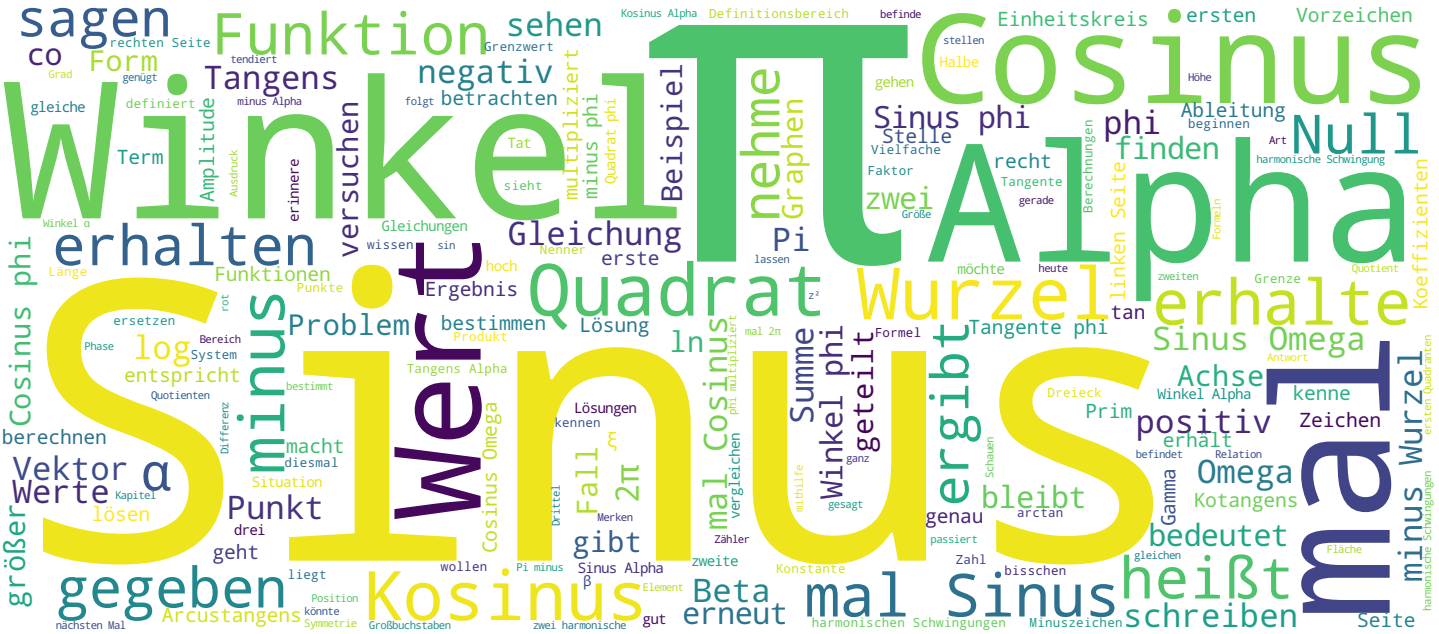
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Oscillations harmoniques

5.2 La superposition d'oscillations harmoniques

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Video

EPFL

Le principe de superposition

Soient f et g deux oscillations harmoniques de même vitesse angulaire ω :

$$f(t) := A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) := B \cos \omega t, \qquad A, B \neq 0.$$

Nous allons montrer que la somme

$$(f+g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto (f+g)(t) := A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

est également une oscillation harmonique de même vitesse angulaire ω.

Guten Tag. Das letzte Mal habe ich den Begriff harmonischer Schwingungen eingeführt, also von Funktionen, die von einer sehr speziellen Art waren, nämlich eine Konstante A, die einen Sinus oder Cosinus eines Winkels multipliziert, der gegeben ist durch den Ausdruck des Typs Omega t + phi. Omega t + phi war ein Winkel, der eine Kreisbewegung beschrieb. Heute werde ich mich für die Überlagerung solcher harmonischer Schwingungen interessieren. Wir werden zwei harmonische Schwingungen nehmen. Was hier wichtig ist, ist, sofort zu erkennen, dass die beiden harmonischen Schwingungen (...) Hier ist die erste: Einmal Sinus Omega t und einmal B mal Sinus Omega t- Beide Schwingungen haben die gleiche Winkelgeschwindigkeit Omega. Wir werden auch annehmen, dass die beiden Amplituden A und B nicht null sind. Wenn die eine oder andere null wäre, würde die Überlagerung gewöhnlich werden, denn was versteht man unter Überlagerung? Unter Überlagerung (oder auch Superposition) versteht man schlicht die Tatsache, dass man eine Funktion f + g berücksichtigt, das heißt eine Funktion, die im Ganzen einfach dem erhaltenen Wert entsprechen wird, indem man A mal Sinus Omega t addiert, es ist das f von t, und B mal Cosinus Omega t, was der g von t ist.

Notes

Summary

0m 04s

Le principe de superposition

Soient f et g deux oscillations harmoniques de même vitesse angulaire ω :

$$f(t) := A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) := B \cos \omega t, \qquad A, B \neq 0.$$

Nous allons montrer que la somme

$$(f+g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto (f+g)(t) := A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

est également une oscillation harmonique de même vitesse angulaire ω.

Wir werden zeigen, dass diese Kombination, diese Summe ebenfalls eine harmonische Schwingung mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit Omega ist, aber mit einer Amplitude und einer Phase, die wir werden bestimmen müssen.

Notes

Summary

1m 28s

Problème

Les deux oscillations harmoniques

$$f(t) = A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) = B \cos \omega t$$

étant données, on cherche à déterminer une amplitude $C \geq 0$ et une phase $\varphi \in]-\pi, \pi]$ telles que

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi).$$

Das Problem ist also folgendes: Nehmen wir an, dass die beiden harmonischen Schwingungen gegeben sind. Zum einen Sinus Omega t, zum anderen B mal Cosinus Omega t, wir möchten gerne die Amplitude C bestimmen. Wir werden versuchen, sie positiv zu bestimmen. Wir werden eine Phase determinieren. Wir werden versuchen, diese Phase zwischen -π eund +π zu nehmen mit einem nicht angenommenen -π und einem angenommenen π, und wir werden also versuchen, die Summe zu schreiben. Einmal Sinus Omega t und B mal Sinus Omega t als Amplitude C und wir werden einen Sinus nehmen in Form von Omega t plus phi. Wir haben erneut dieselbe Winkelgeschwindigkeit, jedoch haben wir eine Phasenverschiebung. Merken Sie sich gut, dass, wenn ich diesen Winkel phi um ein Vielfaches von π vergrößere, der Ausdruch sich nicht ändern wird. Somit ist es völlig normal, zu sagen, OK, versuchen wir, eine Phase zu finden, die einfach zwischen -π und π enthalten ist.

Notes

Summary

1m 43s

Résolution

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin (\omega t + \varphi) .$$

On développe $\sin (\omega t + \varphi)$ à l'aide des formules d'addition :

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin \omega t \cdot \cos \varphi + C \cos \omega t \cdot \sin \varphi$$

Hier ist das Problem, das wir lösen wollen. Wir wollen C und phi herausfinden, wenn A, Omega und B gegeben sind. Die Berechnung, die ich durchführen werde, die Entwicklung, die ich vollziehen werde, müssen Sie im Kopf behalten. In den konkreten Berechnungen werden wir immer diesen Vorgang verwenden, den ich hier aufzeige, den ich hier darlege in einer vollkommen buchstäblichen Form mit den Koeffizienten A, B, Omega, welche Buchstaben und keine Zahlen sind. Der Trick ist, hier diese Summe anzugehen: Sinus Omega t plus phi und diesen Sinus zu entwickeln durch eine Additionsformel, die Additionsformel für den Sinus. Wenn wir dies machen, erhalten wir das folgende Ergebnis: Den Sinus, hier habe ich eine Winkelsumme, also werde ich den Sinus des ersten Winkels erhalten mal den Cosinus des zweiten Winkels und den Cosinus des ersten mal den Sinus des zweiten, wobei C eine Konstante ist, welche diese Summe multipliziert. Also kann ich dieses C vor jeden Term schreiben. Wenn wir hier angekommen sind, müssen wir vergleichen, was wir auf der linken Seite haben, und was wir auf der rechten Seite haben Wenn ich mir das anschaue, sehe ich beispielsweise hier diesen Sinus Omega t, ich finde ihn hier wieder, und es wird völlig natürlich sein, zu erwarten, dass C mal Cosinus phi, der hier in rot dargestellt ist, dem Wert A mit Großbuchstaben entspricht.

Notes

Summary

2m 36s

Résolution

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin (\omega t + \varphi) .$$

On développe $\sin (\omega t + \varphi)$ à l'aide des formules d'addition :

$$\begin{aligned} A \sin \omega t + B \cos \omega t &= C \sin \omega t \cdot \cos \varphi + C \cos \omega t \cdot \sin \varphi \\ &= C \cos \varphi \cdot \sin \omega t + C \sin \varphi \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

Puis en identifiant les coefficients respectifs, on obtient

$$\begin{cases} A = C \cos \varphi \\ B = C \sin \varphi . \end{cases}$$

Auf vollkommen gleiche Weise habe ich hier den Cosinus Omega t, den ich auf der linken Seite wiederfinde, und den Koeffizienten, der vor dem Cosinus steht, es ist C mal Sinus phi, und er sollte B entsprechen. So dass es, wenn ich mein Problem lösen will, genügt, dieses Problem zu lösen: Es genügt, C mit Großbuchstaben und phi zu bestimmen, durch C mal Cos phi gleich A, und C mal sin phi gleich B. Merken Sie sich, dass wir nicht alle möglichen Lösungen finden wollen für C und phi, wir suchen nur eine mögliche Darstellung mit einem C, das wir gerne positiv hätten, so dass C eine Amplitude ist, mit einem phi, das zwischen -π und +π enthalten ist bequemlichkeitshalber.

