec une certaine amplitude C que j'aimerais avoir positive. Ensuite arrive un choix je peux prendre un sinus un cosinus. Ici, prenons une fois un sinus. L'angle, on prend oméga t plus phi oméga vaut 1 ici donc l'angle va être t. Je ne vais pas prendre plus phi prenons ici moins phi. Je peux prendre aussi plus phi cela est une question simplement d'un choix qu'on fait au début. Voilà. On va travailler avec cet ansatz et on va développer à l'aide du théorème d'addition. J'ai un sinus d'une différence d'angle donc cela va me donner le sinus de t qui multiplie le cosinus de phi moins, parce que j'ai ici un moins et j'ai le cosinus de t qui multiplie le sinus de phi. Je vais arranger un peu ces termes je vais écrire que j'ai C fois je vais prendre le cosinus phi devant qui multiplie sinus t j'ai un signe moins j'ai C fois j'ai le sinus de phi qui multiplie le cosinus de t. Comparons à présent. Ici, j'ai un terme devant le sinus t. Ici, j'ai une racine de 3. Ici, j'ai un coefficient devant le cosinus t.

Notes

Summary

12m 29s

Exemple 1 : solution

Ansatz: $\sqrt{3}\sin t - \cos t = C\sin(t-\varphi)$

$= C[\sin t \cdot \cos\varphi - \cos t \cdot \sin\varphi]$

$= \underbrace{C\cdot\cos\varphi}_{=\sqrt{3}} \cdot \sin t - \underbrace{C\cdot\sin\varphi}_{=1} \cdot \cos t$

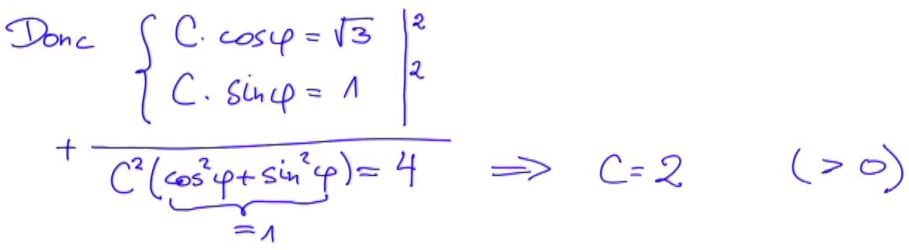
Il correspond à un facteur 1. Remarquons que j'ai bel et bien un signe moins et un signe moins également donc je peux conclure que cette grandeur-ci doit être égale à racine de 3 et ici le C fois sinus phi doit être égal à plus 1. Donc, on va pouvoir écrire. Je vais donc reprendre ce que je viens d'obtenir. Regardons cela encore une fois. Je vais prendre C fois cosinus phi égale racine de trois.

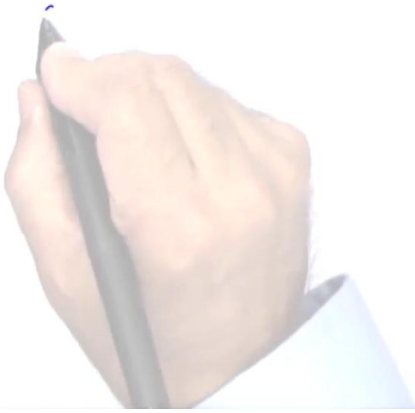
Notes

Summary

14m 08s

Exemple 1 : solution (suite et fin)





L'autre équation était C fois sinus phi égale à 1. Voilà ce qu'il nous faut résoudre. Alors je vous rappelle comment on avait résolu : On a élevé au carré chacune des équations c'est-à-dire que je vais symboliser ça comme ça je vais élever sur la première équation le terme à gauche au carré et le terme à droite et ils seront de nouveau identiques et je ferai la même chose avec la deuxième équation et ensuite nous avions dit que nous allions additionner ce que nous obtenons ainsi. sur la gauche, j'obtiens toujours un C carré que je peux mettre en évidence j'obtiens le cosinus au carré phi plus le sinus au carré phi et sur la droite cette racine de 3 au carré donne 3 le 1 au carré donne 1 donc en tout je vais obtenir 4. Remarquons qu'ici le cosinus carré plus le sinus carré donne toujours 1. J'obtiens donc en fait C carré égal à 4 et je peux donc dire que C c'est la racine de 4, c'est 2. J'aimerais avoir une amplitude positive donc l'amplitude résultante de la superposition ici va être 2. Une fois que j'ai ce résultat je vais introduire cette valeur de 2 dans mon système qui devient alors. Cosinus de phi égale donc je vais passer cette valeur de C sur la droite, je vais obtenir racine de 3 demi.

