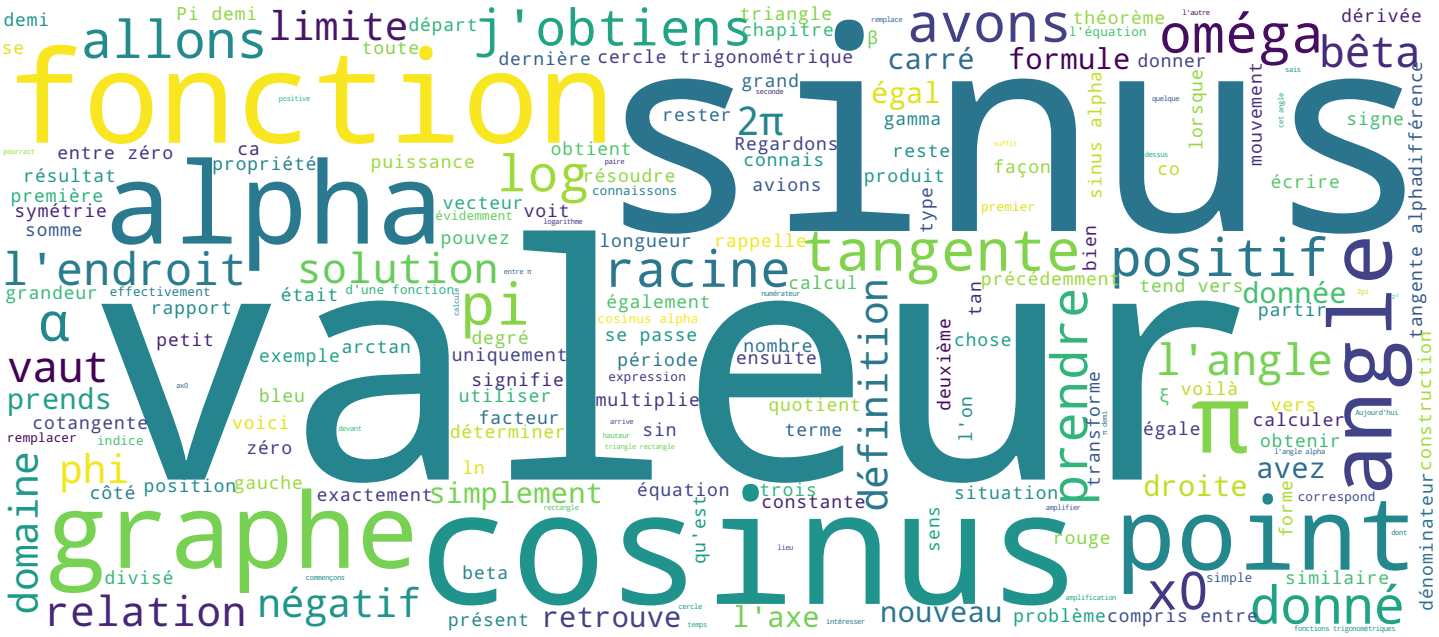
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Oscillations harmoniques

5.3 Le graphe d'une oscillation harmonique

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

La multiplication d'une fonction par une constante

Considérons une fonction

$$f : x \mapsto f(x),$$

définie sur son domaine de définition $\mathbf{D}_f$, et son graphe

$$\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{D}_f\}.$$

Comment peut-on en déduire le domaine de définition et le graphe de la fonction

$$a \cdot f : x \mapsto af(x),$$

a étant un réel non nul ?

Bonjour. La dernière fois nous avions parlé d'oscillation harmonique c'est-à-dire de fonction qui était sous la forme d'une constante fois un sinus ou un cosinus et un argument de la forme oméga T plus phi (ωt + φ) Aujourd'hui nous allons nous intéresser au graphe d'une oscillation harmonique. Nous allons le faire dans un cadre relativement général c'est-à-dire que nous allons considérer à présent une fonction *f* qui transforme un *x* en *f(x)* une fonction qui est définit sur un domaine que je dénomme *Df* comme usuellement et je regarde le graphe de cette fonction donc ça c'est l'ensemble des points avec des coordonnés *x y*. Le *x* doit être dans le domaine de définition quand à la valeur de *y* elle est donnée par la valeur de la fonction *f* à l'endroit *x*. Nous allons supposer que nous avons ce graphe pour la fonction *f* qui est donnée et nous nous posons le problème suivant : comment peut on en déduire le domaine de définition et le graphe *a f* ? *a* est une constante réelle non nulle la fonction *a f* quand à elle, elle va transformer un *x* non pas en *f(x)* mais elle va prendre comme valeur *a* fois *f(x)*.

Notes

Summary

0m 03s

La multiplication d'une fonction par une constante

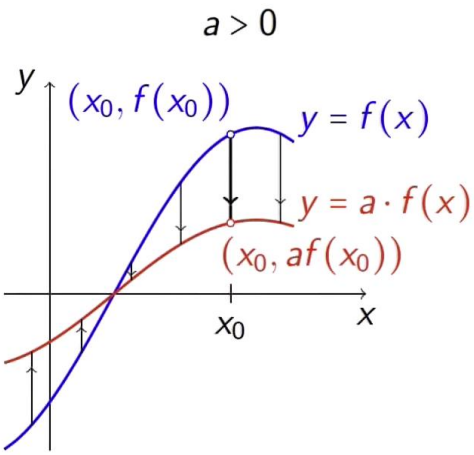
La fonction $a \cdot f$ est définie comme suit :

1. on choisit un x_0
2. on prend son image par f : $f(x_0)$
3. on multiplie celle-ci par a : $af(x_0)$.

Remarquons que x_0 doit appartenir à $\mathbf{D}_f$.

On en déduit que

- $\mathbf{D}_{a \cdot f} = \mathbf{D}_f$
- $\mathcal{G}_{a \cdot f}$ s'obtient par amplification par a de $\mathcal{G}_f$ selon l'axe des y.