Notes

Summary

3m 56s

Solution

- Calcul de l'amplitude C, $(C \geq 0)$:

$$\begin{cases} A = C\cos\varphi \\ B = C\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = C^2\cos^2\varphi \\ B^2 = C^2\sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow A^2 + B^2 = C^2$$

$$\Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad C > 0, \quad \text{car} \quad A, B \neq 0.$$

Die Berechnungen, die ich vorstelle, kann man immer in konkreten Fällen durchführen. Wir beginnen mit diesem System, das wir soeben genannt haben, die Idee ist, die erste Gleichung im Quadrat zu erheben, also zu sagen, dass ich ein Glied links habe, das gleich einem Glied rechts ist. Daraus kann ich herleiten, es ist nicht dasselbe, doch ich kann davon herleiten, dass das Quadrat links ein Quadrat ist, das mit dem rechten Quadrat gleichwertig ist, es ist C Quadrat phi. Ich gehe vollkommen auf die gleiche Weise vor für die zweite Gleichung. B gleich C mal sin phi. B im Quadrat ist gleich, und hier erhebe ich dieses Produkt zum Quadrat, C Quadrat sin Quadrat phi. Habe ich einmal diese beiden Gleichungen, kann ich die beiden Terme links addieren, die beiden Terme rechts, und ich sollte wieder dasselbe erhalten. Halten wir gut fest, dass ich, wenn ich auf der linken Seite addiere, ich A Quadrat plus B Quadrat erhalte, auf der rechten Seite erhalte ich C Quadrat, das ich zum Vorschein bringen kann, und das die Summe Cosinus im Quadrat phi multiplizieren wird plus sin Quadrat von phi, das 1 ergibt. Also erhalte ich einfach A Quadrat plus B Quadrat gleich C Quadrat. Ich kann also einen Wert C finden, indem ich eine Wurzel nehme, ich werde die Wurzel nehmen, hier mit einem positiven Zeichen, plus die Wurzel aus A Quadrat plus B Quadrat, weil ich ein positives C erhalten möchte.

Notes

Summary

4m 39s

Solution

- Calcul de l'amplitude C, $(C \geq 0)$:

$$\begin{cases} A = C\cos\varphi \\ B = C\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = C^2\cos^2\varphi \\ B^2 = C^2\sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow A^2 + B^2 = C^2$$

$$\Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad C > 0, \quad \text{car} \quad A, B \neq 0.$$

- Détermination d'une phase φ :

$$\cos\varphi = \frac{A}{C} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{B}{C} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi = \frac{B}{A}.$$

On en déduit φ à partir de $\tan\varphi = \frac{B}{A}$ et de la position du point $P(\varphi)$ sur le cercle trigonométrique.

Wenn ich einmal diesen Wert von C kenne, kehre ich zum Ausgangssystem zurück, der hier ist. Ich kann sagen, dass ich diesen Wert von C kenne, also verschiebe ich diesen Wert von C von der einen auf die andere Seite. Ich erinnere Sie daran, dass C nicht null sein kann, weil A und B nicht null sind, also sind A Quadrat plus B Quadrat nicht null, Ich kann schreiben, dass der Cosinus von phi durch A auf C gegeben ist, auf beiden Seiten, und der Sinus von phi durch B auf C gegeben ist. Persönlich bevorzuge ich es, diese beiden Gleichungen in Form einer Tangente zu schreiben. Ich nehme die Tangente phi, Die Tangente phi ist einfach der Sinus geteilt durch den Cosinus und dies macht B auf A. Wir müssen phi bestimmen aus dieser Gleichung Tangente phi gleich B auf A. Es gibt ein kleines Problem, und zwar, dass die Tangentenfunktion ein periodisches π ist, und wir suchen einen Winkel phi auf einem Längenbereich 2π zwischen -π und +π. Also müssen wir eventuell die erhaltenen Werte anpassen, und wir werden uns also einer Betrachtung bedienen, mit der Kenntnis des Cosinus und Sinus.

Notes

Summary

5m 54s

Solution

- Calcul de l'amplitude C, $(C \geq 0)$:

$$\begin{cases} A = C\cos\varphi \\ B = C\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = C^2\cos^2\varphi \\ B^2 = C^2\sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow A^2 + B^2 = C^2$$

$$\Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad C > 0, \quad \text{car} \quad A, B \neq 0.$$

- Détermination d'une phase φ :

$$\cos\varphi = \frac{A}{C} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{B}{C} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi = \frac{B}{A}.$$

On en déduit φ à partir de $\tan\varphi = \frac{B}{A}$ et de la position du point $P(\varphi)$ sur le cercle trigonométrique.

Sie sehen, der Cosinus wird dasselbe Zeichen wie A mit Großbuchstaben erhalten, der Sinus dasselbe Zeichen wie B mit Großbuchstaben, das heißt, dass ich mithilfe dieser Zeichen von A und B angeben kann, in welchem Quadranten sich dieser Winkel phi befindet. Und anschließend versuche ich die Tangente phi gleich B auf A zu lösen, und ich versuche, einen Winkel zu finden, der im richtigen Quadranten ist.

Notes

Summary

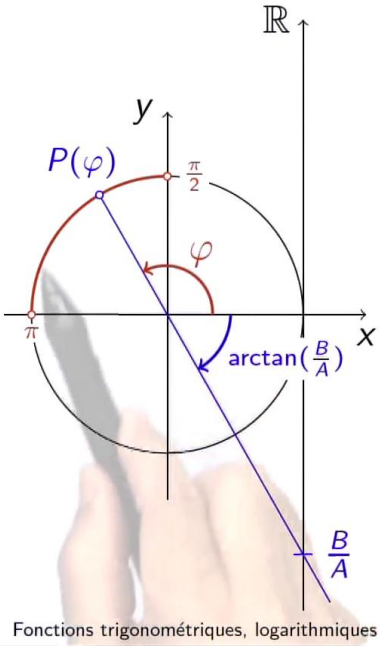
7m 04s

Remarque

On peut toujours choisir la phase φ dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$, en procédant comme suit :

- si $A<0$ et $B>0$, on a $\cos\varphi<0$ et $\sin\varphi>0$: le point $P(\varphi)$ est dans le deuxième quadrant et on pose

$$\varphi := \arctan\left(\frac{B}{A}\right)+\pi,$$



Stellen wir dies ein wenig dar. Wenn zum Beispiel A positiv ist, A ist die Größe, die dem Zeichen des Cosinus entspricht, also weiß ich, dass der Cosinus positiv ist. Auf dem Einheitskreis bedeutet dies, dass ich mich auf dem Bereich hier in rot befinde. Ich befinde mich zwischen -π/2 und π/2. Also: Arcustangens von B auf A B auf A kann positiv oder negativ sein gemäß dem Zeichen von B. Aber Arcustangens wird mir einen Winkel zwischen -π/2 und π/2 liefern. Also erhalte ich hier sofort das richtige Ergebnis. Hier haben Sie die Situation, wenn B auf A negativ ist. Wenn B auf A negativ ist, bedeutet das, dass A positiv ist und B negativ ist. Ich befinde mich im vierten Quadranten, ich muss also einen Winkel finden zwischen -π/2 und π/2, und Arcustangens liefert genau einen solchen Wert. Betrachten wir eine andere Situation: A ist negativ und B ist positiv, also ist der Sinus negativ und der Cosinus ist positiv. Ich befinde mich also auf dem zweiten Quadranten. Das heißt, dass wenn mein Winkel phi sein muss, also wenn mein Winkel phi, den ich suche, zwischen -π und +π liegen muss, muss ich einen Winkel zwischen -π und +π finden. Hier auf diesem Viertel des Kreises in rot.