Notes

Summary

14m 44s

Exemple 1 : solution (suite et fin)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = \sqrt{3} \\ C\cdot\sin\varphi = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix}|^2\\|^2\end{matrix}$

$+$

$C^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) = 4 \Rightarrow C = 2 \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = \sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi$ est dans le 1er quadrant

$\tan\varphi = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi = \underbrace{\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\text{sur le 1er quadrant}} = \frac{\pi}{6}$

Réponse : $\sqrt{3}\sin t - \cos t = 2\cdot\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$

Le sinus de phi, quant à lui, devient 1/2. Si j'observe cela, je vois que le cosinus est positif, le sinus est positif donc je suis sur le premier quadrant. Je passe à tangente. Tangente phi, c'est le sinus divisé par le cosinus donc j'obtiens 1/2 sur racine 3 demi. Je peux amplifier par 2 j'obtiens 1 sur racine de 3. On peut même amplifier par la racine de 3 ça fait racine de 3 tiers ça c'est un angle c'est la valeur d'un angle remarquable si maintenant je prends arc tangente, de racine de 3 tiers racine 3 tiers étant positif, arc tangente va me rendre quelque chose qui est sur le premier quadrant. Donc ça c'est super, c'est exactement le domaine dans lequel je cherche mon angle phi et vu que c'est une valeur qui était remarquable, je sais qu'ici l'angle vaut π/6. Donc je peux écrire : Réponse. Je peux dire que la racine de 3 fois sinus t moins le cosinus t sont donnés par C, c'est-à-dire 2 fois ensuite nous avons pris un sinus t oméga t avec oméga égal à 1 et on avait pris un signe moins et l'angle phi et π/6 et ça, c'est la réponse à la question.

Notes

Summary

16m 22s

Exemple 2

Exemple

Superposer les deux oscillations harmoniques

$$f(t) := \sqrt{3}\sin 3t \qquad \text{et} \qquad g(t) := -2\cos 3t\,, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Considérons un deuxième exemple. On va superposer cette fois-ci deux oscillations harmoniques d'une forme un peu différente. On va prendre pour f de t racine de 3 fois sinus de 3 t et pour g de t on va prendre moins 2 fois cosinus 3 t. De nouveau, il est important de réaliser ici que la vitesse angulaire 3 est la même les deux fois donc nous superposons deux oscillations harmoniques de même vitesse angulaire.

Notes

Summary

18m 05s

Exemple 2 : solution

Ansatz : $\sqrt{3}\sin 3t - 2\cdot\cos 3t = C\cdot\cos(3t+\varphi)$

$= C[\cos 3t\cdot\cos\varphi - \sin 3t\cdot\sin\varphi]$

$= C\cdot\cos\varphi\cdot\cos 3t - C\cdot\sin\varphi\cdot\sin 3t$

Procédons à nouveau par un ansatz. La première oscillation de départ était racine de 3 fois sinus 3 t et la seconde c'est moins 2 fois cosinus de 3 t. Nous aimerions l'écrire comme une seule oscillation harmonique l'amplitude C, on va essayer de la choisir positive on va pouvoir prendre un sinus et un cosinus. Cette fois-ci j'aimerais prendre un cosinus. Il faut prendre oméga t plus ou moins phi oméga ici vaut 3 donc j'ai 3 t et il faut prendre ou bien plus phi ou moins phi cette fois-ci, pour changer, je vais prendre plus phi. Une fois l'ansatz fait l'ensemble des calculs va se dérouler de façon tout à fait similaire aux calculs fait pour l'exemple 1. Je vais utiliser un théorème d'addition cette fois-ci pour le cosinus. Qu'est-ce que j'obtiens ? J'obtiens C qui multiplie alors pour le cosinus, je vais avoir cos cos moins sin sin donc cosinus 3 t qui multiplie cosinus phi moins sinus 3 t qui multiplie sinus phi si on arrange un peu les termes on obtient C fois cosinus phi qui multiplie cosinus 3 t le signe moins et C fois sinus phi qui multiplie sinus 3 t. Nous comparons de nouveau les termes.

Notes

Summary

18m 34s

Exemple 2 : solution

Ansatz : $\sqrt{3}\sin 3t - 2\cdot\cos 3t = C\cdot\cos(3t+\varphi)$

$= C[\cos 3t\cdot\cos\varphi - \sin 3t\cdot\sin\varphi]$

$= \underbrace{C\cdot\cos\varphi}_{=-2}\cdot\cos 3t - \underbrace{C\cdot\sin\varphi}_{=-\sqrt{3}}\cdot\sin 3t$

Donc si je regarde un peu ce C fois cosinus phi ici, c'est le coefficient qui est devant cosinus 3 t cosinus 3 t que je retrouve ici et donc je pourrai le comparer avec ce -2 qui est ici. Si je prends le sinus 3 t ici le coefficient est moins C fois sinus phi il faut le comparer avec cette racine de 3 donc je peux écrire. C fois cosinus phi devrait être égal à -2. Faites attention au signe, ce moins est inclus dans le coefficient de cosinus 3 t et ici si je regarde uniquement le C fois sinus phi le signe moins manque ici donc pour C fois sinus phi je vais prendre moins la racine de 3 et là, ce sera parfait. Nous allons à présent considérer ce système. C fois cos phi égale moins 2 et C fois sin phi égale moins racine de 3. Nous écrivons donc C fois cosinus phi égale moins 2.