Alors la solution de ce problème la voilà- ici le graphe, de la fonction *f(x)*, en bleu. Première étape je choisis un point *x0*, il est ici. Deuxième étape je regarde à la valeur *f(x0)*, la valeur de *x0* elle est donnée par cette valeur *y* au dessus de ce point. Je dois multiplier cette valeur par la constante *a*, alors, dans le graphe on a prit *a* positif mais *a* est située entre zéro et un donc si je multiplie par *a* cette valeur de *y* ici je vais obtenir *a* fois cette valeur *y* donc j'obtiens ici exactement la valeur *a* fois *f(x0)* et ça c'est la valeur qui correspond à la fonction *af* à l'endroit *x0*. Donc la situation est la suivante; pour obtenir le graphe de *G* de *af* je pars depuis le graphe en bleu et j'amplifie par *a* ce graphe en bleu et je fais cette amplification en direction de l'axe des *y*.

Notes

Summary

1m 15s

La multiplication d'une fonction par une constante

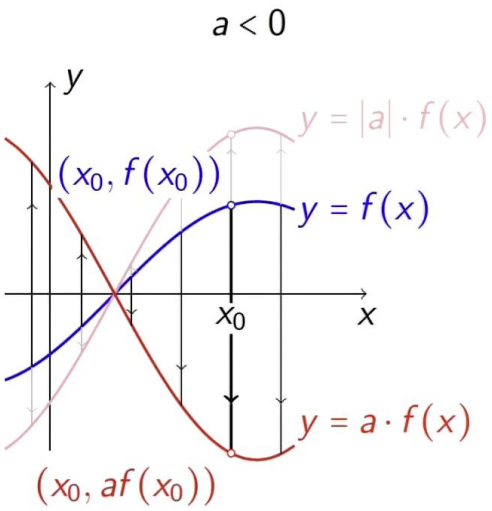
La fonction $a \cdot f$ est définie comme suit :

1. on choisit un x_0
2. on prend son image par f : $f(x_0)$
3. on multiplie celle-ci par a : $af(x_0)$.

Remarquons que x_0 doit appartenir à $\mathbf{D}_f$.

On en déduit que

- $\mathbf{D}_{a \cdot f} = \mathbf{D}_f$
- $\mathcal{G}_{a \cdot f}$ s'obtient par amplification par a de $\mathcal{G}_f$ selon l'axe des y .



Ici vous avez ce qui arrive si *a* est négatif, on fait exactement la même construction mais ici si j'amplifie cette valeur de *y* avec une valeur négative, une valeur négative qui, dans le cas présent est de l'ordre de grandeur moins un virgule cinq donc cette valeur de *y* multipliée là, on aurait fois plus un virgule cinq (+1,5) mais en fait j'ai fois moins un virgule cinq (-1,5) donc je me retrouve avec une valeur ici en bas mais la construction est tout à fait la même. Il faut amplifier avec le facteur *a* le graphe de *Gf*, il faut faire cette amplification selon l'axe des *y*. Si vous voulez utiliser un terme plus scientifique vous pouvez dire que vous avez ici une affinité, une affinité qui a un axe, qui a l'axe des *x*, qui a une direction, qui a l'axe des *y* et qui a un factor qui est celui donné par la constante *a*.

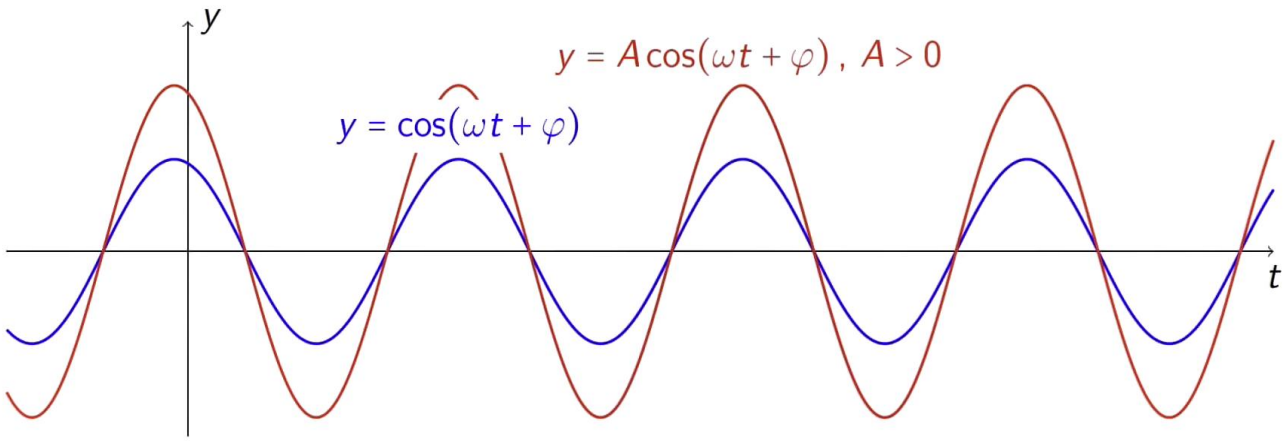
Notes

Summary

2m 31s

Cas d'une fonction harmonique

$$f : t \mapsto \cos(\omega t + \varphi) \qquad A \cdot f : t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)\,,$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors regardons ce que ça donne pour une fonction harmonique; je vais partir depuis une fonction harmonique simple, cosinus oméga T plus phi (ωt + φ) voici son graphe, pour l'instant on ne s'intéresse pas tellement à comment on obtient ce graphe- il est donné et nous aimerons déduire depuis ce graphe- le graphe de la fonction *a* fois cosinus oméga T plus phi, c'est-à-dire qu'on aimerait comprendre ici que fait l'amplitude *a* ? Alors si *a* est positif, voilà ce qui arrive, simplement chaque valeur de y est multipliée par ce *a* positif, ici le *a* est plus grand que un c'est-à-dire que on a effectivement un allongement vertical qui a lieu.

