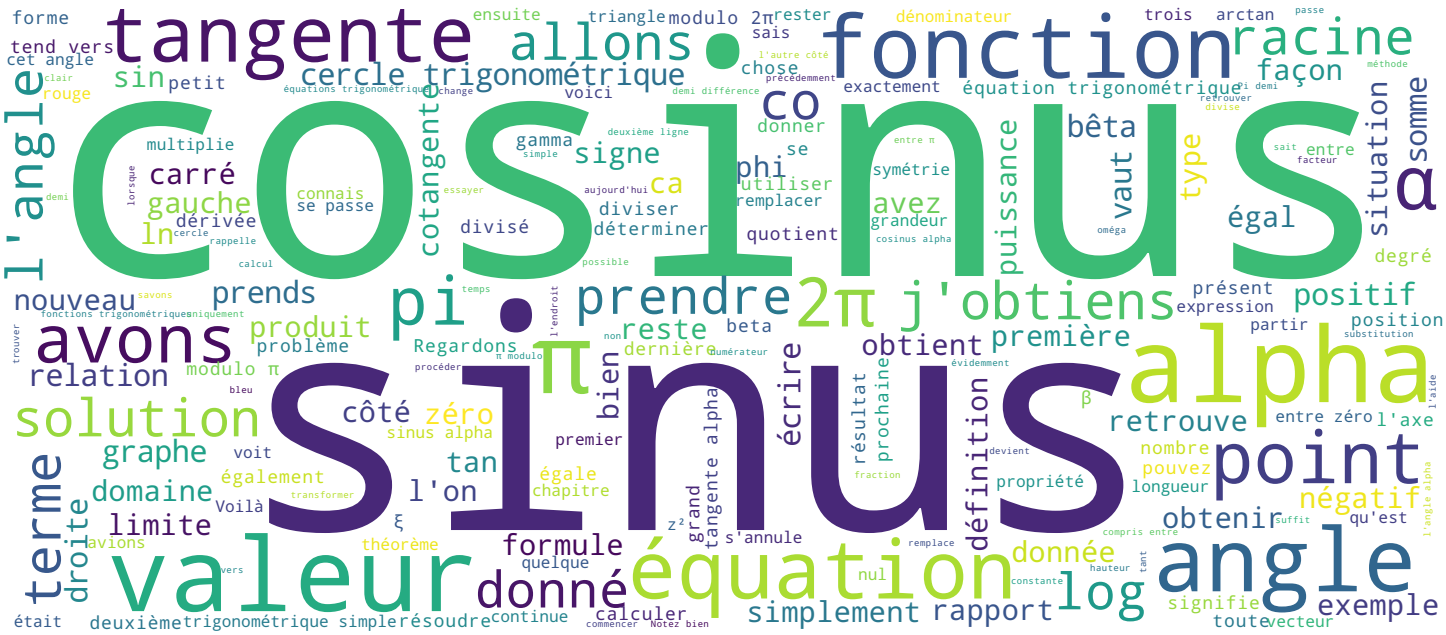


ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Equations trigonométriques

6.1 Ce que nous savons déjà faire

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Search MOOC

Video

Equations trigonométriques : introduction

Tout au long des chapitres précédents, nous avons résolu un grand nombre d'équations trigonométriques.

Dans ce nouveau chapitre, nous allons

- faire la liste de ce que nous savons déjà faire et illustrer chaque cas par de nouveaux exemples,
- présenter une méthode de résolution générale des équations trigonométriques rationnelles.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Je vous souhaite la bienvenue au chapitre 6 du cours : fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles, un chapitre qui est consacré aux équations trigonométriques. Tout au long des chapitres précédents, nous avons déjà résolu beaucoup d'équations trigonométriques. À partir du chapitre d'aujourd'hui, nous allons poursuivre deux objectifs. D'abord nous allons faire une liste de ce que nous savons déjà faire et dans une deuxième étape, qu'on fera la prochaine fois, nous allons présenter une méthode de résolution pour quelques équations trigonométriques différentes, qu'on appelle rationnelles, qui utilisent un procédé de résolution particulier.

Notes

Summary

0m 03s

Ce que nous savons déjà faire

Les équations trigonométriques que nous avons déjà abordées et illustrées par des exemples sont les suivantes :

- les équations trigonométriques simples

$$\sin x = \sin\alpha\,, \quad \cos x = \cos\alpha\,, \quad \tan x = \tan\alpha\,, \quad \cot x = \cot\alpha\,,$$

- les équations trigonométriques constituées d'une superposition d'oscillations harmoniques de même argument

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = D\,,$$

Si je fais la liste de ce que nous savons déjà faire, on pourrait résumer la situation de la façon suivante. Nous avons rencontré des équations trigonométriques, que j'ai qualifiées de "simples", en sinus. C'est-à-dire que c'était une équation de type sinus x (l'inconnue) égale C (c'est une constante donnée). Nous l'avions aussi présentée sous la forme sinus x = sinus α. On sait que, ici, dans le deuxième cas les angles x et α sont égaux ou alors supplémentaires modulo 2π. Nous avons également parlé d'équations trigonométriques simples en cosinus. Cosinus x = une constante donnée, ou bien cosinus x = cosinus α. Là, on sait que x = α ou x = -α, les deux fois modulo 2π. De même pour la fonction tangente, nous avions des équations de type tangente x = constante donnée, on recherche x ou bien tangente x = tangente α, là la situation est un peu plus simple, là x et α sont égaux modulo π et nous avons la situation similaire pour cotangente. Donc là vous avez cette liste d'équations trigonométriques que j'ai qualifiées de "simples". Nous avons également regardé ce qui se passe avec une superposition de deux oscillations de type A cos (ωt) + B sin (ωt) lorsqu'on veut que cette somme soit égale à une constante.