Notes

Summary

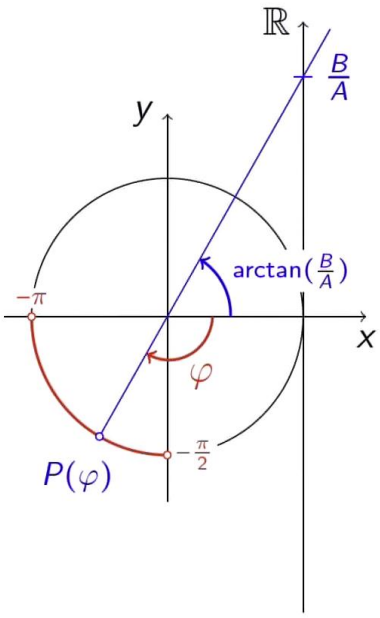
7m 28s

Remarque

On peut toujours choisir la phase φ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, en procédant comme suit :

- si $A<0$ et $B<0$, on a $\cos\varphi<0$ et $\sin\varphi<0$: le point $P(\varphi)$ est dans le troisième quadrant et on pose

$$\varphi := \arctan\left(\frac{B}{A}\right) - \pi.$$



Wenn ich nun Arcustangens von B auf A nehme, B auf A, das negativ sein wird, wird mir Arcustangens einen Winkel liefern zwischen 0 und -π/2. Wenn ich also den richtigen Winkel erhalten möchte, muss ich diesen Winkel berichtigen, der durch Arcustangens von +π ausgegeben wird, was ich hiermit tue. Schließlich, wenn die beiden Konstanten A und B negativ sind, bedeutet dies, dass der Cosinus aufgrund von A negativ ist, der Sinus ist aufgrund von B negativ, also befinde ich mich hier im dritten Quadranten. Ich brauche also einen Winkel zwischen -π und -π/2 dieses Mal. Arcustangens von B auf A. B auf A ist positiv. Arcustangens wird mir einen Winkel liefern zwischen 0 et π/2 und dieses Mal muss ich diesen Winkel von -π korrigieren, um im richtigen Quadranten zu sein.

Notes

Summary

8m 45s

Trois variantes

Nous venons de voir que la somme des deux oscillations harmoniques

$$f(t) = A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) = B \cos \omega t$$

est aussi une oscillation harmonique de la forme $C \sin(\omega t + \varphi)$.

Mais nous pouvons changer l'expression de cette oscillation en posant :

- $A \sin \omega t + B \cos \omega t := C \sin(\omega t - \varphi)$ ou
- $A \sin \omega t + B \cos \omega t := C \cos(\omega t + \varphi)$ ou
- $A \sin \omega t + B \cos \omega t := C \cos(\omega t - \varphi)$.

Fertig! Was wir gerade gemacht haben, ist, dass wir gezeigt haben, dass, wenn man eine Summe von zwei harmonischen Schwingungen ausrechnet mit derselben Winkelgeschwindigkeit, man erneut eine harmonische Schwingung erhält, die wir in Form von C mal Sinus Omega plus phi schreiben können. Wir haben gezeigt, wie man die Amplitude C und die Phase phi bestimmen kann. Allerdings könnte man nicht C mal Sinus Omega t plus phi wählen, aber man kann durchaus C mal Sinus Omega t minus phi wählen. Man kann auch den Sinus durch einen Cosinus ersetzen, also Cosinus Omega t plus phi ja sogar Cosinus Omega t minus phi. Die Abweichung ist voll und ganz auf ähnliche Weise handzuhaben.

Notes

Summary

9m 34s

Trois variantes

- $A \sin\omega t + B \cos\omega t := C \cos(\omega t + \varphi)$

$$A \sin\omega t + B \cos\omega t = C \cos\varphi \cdot \cos\omega t - C \sin\varphi \cdot \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \qquad A = -C \sin\varphi \qquad \text{et} \qquad B = C \cos\varphi\,,$$

on en déduit

- le quadrant du point $P(\varphi)$,
- l'amplitude $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
- et la phase φ donnée par $\tan\varphi = -\frac{A}{B}$.

Zum Beispiel hier, der Vollständigkeit halber, wenn ich Sinus Omega t minus phi nehme, gibt mir der Additionssatz hier ein Zeichen weniger, und wenn ich hier die Koeffizienten wie eben vergleiche, also vor Sinus Omega t, habe ich C mal Cosinus phi, das A ergibt, für den Cosinus Omega t. Hier muss man ein wenig aufpassen. Ich habe hier ein B, das mit dem Zeichen, minus C mal Sinus phi betragen muss. Also erhält man ein System, und zwar von Anfang an, das ein bisschen anders ist. Wir können erneut den Quadranten bestimmen, in dem sich dieser Winkel befindet, wir können C berechnen, wir werden A Quadrat plus B Quadrat erhalten, indem wir die Wurzel dieser Summe nehmen. Wir erhalten C. Und die Phase ist erneut gegeben durch Tangente phi, die dieses Mal die Form minus B auf A haben wird. Wir müssen erneut korrigieren, was durch Arcustangens ausgegeben wird, wie wir es eben getan haben. Wenn Sie einen Cosinus nehmen, geschieht dies: Auf vollkommen ähnliche Weise benutzen Sie den Additionsterm für den Cosinus, es ist cos cos minus sin sin, und Sie vergleichen noch einmal die Koeffizienten, also wird A C mal Cosinus sein... Entschuldigung. A wird minus C mal Sinus phi sein.

Notes

Summary

10m 15s

Trois variantes

- $A \sin\omega t + B \cos\omega t := C \cos(\omega t - \varphi)$

$$A \sin\omega t + B \cos\omega t = C \cos\varphi \cdot \cos\omega t + C \sin\varphi \cdot \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \qquad A = C \sin\varphi \qquad \text{et} \qquad B = C \cos\varphi\,,$$

on en déduit

- le quadrant du point $P(\varphi)$,
- l'amplitude $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
- et la phase φ donnée par $\tan\varphi = \frac{A}{B}$.

Achtung, man muss den Sinus Omega t mit Sinus Omega t vergleichen. Also ist A minus Sinus phi und b ist gleich C mal Cosinus phi, der Rest funktioniert erneut wie zuvor dargestellt, also werden wir auf der Basis der Zeichen den Quadranten bestimmen, C erneut ist gegeben durch dieselbe Formel. Also erheben Sie diese beiden Gleichungen ins Quadrat, und Sie addieren diese, und phi ist erneut gegeben durch die gleiche Tangente phi. Also werden wir einfach den Quotienten nehmen von Sinus und Cosinus, der minus A auf B ist. Wenn Sie phi durch minus phi ersetzen, ist die einzige Sache, die sich ändert, dass Sie hier ein geändertes Zeichen haben, und beim Vergleich der Koeffizienten B gleich C mal Cosinus phi ist, und A gleich C mal Sinus phi, und der Rest erneut auf vollkommen gleiche Weise abläuft.

Notes

Summary

11m 22s

Exemple 1

Exemple

Superposer les deux oscillations harmoniques

$$f(t) := \sqrt{3}\sin t \qquad \text{et} \qquad g(t) := -\cos t\,, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Wenden wir dies nun auf einen konkreten Fall an, das heißt einem Fall, wo wir Werte für A, B und Omega haben. Wir haben hier ein erstes Beispiel, wir werden die Wurzel von 3 mal Sinus t nehmen auf einer Seite, und g von t gleich minus Cosinus t. Hier ist die Winkelgeschwindigkeit Omega gleich 1. Ich habe hier in der Tat 1 mal t und 1 mal t.

Notes

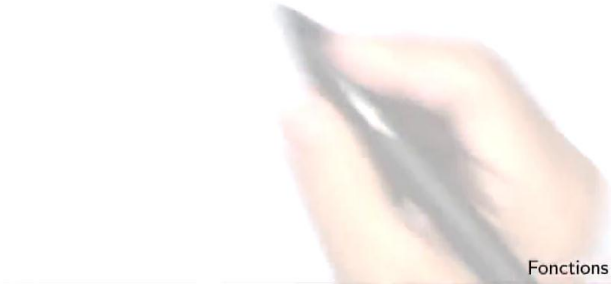
Summary

12m 10s

Exemple 1 : solution

Ansatz: $\sqrt{3}\sin t - \cos t = C\sin(t-\varphi)$

$= C[\sin t \cdot \cos\varphi - \cos t \cdot \sin\varphi]$



Wir werden das nehmen, was man als Ansatz bezeichnet. Gegeben ist Wurzel aus 3 Sinus t minus Cosinus t. Also möchte ich dies wie eine einzige harmonische Schwingung schreiben mit einer bestimmten Amplitude C, die ich gerne positiv hätte. Danach folgt eine Auswahl, ich kann einen Sinus oder einen Cosinus nehmen. Hier nehme ich ein Mal einen Sinus. Der Winkel, wir nehmen Omega t plus phi, Omega ist gleich 1, hier wird der Winkel also t sein. Ich werde nicht plus phi nehmen, nehmen wir hier minus phi. Ich kann auch plus phi nehmen, dies ist einfach eine Frage der Wahl, die man zu Beginn trifft. Hier. Wir werden mit diesem Ansatz arbeiten und wir werden ihn mithilfe des Additionssatzes entwickeln. Ich habe einen Sinus mit einer Winkeldifferenz, also wird mir dies den Sinus von t bringen, der den Sinus von phi multipliziert, minus, weil ich hier ein Minus habe, und ich habe den Cosinus von t, der den Sinus von phi multipliziert. Ich werde ein wenig diese Termen ordnen, ich werde schreiben, dass ich C mal habe, ich werde den Cosinus phi davor nehmen, der Sinus t multipliziert, ich habe ein Minuszeichen, ich habe C mal, ich habe den Sinus von phi, der den Cosinus von t multipliziert.