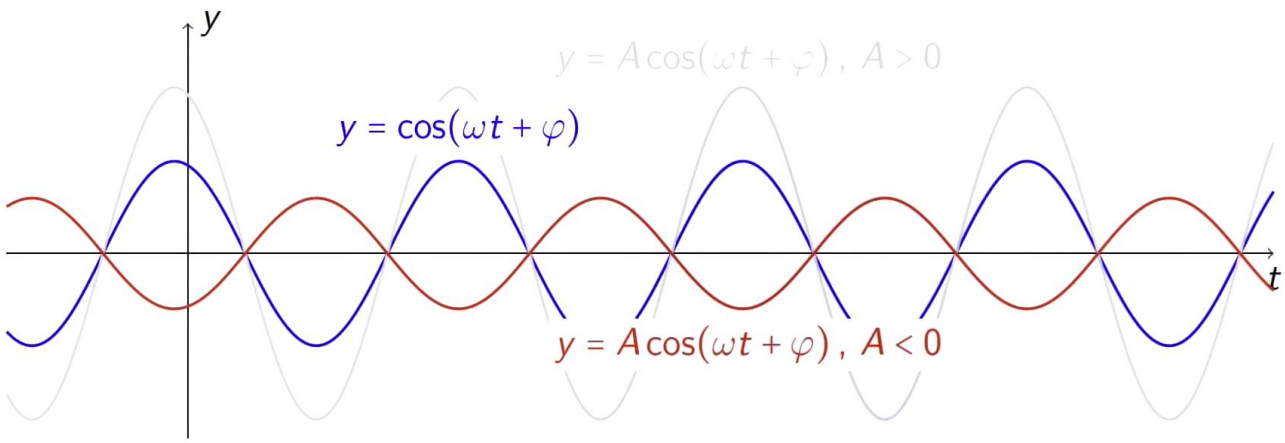
Notes

Summary

3m 24s

Cas d'une fonction harmonique

$$f : t \mapsto \cos(\omega t + \varphi) \qquad A \cdot f : t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)\,,$$



Regardons ce qui se passe si *a* est négatif mais compris entre zéro et moins un; peut être quelque chose comme zéro virgule cinq, cette fois-ci la valeur *y* est multipliée par ce *a* négatif et on obtient donc l'oscillation en rouge ici.

Notes

Summary

4m 04s

La multiplication dans l'argument d'une fonction

Considérons une fonction

$$f : x \mapsto f(x),$$

définie sur son domaine de définition $\mathbf{D}_f$, et son graphe

$$\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{D}_f\}.$$

Comment peut-on en déduire le domaine de définition et le graphe de la fonction

$$f_{\cdot a} : x \mapsto f(ax),$$

a étant un réel non nul ?

Considérons à présent un deuxième problème : On repart depuis la situation que nous avions, donc une fonction, son graphe, la fonction de sa ?, le graphe on va le redessiner en bleu. Cette fois-ci cependant j'aimerais déduire depuis le graphe de cette fonction *f*, le graphe d'une autre fonction que je dénomme *f* avec indice fois *a*. Une fonction qui transforme le *x*, non pas en *f(x)* mais en *f* à l'endroit *a* fois *x*. *a* est à nouveau une constante réelle non nulle.

Notes

Summary

4m 22s

La multiplication dans l'argument d'une fonction

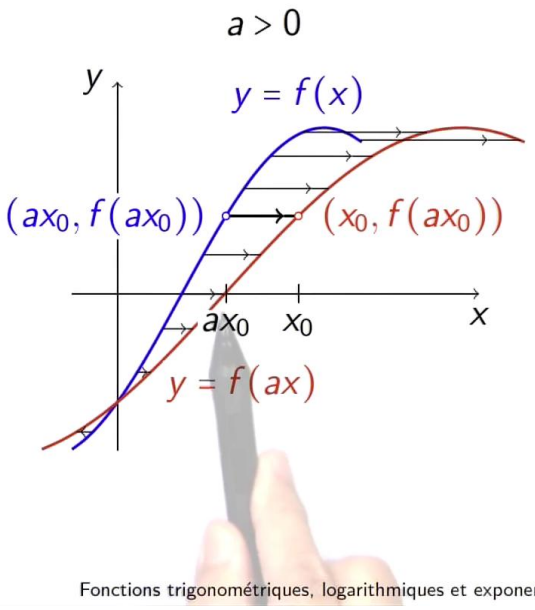
La fonction $f_{.a}$ est définie comme suit :

1. on choisit un x_0
2. on le multiplie par a : ax_0
3. on en prend l'image par f : $f(ax_0)$
4. on associe celle-ci à x_0 : $f(ax_0)$.

Remarquons que ax_0 doit appartenir à $\mathbf{D}_f$.

On en déduit que

- $\mathbf{D}_{f_{.a}} = \{x \mid ax \in \mathbf{D}_f\}$
- $\mathcal{G}_{f_{.a}}$ s'obtient par amplification par $\frac{1}{a}$ de $\mathcal{G}_f$ selon l'axe des x .



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On procède de façon similaire à ce que nous avons fait la dernière fois, donc, on choisit un *x0* ce qui est fait ici. On va partir avec, comme précédemment, le graphe en bleu pour la fonction *f(x)*, on va supposer dans ce graphe ou dans ce dessin que je fais là, que *a* est positif donc je pars depuis *x0*, alors vu que la fonction dont je cherche, le graphe est du type *f* à l'endroit *a* fois *x* donc depuis *x0* je vais m'intéresser à la valeur *a* fois *x0*. Alors ici le *a* dans ce graphe est positif mais il est contenu entre zéro et un, donc si je multiplie ce *x0* par ce *a* je me retrouve par exemple, quelque part ici. Ensuite je calcule la valeur de la fonction *f* à l'endroit *ax0* ça c'est là, à l'endroit *ax0* cette fonction *f* prend la valeur *ax0* et ça, ce *f* à l'endroit *ax0* c'est la valeur de la fonction *f* avec l'indice fois *a* donc la fonction rouge à l'endroit *x0* donc il faut déplacer ce point horizontalement au dessus de *x0*.

Notes

Summary

4m 51s

La multiplication dans l'argument d'une fonction

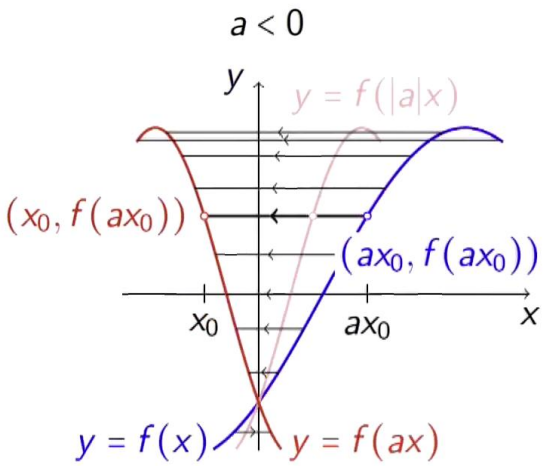
La fonction $f_{.a}$ est définie comme suit :

1. on choisit un x_0
2. on le multiplie par a : ax_0
3. on en prend l'image par f : $f(ax_0)$
4. on associe celle-ci à x_0 : $f(ax_0)$.