Notes

Summary

0m 41s

Ce que nous savons déjà faire

Les équations trigonométriques que nous avons déjà abordées et illustrées par des exemples sont les suivantes :

- les équations trigonométriques simples

$$\sin x = \sin \alpha\,, \quad \cos x = \cos \alpha\,, \quad \tan x = \tan \alpha\,, \quad \cot x = \cot \alpha\,,$$

- les équations trigonométriques constituées d'une superposition d'oscillations harmoniques de même argument

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = D\,,$$

- les équations trigonométriques qui se ramènent à des équations trigonométriques simples par transformation ou par factorisation.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Finalement, il ne faut pas l'oublier, on peut maintenant superposer à ces méthodes que nous avons présentées dans les deux premiers cas, certes des manipulations algébriques d'une équation, ça c'est usuel, mais également des manipulations qui sont faites à l'aide de relations trigonométriques, de formules trigonométriques. Et là s'ouvre alors un vaste champ. On peut également, par exemple, factoriser une équation donnée et ainsi simplifier l'approche de cette équation.

Notes

Summary

2m 05s

Exemple 1 : équation trigonométrique simple

Exemple

Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation suivante

$$\sin(2x) = -\frac{3}{4}.$$

On traite ce problème en deux étapes :

- on résout cette équation sur son domaine de définition $\mathbf{D} = \mathbb{R}$,
- puis on détermine les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors, j'aimerais l'illustrer aujourd'hui sur quelques exemples qui veulent simplement rappeler les différentes techniques et qui veulent peut-être aussi apporter une précision. Dans le premier exemple, je prends une équation simple en sinus. J'aimerais résoudre l'équation sin(2x) = -3/4. L'élément qui est peut-être quelque peu particulier c'est qu'on veut la résoudre uniquement pour des valeurs de x entre 0 et 2π. Donc nous allons d'abord résoudre cette équation sur R puis nous allons essayer de sélectionner parmi les solutions ainsi obtenues uniquement celles qui sont entre 0 et 2π.

Notes

Summary

2m 39s

Exemple 1 : solution

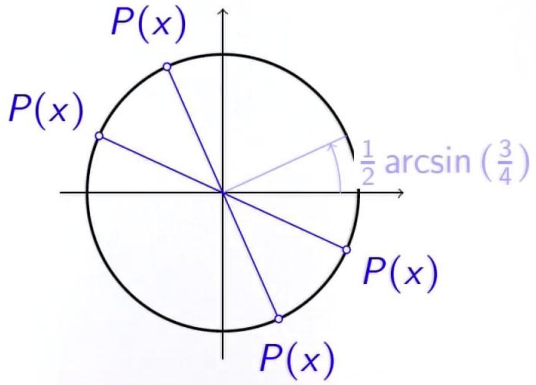
- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(2x) = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ 2x = \pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ 2x = \pi + \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi \quad \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



La façon de faire est la suivante : on a sin(2x) = -3/4. J'aime bien représenter ça sur le cercle trigonométrique que vous avez ici, le cercle de rayon 1. Pour le sinus de -3/4, je prends -3/4 sur l'axe vertical. J'ai deux positionnements possibles, un positionnement ici et un là. Dans ces deux cas, le sinus va valoir -3/4. C'est-à-dire que l'angle 2x doit être tel que je suis dans l'un de ces deux points. Alors je peux écrire que 2x, le point ici, sur la droite, est donné par arcsin(-3/4). Et c'est modulo 2π, donc je peux ajouter un multiple entier, positif ou négatif, de 2π. L'autre possibilité c'est 2x=π - cet angle que nous avions précédemment, de nouveau, modulo 2π. Alors on peut évidemment résoudre le tout par rapport à x. Une petite remarque intermédiaire ici : arcsinus étant impair, ce signe "-" peut passer devant, également ici, il peut passer devant. Et ensuite je divise par 2 pour obtenir x. Donc j'obtiens : -(1/2)arcsin(3/4) + k fois, attention, on divise par 2, k fois π, modulo π, donc. Et similairement sur la deuxième ligne.

Notes

Summary

3m 23s

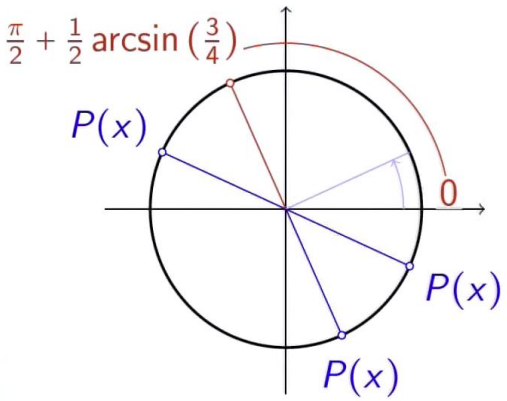
Exemple 1 : solution

- Résolution sur $[0\,,\,2\pi]$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi \quad \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi\,. \end{cases}$$