Notes

Summary

20m 02s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = -2 \\ C\cdot\sin\varphi = -\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{matrix} \\ | \cdot 2 \\ | \cdot 2 \end{matrix}$

$+$

$C^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) = 4+3 = 7 \implies C = \sqrt{7} \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = -2/\sqrt{7} \\ \sin\varphi = -\sqrt{3}/\sqrt{7} \end{cases} \implies \varphi$ est dans le 3ème quadrant

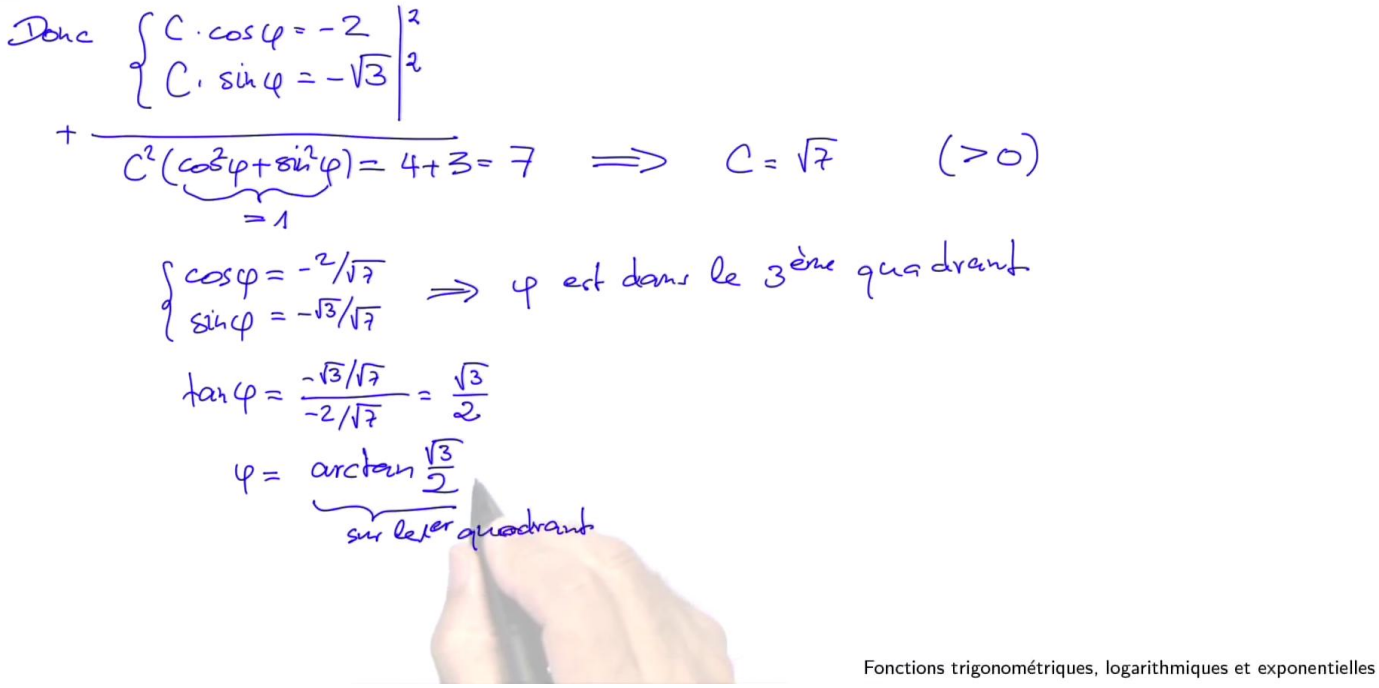
C fois sinus phi égale moins racine de 3 et nous considérons le système formé par ces deux équations. Nous procédons comme nous l'avons fait précédemment. Nous élevons ces deux équations au carré et nous additionnons les termes de gauche et les termes de droite. Nous allons obtenir ici un C carré qui multiplie un cosinus carré phi plus un sinus carré phi et là, nous obtenons sur la droite moins 2 au carré, c'est 4 moins racine de 3 au carré, c'est 3. La somme de 4 et de 3 va me donner 7. Ici on retrouve ce cosinus carré plus sin carré qui vaut toujours 1 j'ai donc C carré qui vaut 7. Je vais prendre pour C la racine de 7. Ça, c'est une possibilité positive et nous aimerions justement avoir un coefficient positif parce qu'alors il représente vraiment l'amplitude. Nous récrivons à présent ce système vu que je connais la valeur de C. J'obtiens que le cosinus de phi est égal à moins 2 sur racine de 7 le sinus de phi est égal à moins racine de 3 sur racine de 7. Donc le cosinus est négatif, le sinus est négatif. Cela signifie que mon angle phi est situé dans le troisième quadrant. Cela signifie que je vais essayer de trouver un angle qui est situé entre -π/2 et -π pour phi.

Notes

Summary

21m 18s

Exemple 2 : solution (suite et fin)



Ici je passe à tangente tangente phi, c'est le quotient de sinus et de cosinus. Donc je vais obtenir moins racine de 3 divisé par racine de 7 sur moins 2 divisé par racine de 7 c'est-à-dire racine de 3 demis. Notez bien que vous pouvez obtenir cette équation pour tangente phi très rapidement depuis le système de départ. Il suffit de diviser les termes à gauche et les termes à droite et vous obtenez ici bel et bien, le C va simplifier, tangente phi égale moins racine de 3 sur moins 2 c'est-à-dire racine de 3 demi. Si je prends maintenant l'angle phi sous la forme arc tangente de racine de 3 demi. Alors là je n'obtiens pas un angle sur le troisième quadrant mais il est sur le premier quadrant. Alors depuis le premier quadrant, pour arriver sur le troisième, je pourrais faire plus ou moins π je vais faire -π justement pour obtenir un angle qui est situé entre -π/2 et -π. Je vais soustraire π voilà, ça c'est mon angle phi.