Remarquons que ax_0 doit appartenir à $\mathbf{D}_f$.

On en déduit que

- $\mathbf{D}_{f_{.a}} = \{x \mid ax \in \mathbf{D}_f\}$
- $\mathcal{G}_{f_{.a}}$ s'obtient par amplification par $\frac{1}{a}$ de $\mathcal{G}_f$ selon l'axe des x .



Si on fait ça pour tout les points sur le graphe bleu, on a dessiné ici quelques flèches qui montre ce qui se passe, on voit que les points depuis le graphe en bleu se déplacent horizontalement, donc nous allons avoir un effet le long de l'axe des *x*, c'est ce que on note ici et on a une amplification, donc on multiplie cette fois ci chaque valeur de *x*, on la multiplie et le facteur de multiplication on le voit le mieux ici, il faut obtenir en sorte que ce point sur la courbe bleue va sur le point de la courbe rouge, donc le *ax0* doit aller en *x0*, donc il faut amplifier par un sur *a* pas par un *a1* sur *a* ? c'est l'amplificateur qu'il faut prendre. Petite remarque ici; si vous transformez non seulement les points sur la courbe bleue de cette façon, si vous transformez tous les points du plan de cette façon et si vous vous imaginez que le domaine de définition de la fonction bleue *f* est marquée sur l'axe des *x*, si vous déplacez ces marquages alors vous allez obtenir en même temps le domaine de définition de la fonction *f* avec indice fois *a*.

Notes

Summary

6m 01s

La multiplication dans l'argument d'une fonction

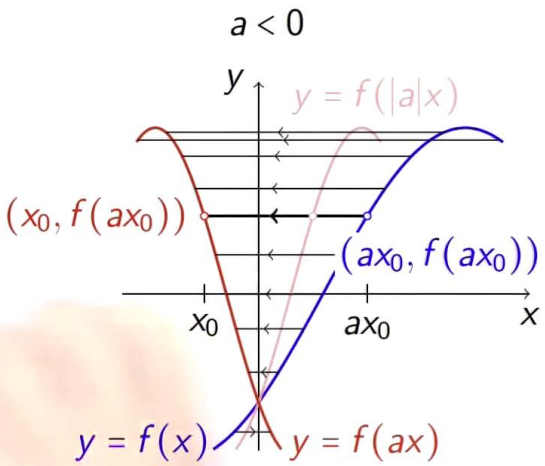
La fonction $f_{.a}$ est définie comme suit :

1. on choisit un x_0
2. on le multiplie par a : ax_0
3. on en prend l'image par f : $f(ax_0)$
4. on associe celle-ci à x_0 : $f(ax_0)$.

Remarquons que ax_0 doit appartenir à $\mathbf{D}_f$.

On en déduit que

- $\mathbf{D}_{f_{.a}} = \{x \mid ax \in \mathbf{D}_f\}$
- $\mathcal{G}_{f_{.a}}$ s'obtient par amplification par $\frac{1}{a}$ de $\mathcal{G}_f$ selon l'axe des x .



Ici vous avez la construction si *a* est négatif, si *a* est négatif, on part depuis une valeur *x0* qui est ici négative*, le *a* fois *x0* va être du côté positif, on prend la valeur de la fonction et on ramène cette valeur au dessus de *x0*, on fait cela pour tous les points du graphe, on voit que la règle reste la même, le graphe de *f* indice fois *a* s'obtient par amplification, le facteur est le même- un sur *a*, selon l'axe des *x*.

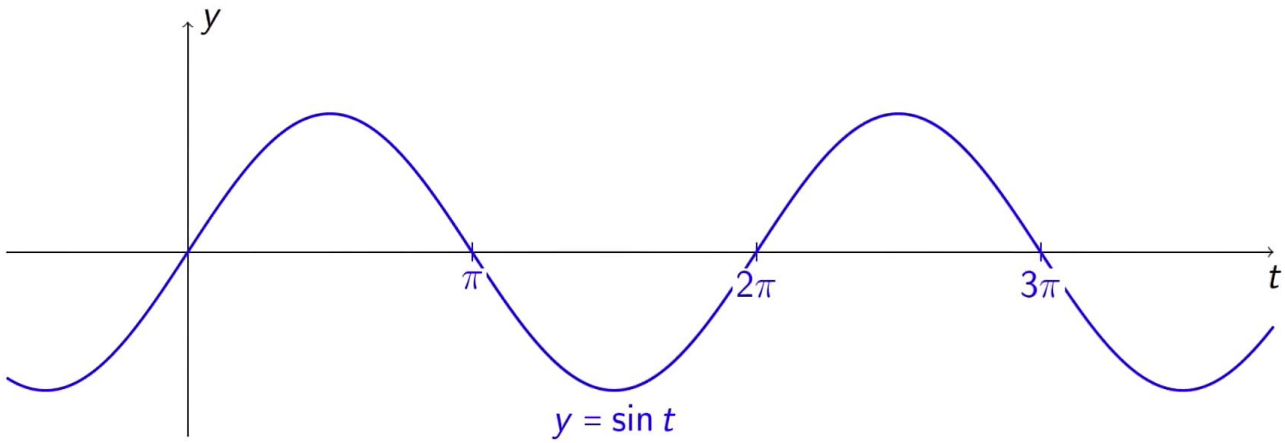
Notes

Summary

7m 15s

Cas d'une fonction harmonique

$$f : t \mapsto \sin t \qquad f_\omega : t \mapsto \sin \omega t ,$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors, regardons ce que cela donne de nouveau pour une fonction harmonique, prenons une fonction harmonique cette fois ci très simple dont nous connaissons le graphe, c'est-à-dire, la fonction qui transforme *t* en sinus *t*. Ici vous avez le graphe, le premier zéro, pi, le deuxième, 2 pi, la valeur maximale : un, minimale : moins un.