En parcourant l'intervalle $[0\,,\,2\pi]$, on retient les solutions suivantes :

$$x \;=\; \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),$$



Alors regardons si on peut repêcher, parmi ces solutions sur l'axe des réels entiers, les solutions qui sont entre zéro et 2π. Pour le faire on va retourner au cercle trigonométrique et on va positionner quelques angles. Je vais partir à positionner (1/2)arcsin(3/4). L'arcsinus de 3/4 est positif, il est à peu près situé ici. Si je prends la première ligne j'ai "-". Là j'ai pris la moitié de arcsin(3/4). Je prends moins cette grandeur. Donc je vais me trouver ici. modulo π, donc j'ajoute π, π, π, donc je me retrouve dans ces deux situations. Pour la deuxième ligne, il faut prendre π/2 + (1/2)arcsin(3/4). Arcsin(3/4) plus un angle droit me donne cette position, modulo π me donne ces positions-là. Donc en tout j'ai, sur le cercle trigonométrique, quatre positions possibles qui correspondent à une double famille infinie de solutions sur la droite réelle. On commence à parcourir cet intervalle entre zéro et α. Je vais commencer avec un angle zéro et augmenter cet angle et rechercher cette première solution. Si je monte, la première solution que je vais rencontrer elle est ici, elle est donnée par, je vous le rappelle, (1/2)arcsin(3/4) + l'angle droit.

Notes

Summary

4m 49s

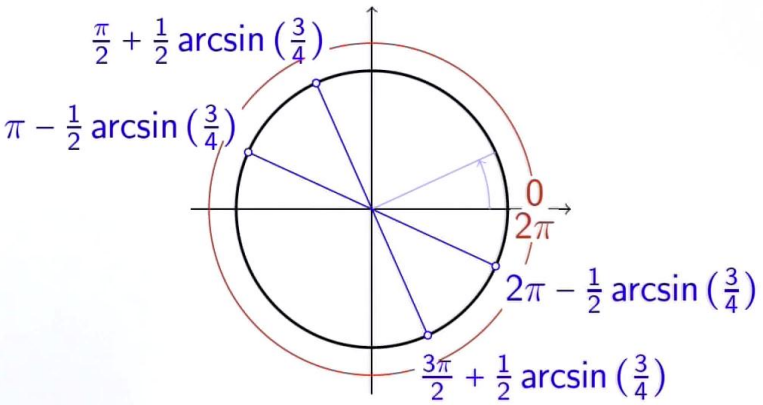
Exemple 1 : solution

- Résolution sur $[0\,,\,2\pi]$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi \quad \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi\,. \end{cases}$$

En parcourant l'intervalle $[0\,,\,2\pi]$, on retient les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right), \\ x &= -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \pi\,, \\ x &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \pi\,, \\ x &= -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi\,. \end{aligned}$$



Ça c'est une expression pour cette solution, qui est située entre zéro et 2π. Je continue ma progression, j'augmente. J'obtiens la solution suivante, qui est ici. Comment est-ce que j'obtiens cette solution ? Il faut prendre -arcsin(3/4), qui était ici, plus π. Donc je suis là, je continue. Le point suivant, pour me retrouver ici, je prends la position que j'avais comme première possibilité et j'ajoute π, donc ça va me faire ce (1/2)arcsin(3/4) et π/2 augmenté de π donne 3π/2, ça me donne la troisième possibilité. J'augmente encore mes angles pour arriver à la quatrième et ça sera la dernière des possibilités. Là il faut prendre la deuxième possibilité plus π donc je vais obtenir -(1/2)arcsin(3/4) plus 2π cette fois-ci. Si je continue, je termine la boucle jusqu'à 2π et je ne trouve pas de solution supplémentaire.

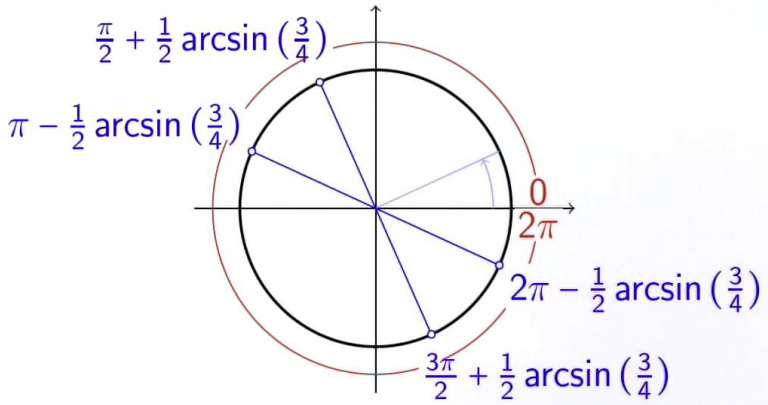
Notes

Summary

6m 19s

Exemple 1 : solution

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),\ \pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),\ \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),\ 2\pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \right\}.$$



J'en ai donc quatre en tout et pour tout, qui sont de nouveau écrites ici.

Notes

Summary

7m 20s

Exemple 2 : équation trigonométrique simple

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\cos(3x + 2) = 2\cos(x) \cdot \sin(-x)\,.$$

Il s'agit d'une équation trigonométrique simple un peu déguisée :

- on transforme le membre de droite en un sinus,
- puis en un cosinus à l'aide d'un déphasage de $\frac{\pi}{2}$.

Considérons un deuxième exemple. J'ai cosinus 3x+2 qui doit être égal à 2cos(x) • sin(-x), avec un x qui appartient à l'ensemble des nombres réels. A priori, cette équation ne cadre pas avec cette classification d'équation trigonométrique simple ou de superposition d'harmoniques. On devra ici emprunter un autre chemin. On va transformer ce terme sur la droite de façon à obtenir à la fin une équation trigonométrique simple. On va retrouver sur la droite un sinus, qu'on va changer en cosinus à l'aide d'un déphasage.