Notes

Summary

22m 56s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = -2 \\ C\cdot\sin\varphi = -\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{matrix} |^2 \\ |^2 \end{matrix}$

$+$

$C^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) = 4+3 = 7 \implies C = \sqrt{7} \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = -2/\sqrt{7} \\ \sin\varphi = -\sqrt{3}/\sqrt{7} \end{cases} \implies \varphi$ est dans le 3ème quadrant

$\tan\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}/\sqrt{7}}{-2/\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi = \underbrace{\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{sur le 1er quadrant}} - \pi$

Réponse : $\sqrt{3}\sin 3t - 2\cos 3t = \sqrt{7}\cos\left(3t + \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \pi\right)$

Cette fois-ci ce n'est pas une valeur remarquable je n'ai pas d'autre possibilité d'écrire phi que de laisser ça tel quel et je donne ma réponse : Si j'ai la racine de 3 fois le sinus de 3 t moins 2 fois le cosinus de 3 t je peux écrire cela comme racine de 7, a c'est mon C, c'est l'amplitude qui multiplie, nous avons dit, un cosinus cette fois-ci l'angle, c'est oméga t donc oméga vaut 3 fois t nous avions pris un plus, donc plus et l'angle phi, c'est ici arc tangente racine de 3 demi moins π. Et ça c'est la réponse de l'exercice proposé.

Notes

Summary

24m 06s

Exemple 3

Exemple

Résoudre l'inéquation

$$\sin t - \sqrt{3}\cos t > \sqrt{2}, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Comme troisième exemple, nous allons résoudre cette fois-ci non pas une équation, nous n'allons pas simplement superposer deux oscillations harmoniques. Nous allons considérer une inéquation Elle est de type sinus t moins racine de 3 cosinus t plus grand que racine de 2. Avec t un nombre réel. Le lien avec le chapitre que nous sommes en train de traiter c'est que vous trouvez ici sur la gauche une superposition de deux harmoniques de vitesse angulaire 1 et c'est par cette observation que je vais attaquer ce problème donc dans une première phase, je vais prendre le terme qui est sur la gauche et le transformer avec un ansatz.

Notes

Summary

24m 50s

Exemple 3 : solution

Ansatz : $\sin t - \sqrt{3}\cos t = C \cdot \cos(t - \varphi)$

$= C[\cos t \cdot \cos\varphi + \sin t \cdot \sin\varphi]$

$= \underbrace{C \cdot \cos\varphi}_{=-\sqrt{3}} \cdot \cos t + \underbrace{C \cdot \sin\varphi}_{=1} \cdot \sin t$

Le terme qui est sur la gauche c'est un sinus de t moins racine de 3 cos t. C'est la superposition de deux harmoniques et je vais l'écrire sous la forme d'une seule harmonique. Donc, une amplitude C que je ne connais pas pour l'instant. Je prends un sinus ou un cosinus. J'aime prendre le cosinus pour des inéquations ou des équations on verra que ça a un peu l'avantage d'une écriture un peu plus fermée des solutions. Et ici je prends oméga t plus ou moins phi oméga vaut 1 donc c'est t et je vais prendre ici le signe moins phi, j'aurais pu prendre tout à fait le signe plus phi, cela n'aurait guère changé. Le théorème de l'addition pour le cosinus donne C qui multiplie, on va avoir cette fois-ci cos cos plus sin sin le plus à cause du moins ici donc cosinus t fois cosinus phi plus sinus t sinus phi. Mettons un peu d'ordre, cela va me faire C fois cosinus phi qui multiplie cosinus t plus C fois sinus phi qui multiplie sinus t. Là, nous comparons à nouveau les coefficients, donc si je regarde ici le sinus t, il a une amplitude de 1. Une fois le sinus t, donc ce 1, il faudrait que je le retrouve ici. Si je regarde le cosinus de t, il a un coefficient moins racine de 3 donc il faudrait que je retrouve ici ce moins raicne de 3. Nous allons à présent considérer le système formé par ces deux relations.

Notes

Summary

25m 30s

Exemple 3 : solution (suite)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ C\cdot\sin\varphi = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix}|^2\\|^2\end{matrix}$

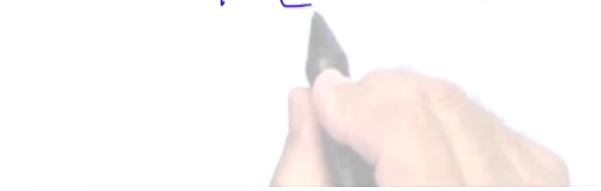
$+$

$C^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} = 4 \Rightarrow C = 2 \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi$ est sur le 2ème quadrant