Notes

Summary

12m 29s

Exemple 1 : solution

Ansatz: $\sqrt{3}\sin t - \cos t = C\sin(t-\varphi)$

$= C[\sin t \cdot \cos\varphi - \cos t \cdot \sin\varphi]$

$= \underbrace{C\cdot\cos\varphi}_{=\sqrt{3}} \cdot \sin t - \underbrace{C\cdot\sin\varphi}_{=1} \cdot \cos t$

Vergleichen wir nun. Hier habe ich einen Term von den Sinus t. Hier habe ich eine Wurzel von 3. Hier habe ich einen Koeffizienten vor dem Cosinus t. Er entspricht einem Faktor 1. Merken wir an, dass ich wohlgemerkt ein Minuszeichen habe und noch einmal ein Minuszeichen, woraus ich schließen kann, dass diese Größe hier gleich der Wurzel von 3 sein wird, und hier muss das C mal Sinus phi gleich plus 1 ergeben. Also werden wir schreiben können. Ich werde wieder aufgreifen, was ich soeben erhalten habe. Schauen wir uns dies noch einmal an. Ich werde C mal Cosinus phi nehmen gleich Wurzel aus drei.

Notes

Summary

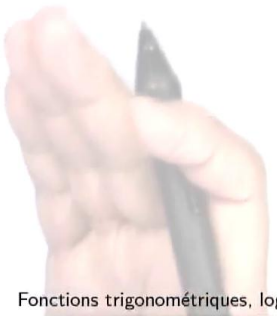
13m 55s

Exemple 1 : solution (suite et fin)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = \sqrt{3} \\ C\cdot\sin\varphi = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} |^2 \\ |^2 \end{matrix}$

$+$

$C^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 2 \qquad (>0)$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Die andere Gleichung war C mal Sinus phi gleich 1. Hier ist das, was wir lösen müssen. Also, ich erinnere Sie daran, wie wir dies gelöst hatten: Wir haben jede der Gleichungen ins Quadrat erhoben, das heißt, ich werde dies folgendermaßen verdeutlichen, ich werde auf der ersten Gleichung den Term links ins Quadrat erheben und den Tern rechts und sie werden erneut identisch sein, und ich werde dasselbe machen mit der zweiten Gleichung, und anschließend haben wir gesagt, dass wir addieren werden, was wir so erhalten auf der linken Seite, ich erhalte immer ein C im Quadrat, das ich zum Vorschein bringen kann, ich erhalte den Cosinus im Quadrat phi plus den Sinus im Quadrat phi, und auf der rechten Seite ergibt diese Wurzel aus 3 im Quadrat 3, die 1 im Quadrat ergibt 1, also werde ich insgesamt 4 erhalten. Bemerken wir, dass hier der Cosinus im Quadrat plus der Sinus im Quadrat immer 1 ergibt. Ich erhalte also in der Tat C Quadrat ist gleich 4, und ich kann also sagen, dass C die Wurzel von 4 ist, das macht 2. Ich hätte gerne eine positive Amplitude, also wird die Amplitude, die aus der Superposition resultiert, 2 sein. Wenn ich einmal dieses Resultat habe, werde ich diesen Wert von 2 in mein System einführen, das dann entsteht.

Notes

Summary

14m 44s

Exemple 1 : solution (suite et fin)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = \sqrt{3} \\ C\cdot\sin\varphi = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix}|^2\\|^2\end{matrix}$

$+$

$C^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) = 4 \Rightarrow C = 2 \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = \sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi$ est dans le 1er quadrant

$\tan\varphi = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi = \underbrace{\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\text{sur le 1er quadrant}} = \frac{\pi}{6}$

Réponse : $\sqrt{3}\sin t - \cos t = 2\cdot\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$

Cosinus von phi ist gleich, also werde ich diesen Wert von C auf die rechte Seite verschieben, ich werde die Wurzel von 3 einhalb erhalten. Der Sinus von phi wiederum wird 1/2. Wenn ich dies betrachte, sehe ich, dass der Cosinus positiv ist, der Sinus positiv ist, also bin ich im ersten Quadranten. Ich gehe zur Tangente über. Tangente phi ist der Sinus geteilt durch den Cosinus, also erhalte ich 1/2 auf Wurzel von 3 einhalb. Ich kann durch 2 erweitern, ich erhalte 1 auf Wurzel von 3. Man kann sogar durch Wurzel von 3 erweitern, das macht Wurzel von 3 Drittel, das ist ein Winkel, es ist der Wert eines bemerkenswerten Winkels, wenn ich nun Arcustangens nehme, aus Wurzel von 3 Drittel, wobei Wurzel aus 3 Drittel positiv ist, wird Arcustangens mir etwas ausgeben, das im ersten Quadranten ist. Und das ist super, denn es ist genau der Bereich, in dem ich meinen Winkel phi suche, und in Anbetracht der Tatsache, dass es ein Wert ist, der bemerkenswert war, weiß ich, dass hier der Winkel π/6 ergibt. Also kann ich schreiben: Antwort. Ich kann sagen, dass die Wurzel von 3 mal Sinus t minus den Cosinus t gegeben sind durch C, das heißt, 2 mal, Danach haben wir einen Sinus t genommen Omega t mit Omega gleich 1 und wir haben ein Minuszeichen genommen und der Winkel phi ist π/6 und dies ist die Antwort auf die Frage.

Notes

Summary

16m 13s

Exemple 2

Exemple

Superposer les deux oscillations harmoniques

$$f(t) := \sqrt{3}\sin 3t \qquad \text{et} \qquad g(t) := -2\cos 3t\,, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Betrachten wir ein zweites Beispiel. Wir werden diesmal zwei harmonische Schwingungen auf eine etwas andere Weise überlagern. Wir werden für f von t Wurzel aus 3 mal Sinus von 3 t nehmen, und für g von t werden wir minus 2 nehmen mal Cosinus 3 t. Erneut ist es wichtig hier festzustellen, dass die Winkelgeschwindigkeit 3 beide Male dieselbe ist, also überlagern wir zwei harmonische Schwingungen mit derselben Winkelgeschwindigkeit.

Notes

Summary

18m 05s

Exemple 2 : solution

Ansatz: $\sqrt{3}\sin 3t - 2\cdot\cos 3t = C\cdot\cos(3t+\varphi)$

$= C[\cos 3t\cdot\cos\varphi - \sin 3t\cdot\sin\varphi]$

$= C\cdot\cos\varphi\cdot\cos 3t - C\cdot\sin\varphi\cdot\sin 3t$

Gehen wir erneut mit einem Ansatz vor. Die erste Ausgangsschwingung war Wurzel von 3 mal Sinus 3 t und die zweite ist minus 2 mal Cosinus von 3 t. Wir möchten sie wie eine einzige harmonische Schwingung schreiben. Die Amplitude C werden wir versuchen, positiv zu wählen, wir werden einen Sinus und einen Cosinus nehmen können. Dieses Mal möchte ich einen Cosinus nehmen. Man muss Omega t nehmen plus oder minus phi, Omega ist hier gleich 3, also habe ich 3 t und man muss plus phi nehmen oder minus phi, dieses Mal werde ich zur Abwechslung plus phi nehmen. Ist der Ansatz einmal gemacht, werden die Berechnungen auf vollkommen ähnliche Weise ablaufen, wie die Berechnungen, die im Beispiel 1 gemacht wurden. Ich werde einen Additionssatz verwenden, dieses Mal für den Cosinus. Was bekomme ich heraus? Ich erhalte C, das multipliziert, also werde ich für den Cosinus cos cos minus sin sin erhalten, also Cosinus 3 t, der Cosinus phi multipliziert minus Sinus 3 t, der Sinus phi multipliziert, wenn wir ein bisschen die Terme sortieren, erhalten wir C mal Cosinus phi, der Cosinus 3 t multipliziert, das Minuszeichen und C mal Sinus phi, das Sinus 3 t multipliziert. Wir vergleichen erneut die Terme.

Notes

Summary

18m 34s

Exemple 2 : solution

Ansatz: $\sqrt{3}\sin 3t - 2\cdot\cos 3t = C\cdot\cos(3t+\varphi)$

$= C[\cos 3t\cdot\cos\varphi - \sin 3t\cdot\sin\varphi]$

$= \underbrace{C\cdot\cos\varphi}_{=-2}\cdot\cos 3t - \underbrace{C\cdot\sin\varphi}_{=-\sqrt{3}}\cdot\sin 3t$