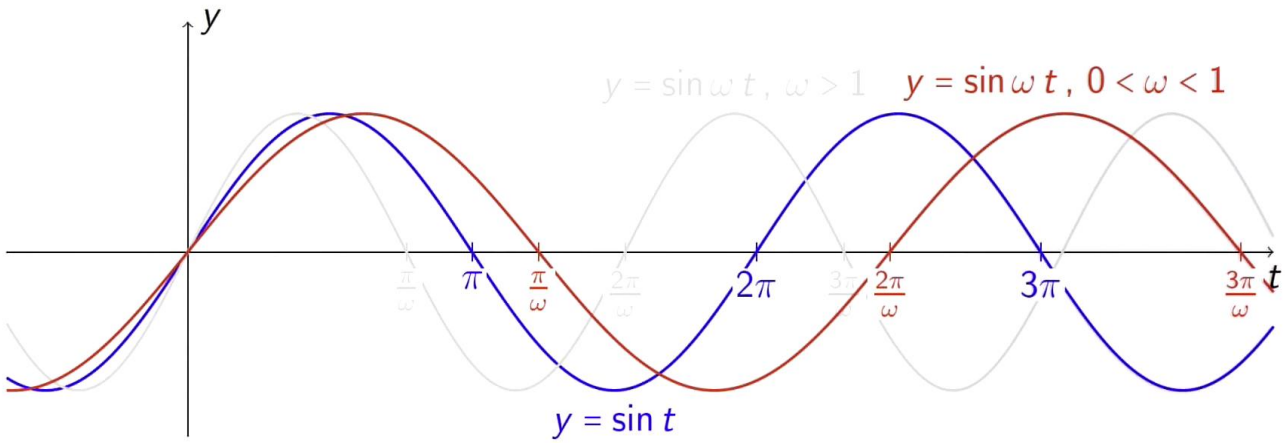
Notes

Summary

7m 48s

Cas d'une fonction harmonique

$$f : t \mapsto \sin t \qquad f_\omega : t \mapsto \sin \omega t ,$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Et nous essayons de déduire maintenant depuis ce graphe, le graphe de la fonction sinus oméga fois *t*, alors commençons par prendre une valeur de oméga plus grande que un, nous avons donc amplifié selon l'axe des *x* d'un facteur d'un sur oméga à un sur oméga qui devient plus petit que un, donc nous avons en quelque sorte compression de la courbe bleue pour donner la courbe rouge. La valeur *x* de pi devient pi sur oméga, le facteur d'amplification est un sur oméga donc on le retrouve ici, le 2 pi passe en 2 pi sur oméga, etc. On voit aussi que la période de la fonction bleue qui vaut 2 pi, devient maintenant une période qui vaut 2 pi sur oméga. Regardons ce qui se passe si oméga est compris entre zéro et un, si oméga est compris entre zéro et un il faut allonger d'un facteur un sur oméga, alors un sur oméga est plus grand que un alors cette fois ci il y a étirement horizontal, c'est-à-dire que par exemple ce point pi ici, où la fonction s'annule, il est déplacé vers la droite, il est à l'endroit pi sur oméga avec un oméga justement qui est plus petit que un, donc pi sur oméga devient plus grand que pi. Donc cette fois ci il y a élongation horizontale du graphe.

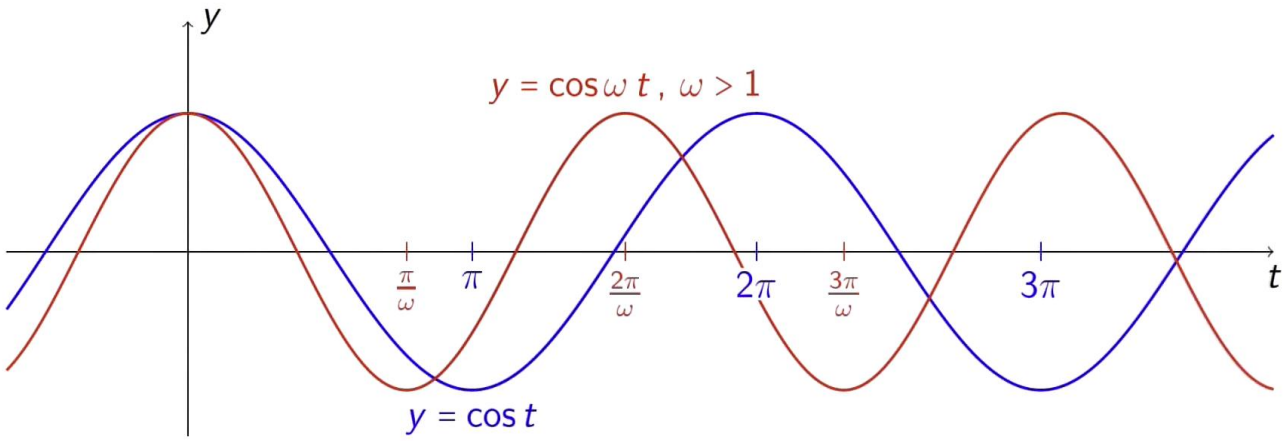
Notes

Summary

8m 07s

Cas d'une fonction harmonique

$$f : t \mapsto \cos t \qquad f_\omega : t \mapsto \cos \omega t ,$$



Pour le cosinus on peut observer les phénomènes tout-à-fait similaires, donc là vous avez le cosinus qui prend la valeur de un à l'origine qui termine une période également au bout de 2pi, si on prend oméga plus grand que un il faut amplifier d'un facteur un sur oméga qui est compris entre zéro et un le long de l'axe des *x* donc il y a compression de ce mouvement et si le oméga est compris entre zéro et un il y a élongation de ce mouvement, c'est la même conclusion que pour le sinus.

Notes

Summary

9m 24s

L'addition dans l'argument d'une fonction

Considérons une fonction

$$f : x \mapsto f(x),$$

définie sur son domaine de définition $\mathbf{D}_f$, et son graphe

$$\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{D}_f\}.$$

Comment peut-on en déduire le domaine de définition et le graphe de la fonction

$$f_{+a} : x \mapsto f(x + a),$$

a étant un réel non nul ?

Alors, retournons nous maintenant vers un troisième problème; on repart depuis la situation d'une fonction *f* avec son domaine et son graphe donné et nous aimerions à présent déduire le graphe d'une fonction que j'ai appelé *f* avec un indice plus *a*, une fonction qui transforme *x* en, non pas *f(x) mais *f* à l'endroit *x* plus *a* *a* est de nouveau une constante réelle non nulle.