Notes

Summary

7m 25s

Exemple 2 : solution

- Transformation

$$\begin{aligned}
\cos(3x+2) &= 2\cos(x)\cdot\sin(-x)\\
&= -2\sin(x)\cdot\cos(x)\\
&= -\sin(2x)\\
&= \sin(-2x)\\
&= \cos\left[\tfrac{\pi}{2}-(-2x)\right]\\
&= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+2x\right)
\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Regardons ce que ça donne en détail. Il faut avoir le flair, ici, de voir dans ce 2cos(x) • sin(-x), et reconnaître presque une formule pour un double angle. L'élément qui dérange c'est ce "-" devant le x. Mais la fonction sinus est impaire. Donc un signe "-" ici à l'intérieur peut être déplacé à l'extérieur du sinus, donc peut être déplacé juste après le signe d'égalité et j'obtiens alors sur la droite : -2sin(x) • cos(x). Et là, le 2sin(x) • cos(x) n'est rien d'autre que le sinus de 2x. Une fois cette transformation faite, je peux remettre ce signe "-" à l'intérieur du sinus, j'utilise donc le fait que le sinus est impair. Cela me permet d'obtenir une équation qui est déjà plus simple puisque je compare maintenant un cosinus à un sinus. Je préfèrerais avoir la comparaison d'un cosinus avec un cosinus. Donc il faut encore écrire, par exemple, ce sinus avec un cosinus. Donc là j'utilise un déphasage. Je dis simplement que le sinus peut être écrit en tant que cosinus si on remplace l'angle (-2x) par l'angle complémentaire c'est-à-dire (π/2 - 2x). Les deux signes "-" s'additionnant, nous obtenons pour finir que cosinus (3x+2) n'est rien d'autre que cosinus (π/2 +2x). Là maintenant je retrouve une équation du type simple, cos = cos.

Notes

Summary

8m 03s

Exemple 2 : solution

- Résolution

$$\cos(3x+2) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + 2x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+2 = \left(\tfrac{\pi}{2} + 2x\right) + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ 3x+2 = -\left(\tfrac{\pi}{2} + 2x\right) + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \tfrac{\pi}{2} - 2 + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ 5x = -\tfrac{\pi}{2} - 2 + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \tfrac{\pi}{2} - 2 + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ x = -\tfrac{\pi}{10} - \tfrac{2}{5} + k\,\tfrac{2\pi}{5}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$S = \left\{ \tfrac{\pi-4}{2} + k\,2\pi\,,\ -\tfrac{\pi+4}{10} + k\,\tfrac{2\pi}{5} \ :\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Celle-là je peux la résoudre comme nous en avons l'habitude, c'est-à-dire que, ici, les angles sont égaux ou alors de signe contraire, toujours modulo 2π. Donc ça, ça s'écrit immédiatement. Et il suffit maintenant de résoudre chacune des deux lignes par rapport à x. Donc si je déplace 2x de l'autre côté, c'est-à-dire si je soustrais 2x des deux côtés de cette équation, j'obtiens immédiatement x = j'additionne encore -2, donc le 2 passe de l'autre côté si l'on veut, et reste alors x = π/2 - 2 + k2π. Sur la deuxième ligne, si on déplace 2x on n'obtient pas immédiatement x, on obtient encore 5x, mais il suffit de diviser par 5 et on obtient le résultat souhaité. Donc on peut conclure qu'on a deux types de solutions. On a celle de la première ligne, qu'on peut écrire π-4/2 + k2π. Sur la deuxième ligne on peut dire que ça c'est -π + 4/10 + k fois, attention, pas 2π, 2π/5 ici.

Notes

Summary

9m 36s

Exemple 3 : équation trigonométrique simple

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 0\,.$$

Il s'agit d'une équation trigonométrique constituée d'une superposition d'oscillations harmoniques de même argument.

Mais cette équation est particulière : le membre de droite est nul.

Elle se ramène donc à une équation trigonométrique simple en tangente.

Voyons un troisième exemple. En regardant cet exemple, vous allez me dire tout de suite : oh, ça, je le reconnais. Ça, c'est une superposition d'harmoniques. Oui c'est une superposition d'harmoniques mais je ne vais pas utiliser ce procédé parce que ici j'ai une superposition de deux harmoniques qui donne zéro. Alors si le nombre sur la droite est nul, on peut utiliser une méthode particulière, qui repose sur le fait qu'on essaie de ramener cette équation à une équation trigonométrique simple en tangente. Montrons comment cela marche.

Notes

Summary

10m 50s

Exemple 3 : solution

- Transformation

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2t-1) = \frac{2}{3}\cos(2t-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(2t-1)}{\cos(2t-1)} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(2t-1) = \frac{2}{3}.$$

Je pars depuis cette équation qui est donnée. On peut écrire ce 2 fois cosinus sur la droite, on peut diviser encore par 3, donc j'obtiens que le sinus (2t-1) n'est rien d'autre que les 2/3 du cosinus de ce même angle (2t-1). Je peux obtenir une tangente si je divise par cosinus. Puis-je diviser par ce terme ? Évidemment je peux diviser par cos(2t-1) si je suis sûr qu'il ne s'annule pas. Je reviens sur ce problème dans un instant. Partons avec l'idée que je fais le calcul pour autant que ce terme ne s'annule pas. Je divise par cos(2t-1) et j'obtiens ce quotient sinus sur cosinus qui donne tangente égale à 2/3. Effectivement on aboutit à une équation en tangente. Reste la question : avais-je le droit de calculer comme ça ? Est-ce que c'est légitime ? Alors regardez ce qui se passe si ici, vous dites : "ah tiens, ici, le cosinus s'annule pour un certain t." Il va me donner zéro. Est-ce que c'est possible ? C'est possible évidemment, il y a des valeurs de t mais est-ce que ce t peut être solution ? Est-ce que je perds des solutions ? L'équation me dit : si le cosinus est nul, si ce terme est nul, alors le sinus est également nul. Or le sinus et le cosinus ne peuvent pas s'annuler en même temps.