$\tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



Donc, C fois cosinus phi est égal à moins racine de 3, ça c'est la première ici et C fois sinus phi égal à 1. Nous élevons les deux équations au carré et nous faisons la somme. Nous allons obtenir ici C carré avec cos carré phi plus sin carré phi. Cela est toujours la même chose, nous allons obtenir ici 1 et sur la droite nous allons obtenir 3 plus 1, c'est-à-dire 4 et nous pouvons conclure que C est donné par 2 si on choisit l'amplitude de façon positive, c'est ce que nous préférons. Avec ce C égal à 2, je rentre dans le système de départ, j'obtiens donc le cosinus de phi moins racine de 3 demis, le sinus de phi vaut 1/2. Les signes, le cosinus est négatif, le sinus est positif. Cette fois-ci phi est dans le deuxième quadrant. Si je prends tangente phi, tangente phi est donné par le sinus divisé par le cosinus, donc ça va faire moins 1 sur racine de 3 ou, si vous préférez, moins racine 3 tiers pour obtenir peut-être une valeur remarquable et phi, je peux l'écrire sous la forme arc-tangente de moins racine de 3 tiers. Arc-tangente d'une valeur négative va me rendre un angle qui est sur le quatrième quadrant. Je peux même être un peu plus précis si cela aide peut-être, cet angle va être compris entre -π/2 et 0.

Notes

Summary

27m 05s

Exemple 3 : solution (suite)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ C\cdot\sin\varphi = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} |^2 \\ |^2 \end{matrix}$

$+$

$C^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} = 4 \Rightarrow C = 2 \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi$ est sur le 2ème quadrant

$\tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi = \underbrace{\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}_{\in\,]-\frac{\pi}{2},0]} + \pi = -\frac{\pi}{6}+\pi = \frac{5\pi}{6}$

Il suffit de résoudre : $2\cdot\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

Ce ne sera pas 0 parce que là, alors, il faudrait arc-tangente de 0, mais ça, ce n'est pas sur le bon quadrant. Là, nous sommes sur le quadrant numéro 3. Si l'on veut être sur le deuxième quadrant avec un nombre phi compris entre -π et π, cela signifie que l'angle doit être compris entre π/2 et π. Je peux atteindre cela en ajoutant ici la valeur de π. Arc-tangente de racine 3 tiers, cela serait π/6. Avec arc-tangente moins racine de 3 tiers, j'obtiens donc -π/6, ça c'est une valeur remarquable, plus le π, donc en tout j'obtiens 5π/6. Cela me permet à présent d'écrire le terme qui était sur la gauche de façon différente et je peux conclure. Il suffit de résoudre : Il y a un facteur 2, ça c'est le C fois, nous avions pris l'option de prendre un cosinus oméga t. Le oméga vaut 1 donc c'est t, on avait pris moins phi, donc c'est moins 5π/6 ici et cela devrait être plus grand que racine de 2. Voilà, ça c'est le problème qu'il reste à résoudre.

Notes

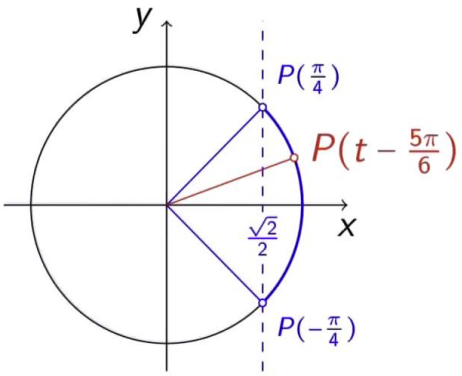
Summary

29m 02s

Exemple 3 : solution suite et fin)

Résolvons $2\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}/2$



Résolvons ce problème. 2 fois cosinus de t moins 5π/6 plus grand que racine de 2. Je dirais que ce facteur 2, on peut encore le passer de l'autre côté, donc de façon équivalente, je peux dire, il faut résoudre cosinus de t moins 5π/6 plus grand que racine de demi. Il faut analyser la situation sur le cercle trigonométrique. J'ai anticipé le tout, j'ai dessiné ici un système d'axe x, y. Le cercle trigonométrique unitaire, la valeur racine 2 demi, à peu près 0,7 sur l'axe des x, ça pourrait être ici. Donc, le cosinus doit être plus grand. Si le cosinus doit être plus grand, cela signifie que l'angle, t moins 5π/6, l'angle doit être situé en sorte que je me retrouve sur l'arc qui est ici en bleu. C'est là que le cosinus, donc la valeur x de la coordonnée du point P correspondant est plus grande que racine 2 demi. Je dois me retrouver sur ce bout d'arc ici. Où sont les positions limites ? Racine 2 demi est une valeur remarquable, je sais que j'obtiens pour le cosinus racine 2 demi, de deux façons, une fois avec π/4 et une fois avec -π/4. Mon angle, t moins 5 π/6, doit être compris entre -π/4 et π/4.

Notes

Summary

30m 25s

Exemple 3 : solution suite et fin)

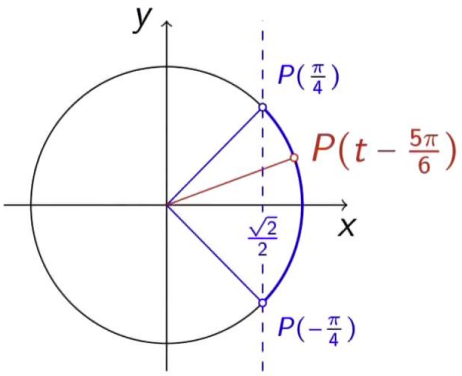
Résolvons $2\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}/2$

Donc

$-\frac{\pi}{4} + k.2\pi < t - \frac{5\pi}{6} < \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

c.à.d.