Notes

Summary

9m 54s

L'addition dans l'argument d'une fonction

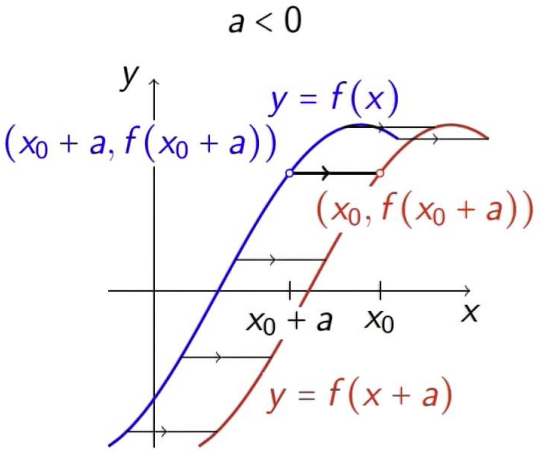
La fonction f_{+a} est définie comme suit :

1. on choisit un x_0
2. on lui ajoute a : $x_0 + a$
3. on en prend l'image par f : $f(x_0 + a)$
4. on associe celle-ci à x_0 : $f(x_0 + a)$.

Remarquons que $x_0 + a$ doit être dans $\mathbf{D}_f$.

On en déduit que

- $\mathbf{D}_{f_{+a}} = \{x \mid x + a \in \mathbf{D}_f\}$
- $\mathcal{G}_{f_{+a}}$ s'obtient par translation de $-a$ de $\mathcal{G}_f$ selon l'axe des x.



Alors la construction suit les idées que nous avons développées précédemment donc je dois regarder ce qui l'advient avec *f* à l'endroit *x0* plus *a*, si *x0* est un point fixe donc je prends un *x0* ici, ça c'est la première étape, je lui ajoute *a*, donc je souhaite être en *x0* plus *a*. Je calcule la valeur de la fonction *f* donc en bleue, le graphe il est donné, ça c'est le graphe de *f* qui est donné, donc ici j'ai la valeur de la fonction *f* à l'endroit *x0* plus *a* et ça c'est la valeur de la fonction rouge prise à l'endroit *x0* pas *x0* plus *a* donc je dois déplacer ce point horizontalement vers le point *x0* plus *a*. SI je fais cette construction pour plusieurs points on obtient le graphe de la fonction *f* indice plus *a*. Alors la conclusion, comment faire; elle est très simple, il suffit de translater horizontalement et la quantité de translation elle est donnée par la grandeur moins *a* c'est-à-dire que si *a* est positif, je me déplace vers la gauche, si *a* est négatif, je me déplace vers la droite.

Notes

Summary

10m 16s

Remarque

Que dire alors du domaine de définition et du graphe de la fonction

$$x \mapsto f(ax+b)\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}^* \quad ?$$

L'addition $+b$ dans l'argument de f donne une translation de $-b$ à l'échelle ax et donc une translation de $-\frac{b}{a}$ selon l'axe des x. En effet,

$$ax + b = a\left(x + \tfrac{b}{a}\right).$$

Alors nous allons maintenant cumuler en quelque sorte les trois effets que nous avons présentés, ici une petite remarque sur le cumule des deux dernières étapes; donc si on considère à présent une fonction à l'endroit $ax + b$ au lieu de la prendre à l'endroit x le conseil que l'on peut donner est le suivant : Il faut écrire le $ax + b$ comme a fois $x + b$ sur a - $a(x + b/a)$ et nous allons voir dans un instant que effectivement l'effet translation horizontal ne va pas être donné par moins b comme on pourrait peut être l'imaginer ici mais il est donné par moins b sur a.

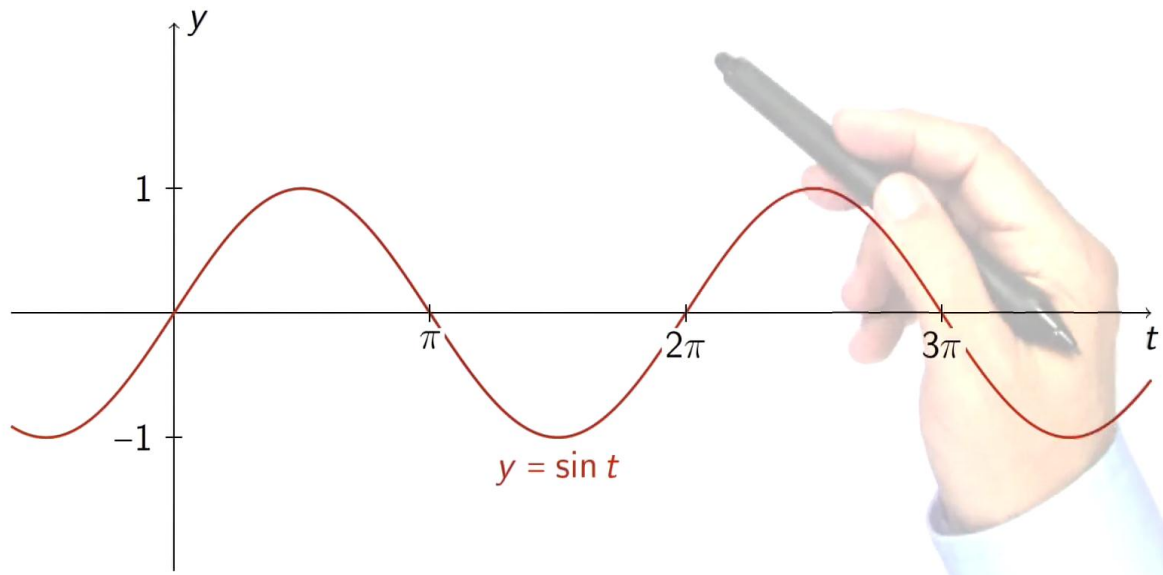
Notes

Summary

11m 21s

Exemple

Donnons le graphe de la fonction $f : t \mapsto 2\sin(2t - 1)$ à partir de celui de $\sin t$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors regardons ça sur un problème qu'on crée autour d'une oscillation harmonique, j'aimerais dessiner le graphe maintenant de cette oscillation harmonique qui est là donc j'ai une amplitude de deux, j'ai une vitesse angulaire de deux également, j'ai un déphasage avec le moins un. On va partir depuis le sinus de *t* que nous connaissons, il est ici en rouge, ce sinus, la valeur maximale, minimale, la période terminée au bout de deux pi.