Notes

Summary

11m 26s

Exemple 3 : solution

- Transformation

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2t-1) = \frac{2}{3}\cos(2t-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(2t-1)}{\cos(2t-1)} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(2t-1) = \frac{2}{3}.$$

Remarque :

si $\cos(2t-1) = 0$, alors $\sin(2t-1) = \pm 1$, l'équation n'est pas vérifiée.

Si le cosinus s'annule, le sinus doit valoir ±1. C'est-à-dire que, ici, les valeurs de t qui annuleraient un cosinus ne sont pas solutions. Donc je vais calculer uniquement avec des valeurs de t qui sont des solutions possibles et j'ai donc le droit de procéder de la façon que je viens de faire, j'ai le droit de diviser par ce cosinus, et d'arriver à une équation simple en tangente.

Notes

Summary

12m 49s

Exemple 4 : superposition d'oscillations harmoniques

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 3\,.$$

Cette équation se distingue de celle de l'exemple précédent par le fait que le membre de droite n'est pas nul.

On la résout en appliquant le principe de superposition des oscillations harmoniques de même argument.

On utilise l'ansatz : $3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = C\cos\left[(2t-1)+\varphi\right]\,.$

À partir de là, la situation est simple puisque je suis bien devant une équation trigonométrique en tangente, une équation trigonométrique simple, et je sais que l'angle (2t-1) c'est simplement arctan(2/3) + kπ. Je résouds cette équation par rapport à t, j'obtiens 1 + arctan(2/3), à diviser par 2, attention, le kπ est aussi divisé par 2. Et je peux écrire que l'ensemble solution est donné par, justement, la moitié de la somme 1 + arctan(2/3) + kπ/2, k entier positif ou négatif. Reprenons maintenant cette même expression que j'avais avant sur la gauche, 3sin(2t-1) - 2cos(2t-1) = 3. Là cette fois-ci j'ai vraiment une superposition d'harmoniques. Ce qui change c'est que sur la gauche je n'ai plus le zéro. Et dans ce cas-là, on va devoir utiliser une superposition d'oscillations harmoniques. Vous noterez bien que jusqu'à présent nous avions surtout superposé des oscillations harmoniques qui avaient même vitesse angulaire mais qui n'avaient pas de déphasage. Ici on a un même déphasage également, l'idée que nous avions utilisée reste valable. Donc on va utiliser l'ansatz que le terme sur la gauche s'écrit simplement comme une amplitude C, on va de préférence la prendre positive.

Notes

Summary

13m 15s

Exemple 4 : superposition d'oscillations harmoniques

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 3\,.$$

Cette équation se distingue de celle de l'exemple précédent par le fait que le membre de droite n'est pas nul.

On la résout en appliquant le principe de superposition des oscillations harmoniques de même argument.

On utilise l'ansatz : $3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = C\cos\left[(2t-1)+\varphi\right]\,.$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On peut prendre un sinus ou un cosinus, c'est une question de goût, donc je vais prendre un cosinus. Ce qui change des dernières fois, on n'écrit pas ici 2t+φ, on écrit vraiment l'angle qui est ici, (2t-1) plus un déphasage. Donc là l'ansatz est légèrement modifié mais l'idée qui va conduire nos calculs reste absolument la même.

Notes

Summary

14m 37s

Exemple 4 : solution

$$\begin{aligned} 3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) &= C\cos\big[(2t-1)+\varphi\big] \\ &= C\cos(2t-1)\cdot\cos\varphi - C\sin(2t-1)\cdot\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient $C\cos\varphi = -2$ et $C\sin\varphi = -3$.

On en déduit

- l'amplitude C : $C^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = (-2)^2 + (-3)^2 \quad\Rightarrow\quad C = \sqrt{13}$
- et la phase φ : $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$,

Donc avec cet ansatz, le terme à gauche égale C fois cosinus [(2t-1)+φ]. On va utiliser le terme d'addition pour le cosinus, ça c'est la procédure standard. Donc on a cos·cos ici, moins sin·sin ici. Et nous allons comparer, par exemple ici j'ai 3sin(2t-1), et je retrouve ici un sin(2t-1) et je peux donc dire que ce qui reste, c'est-à-dire ici : -C·sinφ, doit redonner le 3. Donc C·sinφ donne -3 en fait, ce qui revient au même. Et ici, le C·cosφ doit me donner ce -2. Donc je tombe sur ce système à deux équations. Pour les inconnues : C et pour le déphasage : φ. On procède comme usuellement, on élève au carré les deux termes à gauche et on les additionne. Le C² peut être mis en évidence. Il reste alors la somme de cos²φ + sin²φ qui vaut 1, donc il reste uniquement C². Et sur la droite j'ai le (-2)² et le (-3)² qui ensemble donnent 13, donc pour C je peux prendre cette √13, je préfère prendre la variante positive pour C. Pour la phase, j'introduis cette √13 dans ce système. C'est-à-dire que le cosinus de φ vaut -2/√13, et le sinus de φ -3/√13. Je vois que l'angle φ doit être situé dans le troisième quadrant -et je sais que tangente φ c'est le sinus divisé par le cosinus- les signes "-" vont se neutraliser, les √13 vont se neutraliser, il va rester 3/2.