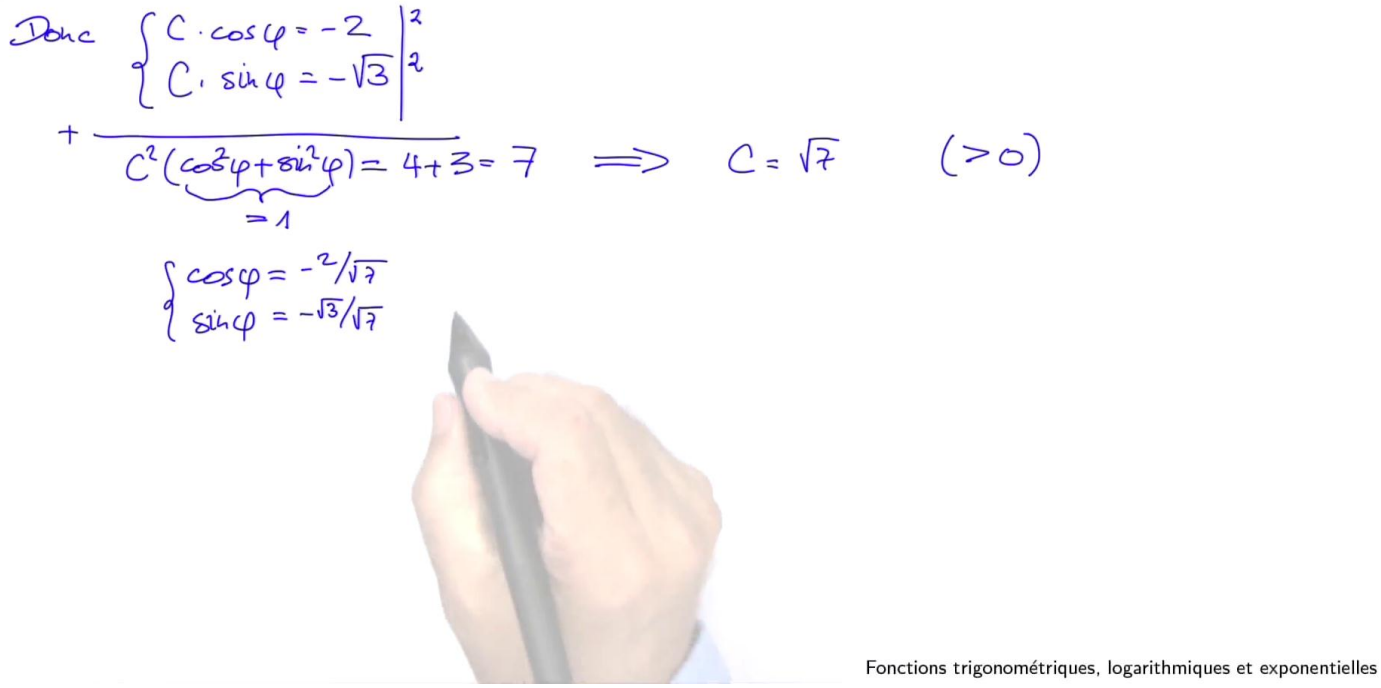
Wenn ich mir also ein bisschen dieses C mal Cosinus phi hier anschaue, es ist der Koeffizeint, der vor Cosinus 3 t steht, Cosinus 3 t, das ich hier wiederfinde, und dann kann ich diesen mit diesem -2 vergleichen. Wenn ich den Sinus 3 t nehme, hier ist der Koeffizient minus C mal Sinus phi, man muss ihn mit dieser Wurzel von 3 vergleichen, also kann ich es so schreiben. C mal Cosinus phi muss gleich -2 sein. Achten Sie auf das Zeichen, dieses Minus ist im Koeffizienten von Cosinus 3 t enthalten, und hier betrachte ich lediglich das C mal Sinus phi, hier fehlt das Minuszeichen, also werde ich für C mal Sinus phi minus Wurzel aus 3 nehmen, dann ist es perfekt. Wir werden nun dieses System betrachten. C mal cos phi gleich minus 2 und C mal sin phi gleich minus Wurzel aus 3. Wir schreiben also C mal Sinus phi gleich minus 2.

Notes

Summary

20m 02s

Exemple 2 : solution (suite et fin)



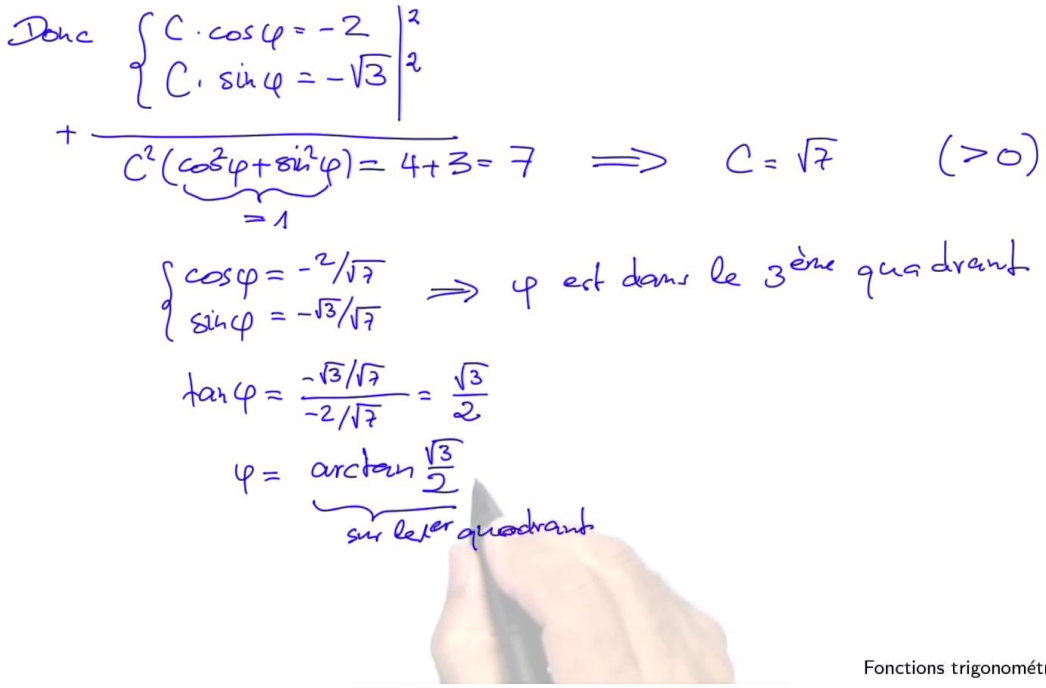
C mal Sinus phi gleich minus Wurzel aus 3 und wir betrachten das System, das durch diese beiden Gleichungen gebildet wird. Wir gehen so vor wie vorhin. Wir erheben diese zwei Gleichungen ins Quadrat und wir addieren die Terme links und die Terme rechts. Wir werden hier ein C Quadrat erhalten, das einen Cosinus Quadrat phi multipliziert plus einen Sinus Quadrat phi, und hier erhalten wir rechts minus 2 im Quadrat, das macht 4 minus Wurzel aus 3 im Quadrat, das macht 3. Die Summe aus 4 und 3 ergibt 7. Hier finden wir diesen Cosinus im Quadrat wieder plus sin im Quadrat, der immer 1 ist, ich habe also C Quadrat, der 7 ergibt. Ich werde für C die Wurzel aus 7 nehmen. Dies ist eine positive Lösung, und wir möchten schlicht und einfach einen positiven Koeffizienten haben, weil er wirklich die Amplitude darstellt. Wir schreiben nun erneut dieses System, bei dem ich den Wert von C kenne. Ich erhalte, dass der Cosinus von phi gleich minus 2 auf Wurzel aus 7 ist und der Sinus von phi ist gleich minus Wurzel aus 3 auf Wurzel aus 7. Also ist der Cosinus negativ, der Sinus ist negativ. Dies bedeutet, dass mein Winkel phi sich im dritten Quadranten befindet.

Notes

Summary

21m 18s

Exemple 2 : solution (suite et fin)



Dies bedeutet, dass ich versuchen werde, einen Winkel zu finden, der sich zwischen -π/2 und -π für phi befindet. Hier gehe ich zur Tangente über. Tangente phi ist der Quotient von Sinus und Cosinus. Also werde ich minus Wurzel aus 3 geteilt durch Wurzel aus 7 erhalten auf minus 2 geteilt durch Wurzel aus 7, das heißt, Wurzel aus 3 Halbe. Merken Sie sich gut, dass Sie diese Gleichung für Tangente phi sehr schnell erhalten können anhand des Ausgangssystems. Es genügt, die Terme links und die Terme rechts zu dividieren und Sie erhalten hier tatsächlich, das C wird sich vereinfachen, Tangente phi gleich minus Wurzel aus 3 auf minus 2, das hei, Wurzel aus 3 Halbe. Wenn ich nun den Winkel phi nehme in Form von Arcustangens der Wurzel aus 3 Halbe. Also, hier erhalte ich keinen Winkel auf dem dritten Quadranten, sondern er ist auf den ersten Quadranten. Und vom ersten Quadranten ausgehend, kann ich, um auf den dritten zu kommen, minus oder plus π nehmen, ich werde -π nehmen, um schlicht und einfach einen Winkel zu erhalten, der sich zwischen -π/2 und -π befindet. Ich werde π subtrahieren, hier ist mein Winkel phi.

Notes

Summary

22m 49s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = -2 \\ C\cdot\sin\varphi = -\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{matrix}|^2 \\ |_2\end{matrix}$

$+$

$C^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) = 4+3 = 7 \implies C = \sqrt{7} \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = -2/\sqrt{7} \\ \sin\varphi = -\sqrt{3}/\sqrt{7} \end{cases} \implies \varphi$ est dans le 3ème quadrant

$\tan\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}/\sqrt{7}}{-2/\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi = \underbrace{\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{sur le 1er quadrant}} - \pi$

Réponse : $\sqrt{3}\sin 3t - 2\cos 3t = \sqrt{7}\cos\left(3t + \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \pi\right)$

Dieses Mal ist es kein bemerkenswerter Wert, ich habe keine andere Möglichkeit, phi zu schreiben, außer dies so zu lassen, wie es ist, und ich gebe meine Antwort: Wenn ich die Wurzel aus 3 habe mal den Sinus von 3 t mal 2 mal den Cosinus von 3 t, kann ich dies als Wurzel von 7 schreiben, das ist mein C, es ist die Amplitude, die, wie wir gesagt haben, einen Cosinus multipliziert, diesmal ist der Winkel Omega t, also ist Omega gleich 3 mal t, wir haben ein Plus gewählt, also plus, und der Winkel phi ist hier Arcustangens Wurzel aus 3 einhalb minus π. Und dies ist die Antwort der vorgeschlagenen Übung.