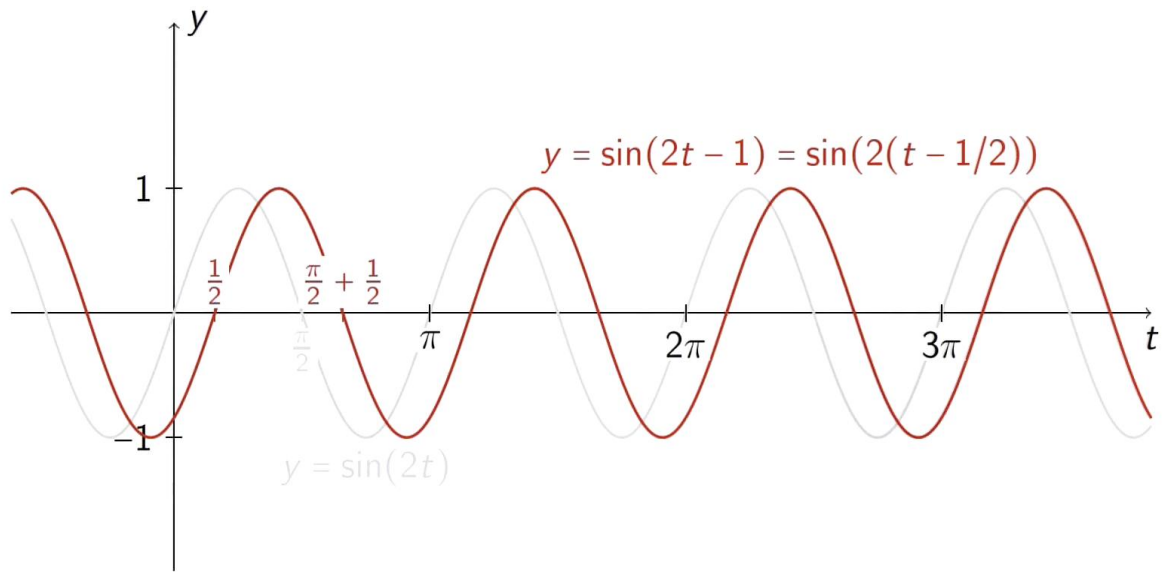
Notes

Summary

11m 56s

Exemple

Donnons le graphe de la fonction $f : t \mapsto 2\sin(2t-1)$ à partir de celui de $\sin t$.



Alors nous allons procéder par étape; la première étape consiste à prendre, non pas le sinus de *t* mais le sinus de *2t*, le deux provenant ici, de cette vitesse angulaire, alors cela signifie qu'il y a compression, le oméga il vaut deux, il faut prendre un facteur, donc un sur oméga, donc une demi il y a compression, le point de pi passe en pi/2, le point 2pi passe en pi, donc cette fois ci une période complète est faite en pi. Viens ensuite l'étape suivante, on va s'intéresser à ce moins un, comme indiqué, mettez le deux en évidence, on voit alors que maintenant, par rapport au sinus de *2t*, je dois simplement remplacer le *t* à l'entrée par *t* moins une demi, donc ça veut dire que cette fois ci j'ai un déplacement horizontal vers la droite de une demi non pas de un mais de une demi.

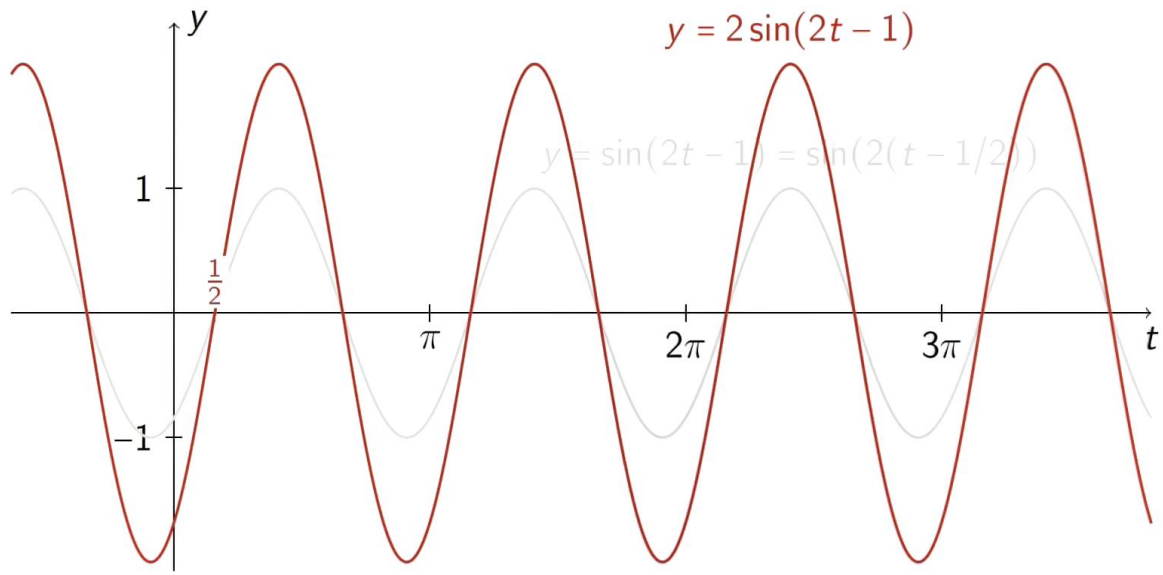
Notes

Summary

12m 24s

Exemple

Donnons le graphe de la fonction $f : t \mapsto 2\sin(2t-1)$ à partir de celui de $\sin t$.



Finalement, il faut nous intéresser encore à ce qui arrive si je mets un facteur *2* ici devant, en amplitude. Alors, simplement depuis la courbe que nous venons d'obtenir on va amplifier avec un facteur *2* dans le sens de l'axe des *y* et là nous avons résolu ce problème.