Ça, c'est une partie de la solution parce qu'en fait je peux évidemment changer la valeur de cet angle ici en rouge d'une valeur de 2π et je me retrouve de nouveau sur le bon arc. Donc, en fait, ce que j'obtiens, -π/4, je peux additionner là un multiple entier de 2π, doit être plus petit que l'angle en question qui était -5π/6 et qui est plus petit que π/4; Et j'additionne un multiple de 2π. Ce qui est important ici est que le multiple de 2 π doit être le même à gauche et à droite. S'il n'était pas le même, on inclurait des situations à l'extérieur de cet arc bleu. k est, comme usuellement, un multiple entier positif ou négatif. Nous aimerions évidemment connaître les valeurs de t. On peut isoler ici le t donc on peut faire on peut passer ce terme 5π/6 de l'autre côté de l'inégalité. Cela va me donner, je vais passer une fois, pour la première inégalité, c'est 5π/6, de l'autre côté donc j'additionne sur cette inégalité à gauche et à droite 5π/6, cela me donne 7π/12 plus k fois 2π qui est plus petit que t qui est plus petit, pour l'autre inégalité, j'additionne à gauche et à droite de nouveau 5π/6, cela me conduit à 13π/12 plus k fois 2π, toujours avec k dans Z.

Notes

Summary

32m 05s

Exemple 3 : solution suite et fin)

Résolvons $2\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}/2$

Donc

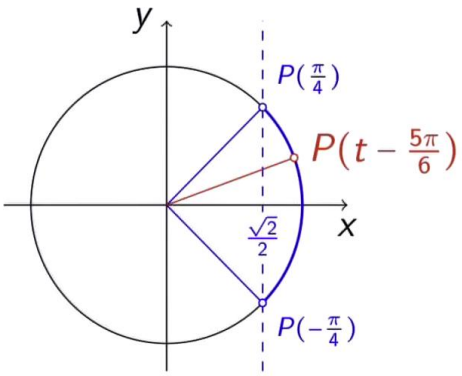
$$-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi < t-\frac{5\pi}{6} < \frac{\pi}{4}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

c.à.d.

$$\frac{7\pi}{12}+k2\pi < t < \frac{13\pi}{12}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Réponse :

$$S := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{7\pi}{12}+k\cdot 2\pi,\ \frac{13\pi}{12}+k2\pi\right[$$



Je peux donner une réponse à présent : La solution de mon équation, de mon inéquation en fait, elle est donnée par S. Ce sont tous les intervalles ici que je viens de déterminer. Les bornes de l'intervalle sont données par 7π/12 plus k fois 2π, ça c'est la borne inférieure. En haut, j'ai 13π/12 plus k fois 2π et je peux prendre ici toutes les valeurs de k qui sont dans Z, donc je peux dire, je prends ici l'union avec k dans Z. Et ça, c'est la solution de l'inéquation donnée.

Notes

Summary

33m 42s

Interprétation géométrique : introduction

On considère les deux oscillations harmoniques

$$f(t) = A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) = B \cos \omega t, \qquad A, B > 0.$$

Nous allons donner une interprétation géométrique de la superposition de ces oscillations harmoniques sous la forme

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi).$$

Voilà, après ces trois exemples qui illustrent l'utilisation de la superposition d'oscillations harmoniques, j'aimerais conclure aujourd'hui cette présentation par une interprétation géométrique d'une telle superposition. Nous allons considérer l'oscillation harmonique A fois sinus oméga t et la deuxième oscillation harmonique B fois cosinus oméga t. On a la même vitesse angulaire, on va prendre A et B positifs donnés. Et nous allons superposer et chercher la solution sous la forme C fois, on aurait pu prendre aussi le cosinus, j'ai pris sinus, le sinus oméga t et j'ai pris plus phi. On va essayer d'interpréter une fois cette égalité de façon géométrique.

Notes

Summary

34m 28s

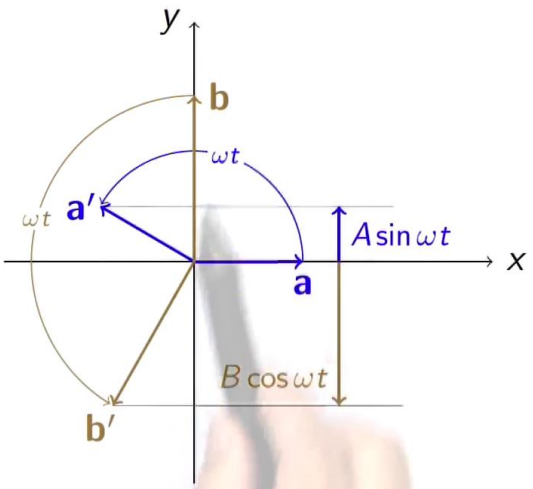
Interprétation géométrique

Soit $\mathbf{b}$ le vecteur lieu de coordonnées

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{b}$ du même angle ωt, on obtient un vecteur $\mathbf{b}'$ dont la projection sur l'axe des y vaut