Notes

Summary

24m 06s

Exemple 3

Exemple

Résoudre l'inéquation

$$\sin t - \sqrt{3}\cos t > \sqrt{2}, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Als drittes Beispiel werden wir diesmal keine Gleichung lösen, wir werden nicht einfach zwei harmonische Schwingungen überlagern. Wir werden eine Ungleichung betrachten. Sie lautet Sinus t minus Wurzel aus 3 Cosinus ist größer als Wurzel aus 2. Mit t als reeller Zahl. Der Bezug zu dem Kapitel, das wir gerade bearbeiten, ist, dass Sie hier auf der linken Seite eine Superposition von zwei Harmonische vorfinden mit einer Winkelgeschwindigkeit von 1 und anhand dieser Beobachtung werde ich dieses Problem angehen, also werde ich im ersten Schritt den Term nehmen, der auf der linken Seite ist, und diesen mit einem Ansatz umwandeln.

Notes

Summary

24m 50s

Exemple 3 : solution

Ansatz: $\sin t - \sqrt{3}\cos t = C \cdot \cos(t - \varphi)$

$= C[\cos t \cdot \cos\varphi + \sin t \cdot \sin\varphi]$

$= C \cdot \cos\varphi \cdot \cos t + C \cdot \sin\varphi \cdot \sin t$

Der Term links ist ein Sinus von t minus Wurzel aus 3 cos t. Es ist die Superposition / Überlagerung der beiden Harmonischen, und ich werde dies in Form einer einzigen Harmonischen schreiben. Also einer Amplitude C, die ich im Moment noch nicht kenne. Ich nehme einen Sinus und einen Cosinus. Ich möchte den Cosinus nehmen für Ungleichungen oder Gleichungen, wir werden sehen, dass dies ein bisschen den Vorteil einer etwas geschlosseneren Schreibweise der Lösungen hat. Und hier nehme ich Omega t plus oder minus phi, Omega ist gleich 1, also ist es t, und ich werde hier das Minuszeichen für phi nehmen, ich hätte natürlich auch das Pluszeichen für phi nehmen können, dies hätte kaum einen Unterschied gemacht. Der Additionssatz für den Cosinus ergibt C, der multipliziert, wir werden diesmal cos cos plus sin sin erhalten, hier plus, wegen des Minus, also Cosinus t mal Cosinus phi plus Sinus t Sinus phi. Ordnen wir dies ein bisschen, dies wird mir C mal Cosinus phi bringen, der Cosinus t multipliziert, plus C mal Sinus phi, der Sinus t multipliziert. Hier vergleichen wir erneut die Koeffizienten, wenn ich also hier schaue, hat der Sinus t eine Amplitude von 1.

Notes

Summary

25m 30s

Exemple 3 : solution

Ansatz: $\sin t - \sqrt{3}\cos t = C\cdot\cos(t-\varphi)$

$= C[\cos t\cdot\cos\varphi + \sin t\cdot\sin\varphi]$

$= \underbrace{C\cdot\cos\varphi}_{=-\sqrt{3}}\cdot\cos t + \underbrace{C\cdot\sin\varphi}_{=1}\cdot\sin t$

Einmal den Sinus t, also diese 1, ich muss ihn hier wiederfinden. Wenn ich den Cosinus von t betrachte, dieser hat einen Koeffizienten minus Wurzel aus 3, also muss ich hier dieses minus Wurzel aus 3 wiederfinden. Wir werden nun das System betrachten, das durch diese beiden Gleichungen gebildet wird.

Notes

Summary

26m 45s

Exemple 3 : solution (suite)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ C\cdot\sin\varphi = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} |^2 \\ |^2 \end{matrix}$

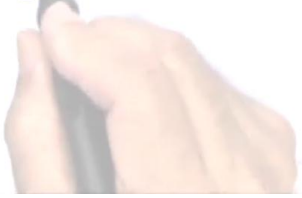
$+$

$C^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} = 4 \Rightarrow C = 2 \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi$ est sur le 2ème quadrant

$\tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



Also C mal Cosinus phi ist gleich minus Wurtel aus 3, das hier ist die erste, und C mal Sinus phi gleich 1. Wir erheben diese beiden Gleichungen ins Quadrat und berechnen die Summe. Wir werden hier ein C Quadrat erhalten mit cos im Quadrat plus sin im Quadrat phi. Dies ist immer dasselbe, hier werden wir 1 erhalten, und auf der rechten Seite werden wir 3 plus 1 erhalten, also 4, und daraus können wir folgern, dass C durch 2 gegeben ist, wenn wir eine positive Amplitude wählen, was wir bevorzugen. Mit diesem C gleich 2 trete ich in das Ausgangssystem ein, ich erhalte also den Cosinus von phi minus Wurzel aus 3 Halbe, der Sinus von phi ergibt 1/2. Die Zeichen, der Cosinus ist negativ, der Sinus ist positiv. Dieses Mal ist phi im zweiten Quadranten. Wenn ich die Tangente phi nehme, die Tangente phi ist gegeben durch den Sinus geteilt durch den Cosinus, also macht dies minus 1 auf Wurzel aus 3 oder, wenn Sie so wollen, minus Wurzel aus 3 Drittel, um vielleicht einen bemerkenswerten Wert zu erhalten, und phi kann ich auf die Art schreiben Arcustangens von minus Wurzel aus 3 Drittel. Der Arcustangens von einem negativen Wert wird mir einen Winkel ausgeben, der auf dem vierten Quadranten liegt.

Notes

Summary

27m 05s

Exemple 3 : solution (suite)

Donc $\begin{cases} C\cdot\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ C\cdot\sin\varphi = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} |^2 \\ |^2 \end{matrix}$

$+$

$C^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} = 4 \Rightarrow C = 2 \quad (>0)$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\sqrt{3}/2 \\ \sin\varphi = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \varphi$ est sur le 2ème quadrant

$\tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi = \underbrace{\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}_{\in\,]-\frac{\pi}{2},0]} + \pi = -\frac{\pi}{6}+\pi = \frac{5\pi}{6}$

Il suffit de résoudre : $2\cdot\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

Ich kann dies auch noch etwas genauer erklären, wenn dies vielleicht hilft, dieser Winkel wird zwischen -π/2 und 0 liegen. Es wird nicht 0 sein, weil dies einen Arcustangens von 0 erfordern würde, jedoch liegt dieser nicht auf dem richtigen Quadranten. Hier sind wir auf dem Quadranten Nummer 3. Wenn wir auf dem zweiten Quadranten sein wollen mit einer phi Zahl zwischen -π und π, bedeutet dies, dass der Winkel zwischen π/2 und π liegen muss. Dies kann ich erreichen, indem ich hier den Wert von π hinzufüge. Arcustangens von Wurzel aus 3 Drittel, dies ergäbe π/6. Mit Arcustangens minus Wurzel aus 3 Dritteln erhalte ich also -π/6, dies ist ein bemerkenswerter Wert, plus das π, also erhalte ich insgesamt 5π/6. Dies ermöglicht es mir nun, den Term zu schreiben, der sich auf der linken Seite befand, auf eine unterschiedliche Weise, und ich kann abschließen. Es genügt, zu lösen: Es gibt einen Faktor 2, das ist das C mal, wir haben uns für die Option entschieden, einen Cosinus Omega t zu nehmen. Der Omega t ist gleich 1, das macht t, wir hatten minus phi genommen, also macht dies hier minus 5π/6, und dies muss größer sein als die Wurzel aus 2. Dies ist das Problem, das noch gelöst werden muss.

Notes

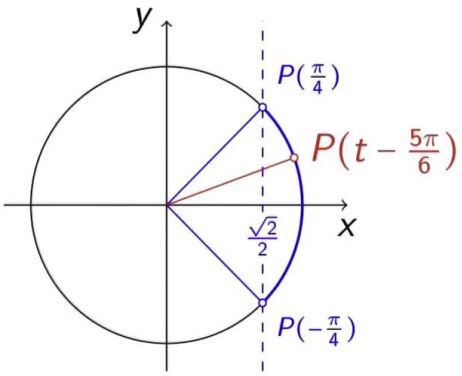
Summary

28m 54s

Exemple 3 : solution suite et fin)

Résolvons $2\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}/2$



Lösen wir dieses Problem. 2 mal Cosinus von t minus 5π/6 ist größer als Wurzel aus 2. Ich würde sagen, dass man diesen Faktor 2 noch auf die andere Seite verschieben kann, also kann ich auf ähnliche Weise sagen, man muss Cosinus von t minus 5π/6 ist größer als Wurzel aus einem Halben lösen. Wir müssen diese Situation auf dem Einheitskreis analysieren. Ich habe alles vorbereitet, ich habe hier ein Achsensystem x, y gezeichnet. Der Einheitskreis, der Wurzelwert von 2 einhalb, ungefähr 0,7 auf der x-Achse, könnte hier sein. Also muss der Cosinus größer sein. Wenn der Cosinus größer sein muss, bedeutet dies, dass der Winkel, t minus 5π/6, so platziert sein muss, dass ich mich auf dem Bogen befinde, der hier in blau markiert ist. Genau dort ist der Cosinus, also der Wert x der Koordinaten des entsprechenden Punktes P größer als die Wurzel aus 2 Halbe. Ich sollte mich hier am Ende des Bogens befinden. Wo sind die Grenzpositionen? Wurzel aus 2 Halbe ist ein bemerkenswerter Wert, ich weiß, dass ich für den Cosinus Wurzel aus 2 Halbe erhalte, auf zwei Arten, zum einen mit π/4, und zum anderen mit -π/4. Mein Winkel, t minus 5 π/6, muss zwischen -π/4 und π/4 enthalten sein.