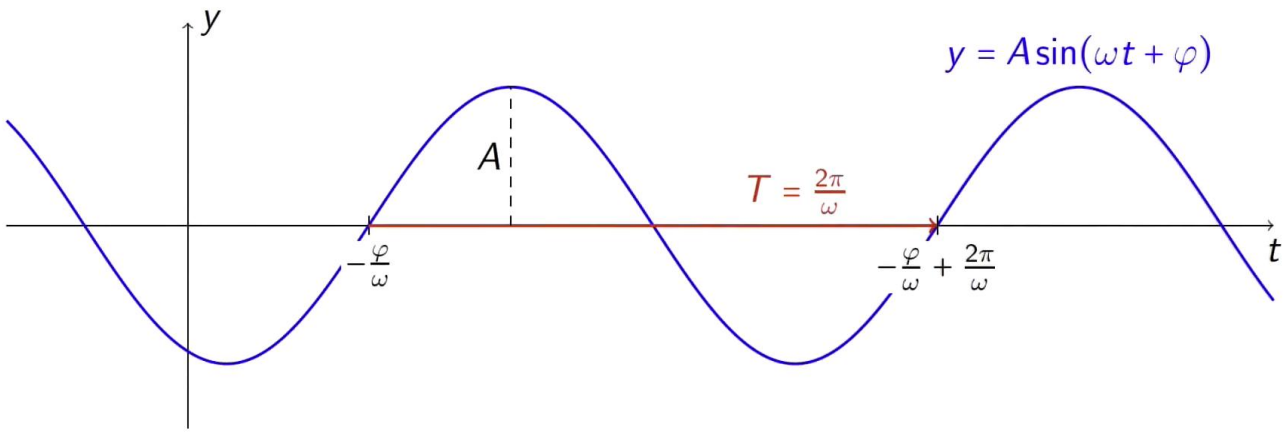
Notes

Summary

13m 15s

Graphe d'une oscillation harmonique

Le graphe de la fonction $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, a l'allure suivante (pour $A, \omega > 0$ et $\varphi < 0$) :



Donc nous pouvons retenir de façon plus générique si je recherche le graphe de la fonction *A* fois sinus oméga T plus phi- Asin(ωt + φ) alors ici pour fixer les idées, nous allons prendre un *A* positif, un oméga positif, on va prendre un phi négatif, ce qui arrive que nous avons pu observer dans l'exemple précédent c'est la chose suivante; c'est que le sinus, au lieu de partir ici à l'endroit *t* égal à zéro, vers le haut, ce départ il est déplacé vers la droite, phi est négatif jusqu'à moins phi sur oméga, on a une période qui est faite non pas en 2pi mais 2pi sur oméga donc ici la longueur de cette période c'est 2pi sur oméga et ici ce point c'est 2pi sur oméga et j'ajoute le point de départ donc mois phi sur oméga. En outre, il y a amplification verticale qui est donnée par le facteur grand *A* qui est ici et on comprend alors un peu mieux ce nom d'amplitude, l'amplitude c'est effectivement alors, le mouvement le plus grand possible. La réponse de cette fonction *f(t)* vers le haut. Pour le cosinus on a une situation tout à fait similaire; le cosinus au lieu de partir avec la valeur une ici à l'origine et de redescendre, donc ce départ ce trouve translaté avec phi négatif à l'endroit moins phi sur oméga, qui est ici.

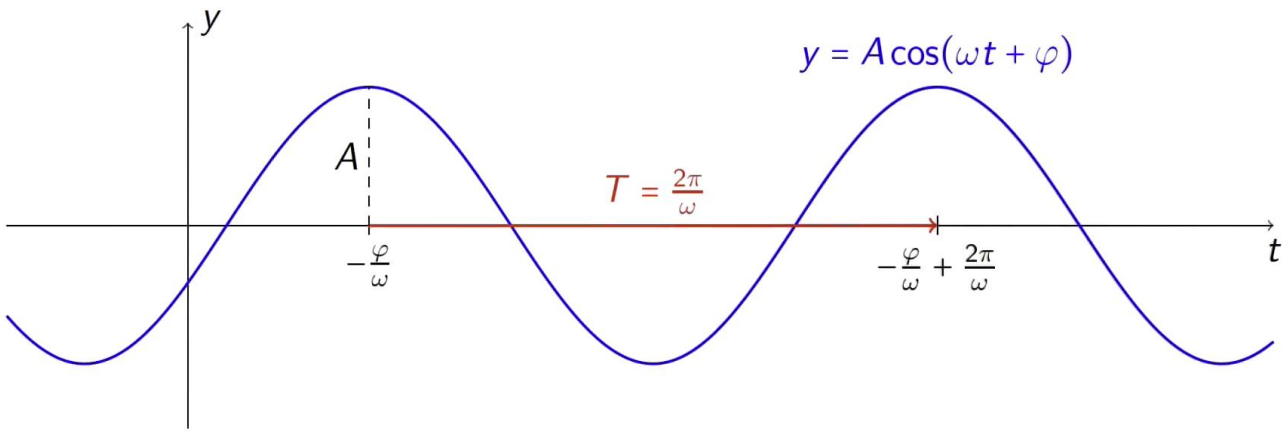
Notes

Summary

13m 32s

Graphe d'une oscillation harmonique

Le graphe de la fonction $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, a l'allure suivante (pour $A, \omega > 0$ et $\varphi < 0$) :



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

La période prend ce facteur de compression un sur oméga et on retrouve donc ici le point de 2pi sur oméga moins le point de départ. L'amplitude joue le même rôle que précédemment, il y a une amplification dans le sens des axes des *y*- un facteur *a*.

Notes

Summary

14m 55s

Le graphe d'une oscillation harmonique

Ce que nous avons appris :

- Construction du graphe d'une oscillation harmonique
  - amplification d'une fonction,
  - amplification de l'argument d'une fonction,
  - translation de l'argument d'une fonction.

Prochain Chapitre :

- la résolution des équations trigonométriques.

Aujourd'hui, qu'avez vous appris ? Vous avez appris à amplifier des fonctions, vous avez appris ce qui se passe lorsque c'est l'argument d'une fonction qui est amplifié ou si l'argument d'une fonction est translaté. Dans le chapitre suivant nous allons nous occuper d'équation trigonométrique, comment résoudre des équations trigonométriques, ça c'est un chapitre très riche.

Notes

Summary

15m 14s

Les oscillations harmoniques

Un grand merci d'avoir suivi ce cinquième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

J'aimerais profiter de la fin de ce chapitre pour remercier pour le suivi que vous donnez à ce cours, pour vous féliciter pour la discipline, pour l'intérêt que vous apportez. J'aimerais aussi adresser un remerciement très chaleureux à mes collaborateurs; Guido Burmeister, Roger Sauser et Olivier Woringer, vous me soutenez régulièrement pour pouvoir donner ce cours ici. Merci.

Notes

Summary

15m 33s