$$B \cos \omega t .$$



Alors on procède de la façon suivante : On commence par le premier terme qui contient le terme en A, donc le A fois sinus oméga t. On essaye de se dire : Où est-ce que je pourrais le voir autour d'un dessin qui est sur un système d'axe x, y où serait inclus un, je ne l'ai pas dessiné ici mais un cercle trigonométrique de rayon 1. Alors, on procède de la façon suivante : On va prendre un vecteur petit a dont les composantes sont données par A majuscule et 0. A majuscule, c'est la composante qui est donnée par le premier terme qui était du type A fois sinus oméga t. Ce vecteur a, je le dessine ici, Zéro A majuscule, et si je veux observer la grandeur. A fois sinus oméga t alors cela est facile. Il suffit de tourner ce vecteur a de l'angle oméga t et alors j'observe à la verticale A fois sinus oméga t. Pour le deuxième terme qui était du type B fois cosinus oméga t. Alors, je vous rappelle qu'on peut observer un cosinus également à la verticale, en tant que projection sur l'axe des y à condition de mesurer l'angle correspondant depuis l'axe des y. C'est-à-dire qu'on va prendre ici le vecteur non pas du type constante 0, on va prendre zéro et le B. Donc ça c'est le vecteur qui est ici sur l'axe des y en b.

Notes

Summary

35m 10s

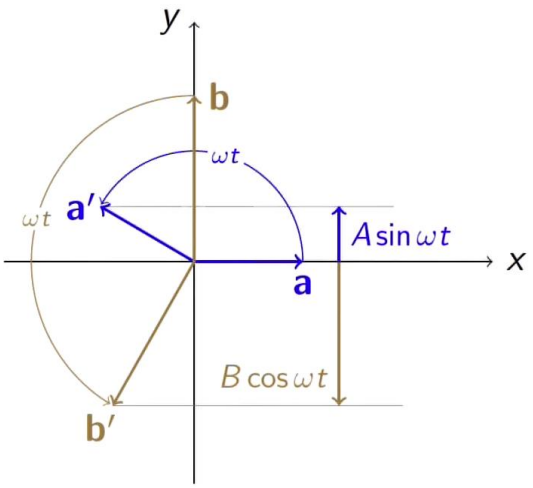
Interprétation géométrique

Soit $\mathbf{b}$ le vecteur lieu de coordonnées

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{b}$ du même angle ωt, on obtient un vecteur $\mathbf{b}'$ dont la projection sur l'axe des y vaut

$$B \cos \omega t .$$



Et on fait tourner ce vecteur du même angle oméga t et alors on va observer à la verticale B fois le cosinus oméga t parce que cet angle correspond en fait à oméga t plus π/2. C'est ce qui permet d'observer le cosinus également à la verticale.

Notes

Summary

36m 31s

Interprétation géométrique

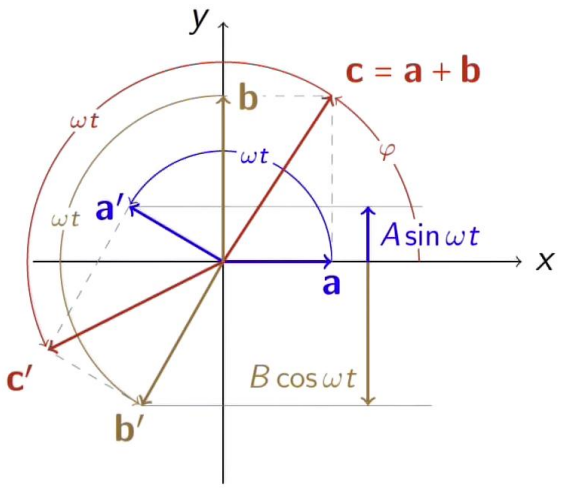
Soit $\mathbf{c}$ le vecteur défini par

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Sa norme vaut $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{A^2 + B^2}$

et on note φ l'angle qu'il forme avec l'axe des x.

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{c}$ du même angle ωt, on obtient le vecteur $\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$.



Introduisons encore un troisième vecteur, cette fois-ci nous allons introduire le vecteur c qui est défini par la somme a plus b. Donc, j'ai ici mon vecteur a, le vecteur b toujours dans la même position, je fais la somme, cela est fait à l'aide de ce rectangle. Ici, j'ai un vecteur c. Alors, ce vecteur c aura une longueur, sa norme, si vous voulez, elle vaut la racine de A carré + B carré. Là, on retrouve que ça, c'est exactement l'expression que nous avions trouvée pour C majuscule. Lorsqu'on superpose les deux oscillations harmoniques. En outre, on a ici que C forme un angle phi. Faisons tourner ce vecteur c ensemble avec les vecteurs a et b de cet angle oméga t. Nous allons alors obtenir un vecteur c prime ici qui est de nouveau somme de a prime plus b prime. La somme des vecteurs est conservée par ce mouvement de rotation.