Notes

Summary

30m 25s

Exemple 3 : solution suite et fin)

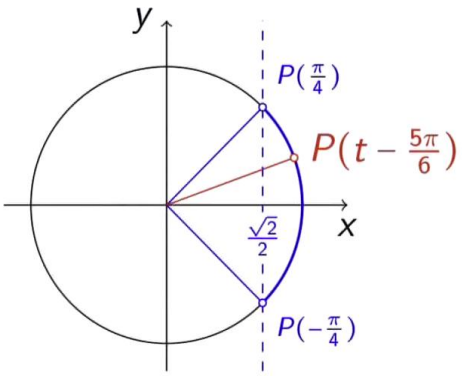
Résolvons $2\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}/2$

Donc

$-\frac{\pi}{4} + k.2\pi < t - \frac{5\pi}{6} < \frac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c.à.d.



Dies ist ein Lösungsbereich, weil ich in der Tat den Wert ändern kann für diesen Winkel hier in rot, mit einem Wert von 2π, und ich befinde mich erneut auf dem richtigen Bogen. Was ich also in der Tat erhalte, -π/4, kann ich hier addieren mit einem multiplen Ganzen von 2π, das kleiner als der fragliche Winkel sein muss, der -5π/6 betrug, und der kleiner war als π/4; und ich addiere ein Vielfaches von 2π. Was hier wichtig ist, ist, dass das Vielfache von 2 π das gleiche links und rechts sein muss. Wenn es nicht gleich ist, würde man Situationen außerhalb dieses blauen Bogens einbeziehen. k ist, wie üblich, ein vielfaches Ganzes, positiv oder negativ. Wir möchten natürlich die Werte von t erfahren. Wir können hier das t isolieren, also können wir diesen Term 5π/6 auf die andere Seite der Ungleichung verschieben. Dadurch erhalte ich, ich werde es ein Mal auf die andere Seite verschieben, für die erste Ungleichung ist das 5π/6, also addiere ich auf dieser Ungleichung links und rechts 5π/6, das ergibt 7π/12 plus k mal 2π, das kleiner als t ist, das wiederum kleiner ist, für die andere Ungleichung addiere ich rechts und links erneut 5π/6, dies führt mich zu 13π/12 plus k mal 2π, immer mit k in Z.

Notes

Summary

32m 05s

Exemple 3 : solution suite et fin)

Résolvons $2\cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(t-\frac{5\pi}{6}\right) > \sqrt{2}/2$

Donc

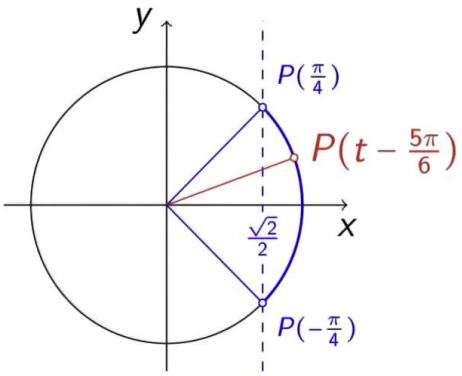
$$-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi < t-\frac{5\pi}{6} < \frac{\pi}{4}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

c.à.d.

$$\frac{7\pi}{12}+k2\pi < t < \frac{13\pi}{12}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Réponse :

$$S := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{7\pi}{12}+k\cdot 2\pi, \frac{13\pi}{12}+k2\pi\right[$$



Nun kann ich eine Antwort geben: Die Lösung meiner Gleichung, oder vielmehr meiner Ungleichung, ist gegeben durch S. Das sind alle Intervalle hier, die ich gerade bestimmt habe. Die Intervallgrenzen sind gegeben durch 7π/12 plus k mal 2π, das ist die niedrigste Grenze. Oben habe ich 13π/12 plus k mal 2π und ich kann hier alle Werte von k nehmen, die in Z sind, ich kann also sagen, dass ich hier die Einheit mit k in Z nehme. Und dies ist die Lösung der gegebenen Ungleichung.

Notes

Summary

33m 42s

Interprétation géométrique : introduction

On considère les deux oscillations harmoniques

$$f(t) = A \sin \omega t \quad \text{et} \quad g(t) = B \cos \omega t, \qquad A, B > 0.$$

Nous allons donner une interprétation géométrique de la superposition de ces oscillations harmoniques sous la forme

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi).$$

So, nach diesen drei Beispielen, welche die Anwendung der Superposition von harmonischen Schwingungen veranschaulichen, möchte ich heute diesen Vortrag mit einer geometrischen Interpretation einer solchen Superposition abschließen. Wir werden die harmonische Schwingung A mal Sinus Omega t betrachten und die zweite harmonische Schwingung B mal Cosinus Omega t. Wir haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit, wir werden gegebene positive Werte A und B nehmen. Und wir werden überlagern und die Lösung suchen in Form von C mal, wir hätten auch den Cosinus nehmen können, ich habe Sinus genommen, den Sinus Omega t, und ich habe plus phi genommen. Wir werden einmal versuchen, diese Gleichung auf geometrische Weise zu lösen.

Notes

Summary

34m 28s

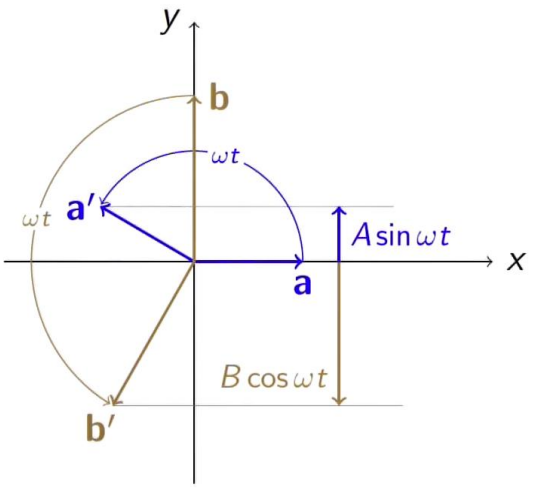
Interprétation géométrique

Soit $\mathbf{b}$ le vecteur lieu de coordonnées

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{b}$ du même angle ωt, on obtient un vecteur $\mathbf{b}'$ dont la projection sur l'axe des y vaut

$$B \cos \omega t .$$



Dazu gehen wir folgendermaßen vor: Wir beginnen mit dem ersten Term, der den Term in A enthält, also A mal Sinus Omega t. Wir versuchen zu sagen: Wo könnte ich ihn sehen um die Zeichnung, die auf dem Achsensystem x, y ist, wo wird eins eingeschlossen sein, ich habe es hier nicht eingezeichnet, aber ein Einheitskreis mit Radius 1. Also gehen wir auf die folgende Weise vor: Wir werden einen Vektor kleines a nehmen, dessen Komponenten gegeben sind durch A mit Großbuchstaben und 0. A mit Großbuchstaben ist eine Komponente, die gegeben ist durch den ersten Term, die von der Art A mal Sinus Omega t war. Diesen Vektor a zeichne ich hier, Null A mit Großbuchstaben, und wenn ich die Größe betrachten will, A mal Sinus Omega t, also, das ist einfach. Es genügt, diesen Vektor a des Winkels Omega t zu drehen, dann sehe ich auf der Vertikalen A mal Sinus Omega t. Für den zweiten Term, der von der Art B mal Cosinus Omega t war. Also, ich erinnere Sie daran, dass man auch einen Cosinus auf der Vertikalen ausmachen kann, als Projektion auf der y-Achse, indem man den entsprechenden Winkel ausgehend von der y-Achse misst. Das heißt, wir werden hier nicht den Vektor der Konstanten 0 nehmen, wir werden null und das B nehmen.