Notes

Summary

15m 01s

Exemple 4 : solution

$$\begin{aligned} 3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) &= C\cos\big[(2t-1)+\varphi\big] \\ &= C\cos(2t-1)\cdot\cos\varphi - C\sin(2t-1)\cdot\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient $C\cos\varphi = -2$ et $C\sin\varphi = -3$.

On en déduit

- l'amplitude C : $C^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = (-2)^2 + (-3)^2 \quad\Rightarrow\quad C = \sqrt{13}$
- et la phase φ : $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$,

  $P(\varphi)$ est situé dans le troisième quadrant et $\tan\varphi = \frac{3}{2}$,

  on choisit $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \pi$.

Donc sûrement je peux essayer avec arctan(3/2), mais arctan(3/2) va me donner un angle entre zéro et π/2, donc sur le premier quadrant. Si je veux être dans le troisième quadrant je vais soustraire π et j'obtiens alors le déphasage voulu.

Notes

Summary

17m 00s

Exemple 4 : solution

L'équation initiale s'écrit donc

$$\sqrt{13}\cos\left[(2t-1)+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)-\pi\right]=3$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos\left[(2t-1)+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)-\pi\right]=\tfrac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos\left[(2t-1)+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)\right]=-\tfrac{3}{\sqrt{13}}\,.$$

On résout cette équation simple en cosinus :

$$2t-1+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)=\pm\arccos\left(-\tfrac{3}{\sqrt{13}}\right)+k\,2\pi$$

$$\Leftrightarrow\quad t=\tfrac{1}{2}\left[1-\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)\pm\arccos\left(-\tfrac{3}{\sqrt{13}}\right)\right]+k\,\pi\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Une fois arrivé là, je peux écrire le terme sur la gauche comme cette valeur de C, √13, et je vais avoir le cosinus, ça c'est le (2t-1) et ça c'est le déphasage φ que nous avons calculé avec arctan(3/2)-π et nous aimerions que cela soit égal à 3. Nous isolons le cosinus, voilà, ce qui est fait. Ici, on peut choisir de le faire ou non, c'est une question de goût, vous voyez vous avez encore ce -π, ce déphasage vous pouvez le neutraliser, le faire passer comme un signe "-" devant, que je passe alors sur la droite. Encore une fois, vous pouvez le faire ou pas, cela revient à la même chose. Là j'ai une équation trigonométrique simple en cosinus, c'est-à-dire que l'angle, qui est ici dedans, est donné par ±arccosinus du terme à droite. Je peux écrire que [2t-1 + arctan(3/2)], ça c'est l'angle qui est ici entre crochets, c'est ±arccos(-3/√13) modulo 2π. Une équation que je peux résoudre par rapport à t et j'obtiens ainsi toutes les valeurs de t possibles, ici sous cette forme avec un kπ. Si on regarde ici, il est clair que pour isoler t on va diviser par 2 et donc on aura un modulo π et pas un modulo 2π.

Notes

Summary

17m 14s

Exemple 5 : résolution par factorisation

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0\,.$$

La résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de plusieurs équations simples.

Pour cela, il suffit de factoriser le membre de gauche en utilisant les formules "somme-produit" sur les deux sommes

$$\sin x + \sin 4x \qquad \text{et} \qquad \sin 2x + \sin 3x\,.$$

L'exemple suivant devrait montrer qu'on peut également obtenir des solutions d'équations trigonométriques en utilisant des formules trigonométriques, des relations trigonométriques diverses. Ici nous allons résoudre un problème à l'aide de factorisations. À la base de la factorisation il y a une observation que l'on peut faire ici. On peut observer que la somme des angles x et 4x (donc 5x) est redonnée ici par 2x + 3x. Et nous savons que l'on peut transformer des sommes de sinus en des produits, et dans les produits apparaîtront des angles sous la forme de demi-différences et de demi-sommes. C'est-à-dire que ici si j'utilise une telle formule une fois pour le premier et le dernier terme, sin(x)et sin(4x), l'autre fois pour les deux autres termes, je vais avoir une somme d'angle de 5x qui est commune.

Notes

Summary

18m 39s

Exemple 5 : solution

- Factorisation

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x &= \left[\sin x + \sin 4x\right] + \left[\sin 2x + \sin 3x\right] \\
&= \left[2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos \tfrac{3x}{2}\right] + \left[2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos \tfrac{x}{2}\right] \\
&= 2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \left[\cos \tfrac{3x}{2} + \cos \tfrac{x}{2}\right] \\
&= 2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \left[2 \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2}\right] \\
&= 4 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ce qui va me permettre d'aller très loin dans la résolution de cette équation. Donc je regroupe cette équation, qui est égale à zéro, je regroupe le premier et le dernier et les deux autres, j'utilise cette transformation d'une somme en un produit. Alors on a le facteur 2. On obtient des sin cos. On obtient le sinus de la demi-somme, 5x/2, et le cosinus de la demi-différence. Notez bien que la demi-différence serait -3x/2 mais le cosinus est pair, donc on peut écrire tout de suite 3x/2. Pour le deuxième terme on a la même chose. Le facteur 2, le sinus de la demi-somme, donc la somme c'est 5x, donc 5x/2, et le cosinus de la demi-différence, la demi-différence serait de -x/2, à nouveau le cosinus étant pair, je peux remplacer ce -x/2 par x/2. Si je regarde ce terme je vois que je peux mettre en évidence le 2sin(5x/2) et ce qui va me rester c'est un cos(3x/2) et un cos(x/2). Dans ce crochet, je redécouvre une somme de cosinus que je peux à nouveau transformer en un produit. Pour une somme de cosinus on obtient 2cos(x)·cos(x/2), si vous regardez la formule pour la transformation d'une somme de cosinus en un produit. Donc pour finir j'obtiens 4sin(5x/2)·cos(x)·cos(x/2), le tout en un produit.