Notes

Summary

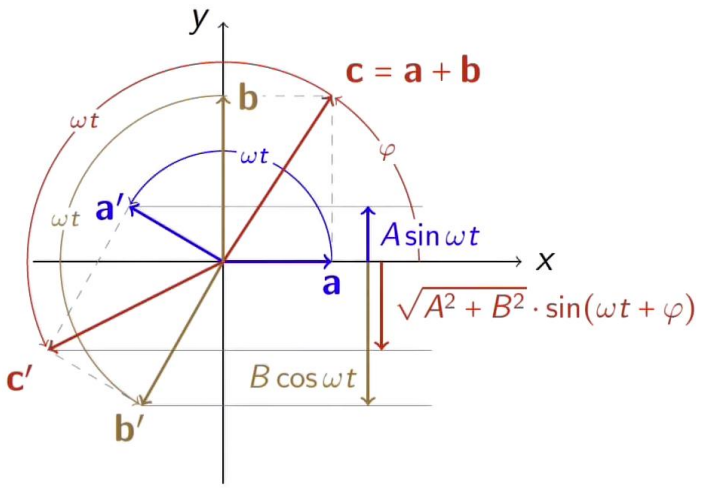
36m 51s

Interprétation géométrique

L'angle que forme le vecteur $\mathbf{c}'$ avec l'axe des x vaut $\omega t + \varphi$.

La projection du vecteur $\mathbf{c}'$ sur l'axe des y vaut donc

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$



Si on essaye de résumer la situation, on peut dire la chose suivante : Si je regarde quel est l'angle formé par c prime avec l'axe des x, j'ai cet angle phi que j'avais au départ et j'ai fait tourner la figure d'oméga t. L'angle qui correspond maintenant pour c prime, l'angle correspondant, est oméga t plus phi. C'est encore une des grandeurs que nous aimerions retrouver dans notre formule. Si je projette à présent le vecteur c prime sur l'axe des y, ici j'ai l'angle rouge qui est mesuré depuis l'axe des x, donc je vais observer un sinus. Je vais observer le sinus de l'angle oméga t plus phi et multiplier par la longueur de ce vecteur qui était racine de A carré plus B carré.

Notes

Summary

37m 52s

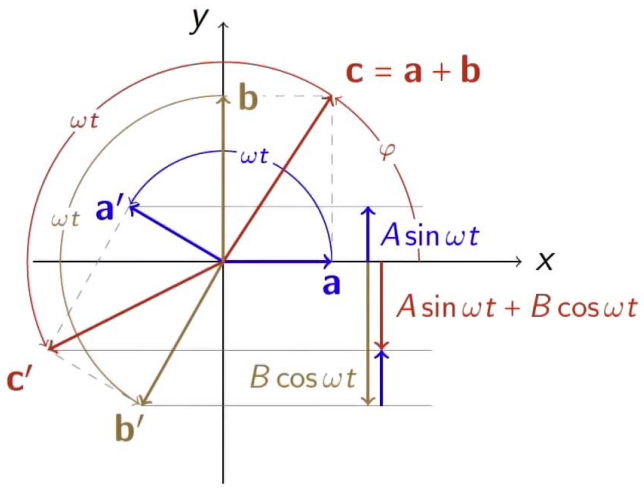
Interprétation géométrique

En comparant les projections des vecteurs $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ et $\mathbf{c}'$, sur l'axe des y,

(la projection du vecteur $\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ est égale à la somme des projections des vecteurs $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{b}'$),

on en déduit que

$$A \sin\omega t + B \cos\omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$



Comparons à présent les projections des trois vecteurs : A prime, b prime et c prime. A ce titre, je vous rappelle que la projection du vecteur c prime sur l'axe des y, c'est la partie rouge, est obtenue en tant que somme des projections de a prime et b prime. Nous pouvons donc conclure que A fois sinus oméga t, ça c'est la projection de a prime, plus B fois le cosinus oméga t, est donné ici par cette partie rouge qui en fait, nous le savons, est la projection de c prime, c'est-à-dire racine de A carré plus B carré fois le sinus d'oméga t plus phi. Ce que l'on peut retenir, c'est que si l'on dessine le vecteur A majuscule zéro, le vecteur zéro B majuscule, si on additionne ces deux vecteurs, on obtient ici un vecteur c qui a la bonne longueur A carré plus B carré et l'angle phi qui est le déphasage ici et donné par l'angle correspondant donc on retrouve ici que tangente de phi doit être égale à B sur A.

Notes

Summary

38m 43s

Superposition d'oscillations harmoniques

Ce que nous avons appris :

- le principe de superposition d'oscillations harmoniques ;
- quelques exemples d'applications ;
- une interprétation géométrique de la superposition.

Prochaine étape :

- Construction du graphe d'une oscillation harmonique
  - amplification d'une fonction,
  - amplification de l'argument d'une fonction,
  - translation de l'argument d'une fonction,
  - exemple.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Tirons le bilan de cette présentation. On a appris à superposer des oscillations harmoniques, on a donné quelques exemples d'utilisation de telles superpositions. On a aussi résolu une inéquation et nous avons finalement interprété géométriquement cette superposition. La prochaine fois, ce sera la séquence qui termine ce chapitre 5, nous allons nous intéresser à la construction du graphe de ces oscillations harmoniques. Nous allons parler de l'amplification d'une fonction, de l'amplification de l'argument d'une fonction. Nous allons parler de translation de l'argument d'une fonction et nous allons illustrer le tout sur des exemples qui sont liés aux oscillations harmoniques. Je vous remercie. A la prochaine.

Notes

Summary

39m 50s