Notes

Summary

35m 10s

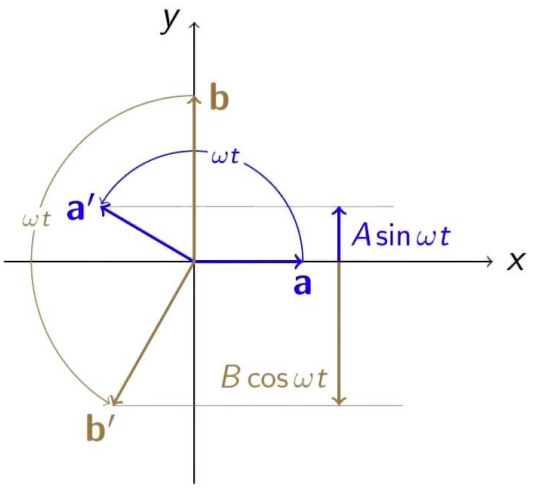
Interprétation géométrique

Soit $\mathbf{b}$ le vecteur lieu de coordonnées

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{b}$ du même angle ωt, on obtient un vecteur $\mathbf{b}'$ dont la projection sur l'axe des y vaut

$$B \cos \omega t .$$



Das ist also der Vektor, der hier auf der y-Achse in B ist. Und wir drehen diesen Vektor desselben Winkels Omega t und dann werden wir auf der Vertikalen B mal den Cosinus Omega t sehen, weil dieser Winkel tatsächlich Omega t entspricht plus π/2. Dies ermöglicht es, den Cosinus auch auf der Vertikalen auszumachen.

Notes

Summary

36m 27s

Interprétation géométrique

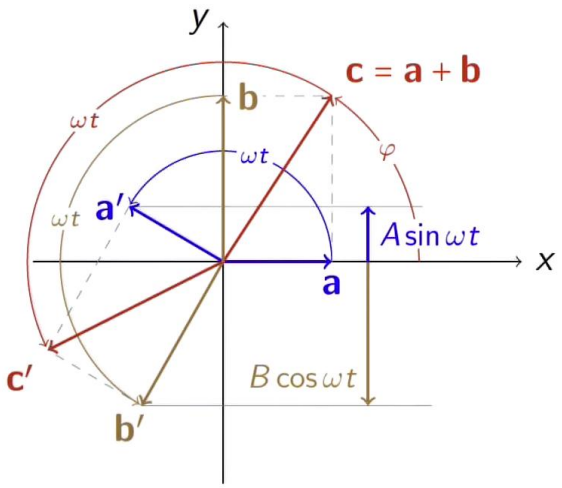
Soit $\mathbf{c}$ le vecteur défini par

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Sa norme vaut $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{A^2 + B^2}$

et on note φ l'angle qu'il forme avec l'axe des x.

En faisant tourner ce vecteur $\mathbf{c}$ du même angle ωt, on obtient le vecteur $\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$.



Führen wir nun den dritten Vektor ein, dieses Mal werden wir den Vektor c einführen, der bestimmt wird durch die Summe a plus b. Also, ich habe hier meinen Vektor a, der Vektor b ist immer in derselben Position, ich berechne die Summe, dies tue ich mithilfe dieses Rechtecks. Hier habe ich den Vektor c. Also, dieser Vektor c wird eine Länge haben, seine Norm, wenn Sie so wollen, sie entspricht der Wurzel von A Quadrat + B Quadrat. Hier entdeckt man, dass dies genau der Ausdruck ist, den wir für C mit Großbuchstaben gefunden haben. Wenn man die beiden harmonischen Schwingungen überlagert. Des Weiteren haben wir hier, dass C einen Winkel phi bildet. Drehen wir diesen Vektor c zusammen mit den Vektoren a und b dieses Winkels Omega t. Wir werden also hier einen Primvektor erhalten, der wiederum die Summe von a Prim plus b Prim ist. Die Summe der Vektoren wird durch diese Rotationsbewegung aufgehoben.

Notes

Summary

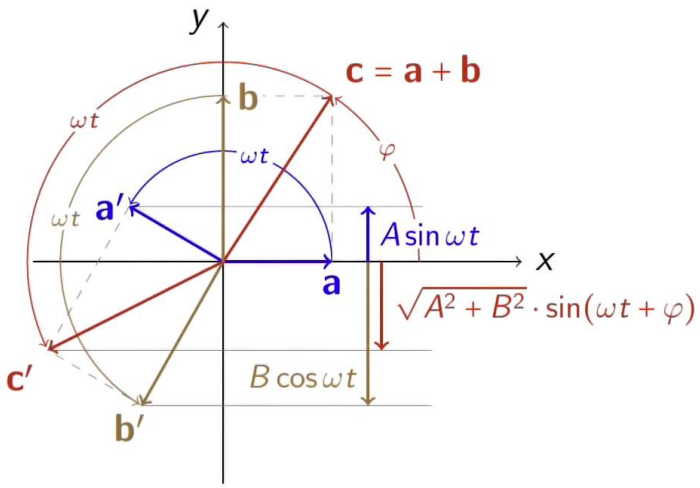
36m 51s

Interprétation géométrique

L'angle que forme le vecteur $\mathbf{c}'$ avec l'axe des x vaut $\omega t + \varphi$.

La projection du vecteur $\mathbf{c}'$ sur l'axe des y vaut donc

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$



Wenn wir versuchen, die Situation zusammenzufassen, können wir Folgendes sagen: Wenn ich mir anschaue, welcher der Winkel ist, der durch c Prim mit der x-Achse gebildet wird, habe ich diesen Winkel phi, den ich zu Beginn hatte, und ich habe die Figur von Omega t rotiert. Der Winkel, der nun dem c Prim entspricht, der entsprechende Winkel, ist Omega t plus phi. Es ist noch eine der Größen, die wir in unserer Formel wiederfinden möchten. Wenn ich nun den Vektor c Prim auf die y-Achse projiziere, hier habe ich den roten Winkel, der gemessen wurde, ausgehend von der x-Achse, dann werde ich einen Sinus sehen. Ich werde den Sinus des Winkels Omege t plus phi sehen und diesen mit der Länge dieses Vektors multiplizieren, der Wurzel von A Quadrat plus B Quadrat war.

Notes

Summary

37m 52s

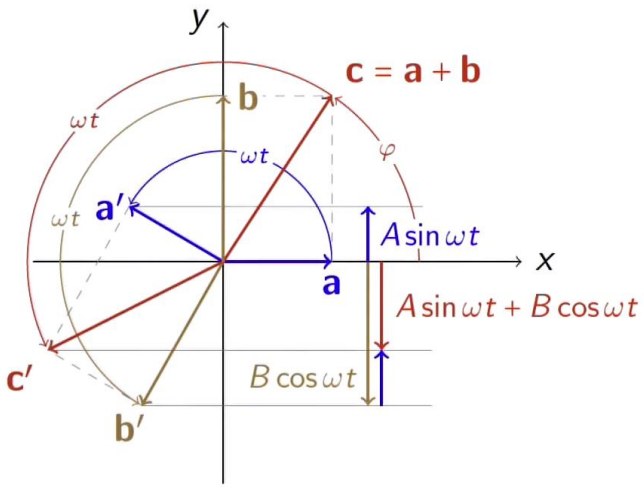
Interprétation géométrique

En comparant les projections des vecteurs $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ et $\mathbf{c}'$, sur l'axe des y,

(la projection du vecteur $\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ est égale à la somme des projections des vecteurs $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{b}'$),

on en déduit que

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$



Vergleichen wir nun die Projektionen der drei Vektoren: A Prim, b Prim und c Prim. An dieser Stelle erinnere ich Sie daran, dass die Projektion des Vektors c Prim auf der y-Achse, das ist der rote Bereich, ausgegeben wird als Summe der Projektionen von a Prim und b Prim. Wir können also schließen, dass A mal Sinus Omega t, das ist die Projektion des Prims, plus B mal den Sinus Omega t, gegeben ist durch diesen roten Bereich, der in der Tat, wie wir wissen, eine Projektion von c Prim ist, das heißt, Wurzel von A Quadrat plus B Quadrat mal Sinus von Omega t plus phi. Was wir uns merken können, ist, dass, wenn wir den Vektor A mit Großbuchstaben null zeichnen, den Vektor null B mit Großbuchstaben, wenn wir diese beiden Vektoren addieren, erhalten wir hier einen Vektor c, der die richtige Länge hat, A Quadrat plus B Quadrat, und der Winkel phi, der hier ein Phasenverschiebungswinkel ist, und gegeben durch den entsprechenden Winkel, also stellen wir hier fest, dass die Tangente von phi gleich B auf A sein muss.

Notes

Summary

38m 43s

Superposition d'oscillations harmoniques

Ce que nous avons appris :

- le principe de superposition d'oscillations harmoniques ;
- quelques exemples d'applications ;
- une interprétation géométrique de la superposition.

Prochaine étape :

- Construction du graphe d'une oscillation harmonique
  - amplification d'une fonction,
  - amplification de l'argument d'une fonction,
  - translation de l'argument d'une fonction,
  - exemple.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ziehen wir ein Fazit aus diesem Vortrag. Wir haben gelernt, harmonische Schwingungen zu überlagern, wir haben einige Anwendungsbeispiele solcher Superpositionen gegeben. Auch haben wir eine Ungleichung gelöst und schließlich haben wir diese Superposition geometrisch interpretiert. Beim nächsten Mal folgt jener Teil, der das Kapitel 5 abschließt, wir werden uns auf den Aufbau des Graphen für diese harmonischen Schwingungen interessieren. Wir werden von der Amplifikation einer Funktion sprechen, von der Amplifikation des Argumentes einer Funktion. Wir werden von der Übertragung des Arguments einer Funktion sprechen, und wir werden dies alles anhand von Beispielen veranschaulichen, die an das Thema der harmonischen Schwingungen geknüpft sind. Ich danke Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit. Bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

39m 50s