Notes

Summary

19m 36s

Exemple 5 : solution

- Résolution

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin \tfrac{5x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \tfrac{x}{2} = 0\,.$$

- $\sin \tfrac{5x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{5x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\,\tfrac{2\pi}{5}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

Si je veux résoudre mon équation, ce terme étant égal à zéro, je peux annuler ce terme de gauche par manipulation trigonométrique, par manipulation algébrique aussi, je fais des mises en évidences et des choses de ce type. Cette équation est équivalente, elle a les mêmes solutions mais elle a l'avantage d'être sous la forme d'un produit, un produit qui s'annule. Un produit ne peut s'annuler que si au moins un des facteurs s'annule. Évidemment si plusieurs facteurs s'annulent en même temps, c'est encore mieux. Mais je peux donc dire que le premier facteur sin(5x/2) s'annule ou alors c'est le cosinus qui s'annule, ou c'est le cosinus de x/2 qui s'annule. Notez bien que le "ou", ici, est inclusif, c'est-à-dire que l'on peut avoir une valeur de x qui annule deux, voire les trois cas. Nous allons maintenant analyser séparément les trois cas. Les trois cas sont chacun du type équation trigonométrique simple, la première en sinus, la deuxième en cosinus, la troisième en cosinus également. Alors pour la première, sin(5x/2)=0, c'est un cas un peu particulier le "égal à zéro". Le sinus, où est-ce qu'il s'annule ? Le sinus s'annule à kπ exactement, avec k entier positif ou négatif.

Notes

Summary

21m 16s

Exemple 5 : solution

- Résolution

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sin \tfrac{5x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \tfrac{x}{2} = 0 \,. \end{aligned}$$

- $\sin \frac{5x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{2\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\cos \frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

Donc 5x/2 doit être de la forme kπ, et on résoud ça par rapport à x, donc fois 2, divisé par 5 et on obtient des multiples de 2π/5. Pour la deuxième ligne, où est-ce que le cosinus va s'annuler ? Le cosinus s'annule à π/2 modulo π. C'est tout en haut et tout en bas du cercle trigonométrique. Et là il n'y a rien à faire, ça c'est exactement les valeurs de x. Pour cos(x/2) on a le même ansatz, x/2 doit être π/2 + kπ mais cette fois-ci il me faut encore le x donc je multiplie encore par 2 et j'obtiens que x doit être de la forme π + k2π.

Notes

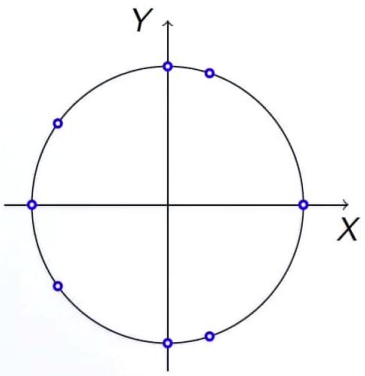
Summary

22m 37s

Exemple 5 : solution

On en déduit l'ensemble solution :

$$S = \left\{ k\,\frac{2\pi}{5}\,,\ \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ \pi + k\,2\pi :\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On regroupe les trois familles infinies de solutions que nous avons trouvées, donc là le k2π/5, le π/2 modulo π, et le π modulo 2π. Si vous situez ces solutions sur le cercle trigonométrique, le plus simple c'est peut-être de commencer par la troisième possibilité. J'ai π qui se trouve ici sur la gauche, et c'est modulo 2π donc ce sont des positions qui sont toutes ici. Pour la deuxième possibilité c'est π/2, donc π/2 est ici en haut, plus kπ ça me donne une position en haut, +π en bas, +π en haut, donc ce sont ces 2 positions. Donc là j'ai déjà identifié 3 possibilités sur le cercle trigonométrique. Maintenant la première c'est k·2π/5. L'angle de 2π/5 se trouve ici. Et je prends d'abord zéro fois 2π/5 ici, une fois 2π/5, deux, trois, quatre fois. Quand je reprends cinq fois 2π/5 j'ai 2π, donc je reviens. Donc cette fois-ci la première possibilité me donne 5 positions sur le cercle trigonométrique, là, là, là, là, et là.

Notes

Summary

23m 20s

Exemple 6 : équation rationnelle en sinus et cosinus

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\cos x = \tan x \, .$$

Il s'agit d'une équation rationnelle en sinus et cosinus :

$$\cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \, .$$

Pour la résoudre, on cherche à l'exprimer sous la forme d'une équation polynomiale en une variable auxiliaire z.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pour terminer, j'aimerais maintenant résoudre une équation qui va introduire le chapitre suivant qui va nous amener sur des équations qu'on appelle rationnelles en sin et cos. Alors l'exemple c'est cos(x) = tan(x). On ne voit pas tant où est le terme de "rationnel", "rationnel" signifiant qu'il y a un quotient, une fraction. Bon, il y a tangente qui peut être écrite en tant que sinus sur cosinus. Faisons-le, écrivons tangente en tant que sinus/cosinus. On va essayer de résoudre cette équation et nous allons le présenter avec une méthode qui est, ici, pour cet exemple concret, certainement surdimensionnée dans un certain sens mais elle a l'avantage d'introduire une technique que nous allons pouvoir affiner la prochaine fois. La technique consiste à remplacer cette équation trigonométrique par une équation polynomiale, avec une variable z. Et alors on va pouvoir utiliser toutes nos connaissances sur la résolution d'équations polynomiales pour résoudre une équation trigonométrique.

Notes

Summary

24m 35s

Exemple 6 : solution

Résolution de l'équation $\cos x = \tan x$.

- Domaine de définition : $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Transformation :
$$\cos x = \tan x \ \Leftrightarrow \ \cos^2 x = \sin x$$
$$\Leftrightarrow \ 1 - \sin^2 x = \sin x$$
$$\Leftrightarrow \ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 .$$
- Changement de variable : en posant $z = \sin x$, $z \in [-1, 1]$, on obtient une équation polynomiale du deuxième degré en z :
$$z^2 + z - 1 = 0 .$$

Regardons ça de plus près. Bon il faut toujours commencer par le domaine de définition. Il est clair que ici cos(x) est toujours défini. Tan(x) ne pourra pas être défini pour, par exemple, π/2 ou 3π/2. Donc il faut vraiment rester sur le domaine de définition de tan(x), c'est-à-dire toutes les valeurs réelles sauf les valeurs du type π/2 modulo π. Nous l'avons déjà dit, tan peut s'écrire sin/cos. Le cosinus, on peut le prendre de l'autre côté, donc on a une équation de type cos²x = sin(x). Ici on peut utiliser cette relation que je qualifierais de Pythagore, si l'on veut, j'exprime le cos² à l'aide du sin² donc 1-sin²x donne cos² et j'obtiens ici une équation qui ne contient plus que le sinus de x. C'est-à-dire que si je mets le tout du même côté j'ai sin²x + sin(x) - 1 = 0. Alors ça c'est une situation particulièrement heureuse, parce qu'ici on peut simplement dire, ok, appelons ce sin(x) "z". Alors z ne pourra prendre que des valeurs comprises entre -1 et 1. Mais appelons cela z. Le sin² sera alors z², donc je peux écrire ici : z² à la place de sin², z à la place de sin et -1 reste. Donc j'obtiens effectivement une équation polynomiale du deuxième degré de la forme z²+z-1=0.

Notes

Summary

25m 41s

Exemple 6 : solution

- Résolution de l'équation polynomiale en z :

$$z^2 + z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{<-1} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

- Solutions de l'équation initiale :

$$\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$S = \left\{ \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi,\ \pi - \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi :\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cette équation se résout. Prenez la formule usuelle, vous trouverez une première solution et une deuxième. Regardez d'un peu plus près la première, (-1-√5)/2. Vous pouvez prendre une calculatrice, vous pouvez aussi faire des estimations à l'aide d'une valeur approchée de √5 et vous allez trouver quelque chose qui est en-dessous de -1. Donc le sinus ne va pas pouvoir prendre cette valeur de z. En revanche le (-1+√5)/2, ça c'est une valeur qui est comprise entre -1 et 1. Donc nous allons avoir une seule possibilité que nous allons utiliser pour le sinus. Dès lors, le tout se ramène à résoudre sin(x) = cette valeur que nous avons trouvée, (-1+√5)/2. Je retombe une fois de plus sur une équation trigonométrique simple en sinus. Bon, à partir de là nous déclenchons la procédure usuelle. L'angle x est donné par arcsinus du terme à gauche ou π-arcsin du terme à gauche, modulo 2π. Et nous écrivons donc l'ensemble solution sous la forme indiquée ici en bas.

Notes

Summary

27m 09s

Remarque

Dans l'exemple précédent, le choix du bon changement de variable est facile car la transformation effectuée nous amène vers un polynôme en $\sin x$.

Dans la section suivante, nous allons généraliser cette méthode qui consiste à transformer une équation trigonométrique rationnelle en une équation polynomiale à l'aide d'un changement de variable.

Le choix du changement de variable étant souvent difficile à faire, nous allons présenter un test qui permet de faire le bon choix.

Dans l'exemple qu'on vient de présenter, il est clair que le choix du changement de variable, ce z=sin(x), c'était facile à trouver pour finir, dès lors qu'on avait une équation qui contenait uniquement des sinus. Dans la section suivante, nous allons généraliser cette méthode qui consiste à transformer une équation trigonométrique rationnelle, c'est-à-dire qu'elle contient des produits, des sommes, des quotients formés de termes qui contiennent des sinus et des cosinus, en une équation polynomiale avec un changement de variable bien choisi. Le problème central c'est : comment trouver le changement de variable, la substitution à effectuer ? Et nous allons pouvoir donner là des indices très clairs et très précis.

Notes

Summary

28m 19s

Equations trigonométriques

Ce que nous avons revu :

- la résolution de certaines équations trigonométriques :
  - les équations simples,
  - celles qui comportent une superposition d'oscillations harmoniques
  - et celles qui se ramènent aux équations simples par transformation ou par factorisation.

Prochaine étape :

- la résolution des équations trigonométriques rationnelles, les tests de Bioche.

Un bilan de ce que nous avons fait aujourd'hui : j'ai simplement rappelé, je vous ai montré qu'en fait on sait déjà pas mal de choses, que vous avez appris déjà un tas de choses. Les équations trigonométriques simples permettent de résoudre beaucoup de problèmes, surtout si on les associe avec des transformations trigonométriques, des factorisations, des manipulations algébriques. On a étudié des superpositions d'oscillations harmoniques : si une telle superposition est nulle alors on retombe sur une équation trigonométrique simple en tangente et sans ça on utilise les méthodes de superposition usuelles. Et pour finir, nous avons ouvert ce portillon de la substitution dont nous allons parler, justement, la prochaine fois. Alors j'espère que j'ai attisé un peu votre appétit pour la prochaine fois, je vous remercie de m'avoir suivi et à la prochaine.

Notes

Summary

29m 15s