ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Equations trigonométriques

6.1 Ce que nous savons déjà faire

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

EPFL

Equations trigonométriques : introduction

Tout au long des chapitres précédents, nous avons résolu un grand nombre d'équations trigonométriques.

Dans ce nouveau chapitre, nous allons

- faire la liste de ce que nous savons déjà faire et illustrer chaque cas par de nouveaux exemples,
- présenter une méthode de résolution générale des équations trigonométriques rationnelles.

Ich heiße Sie herzlich willkommen zu Kapitel 6 des Kurses: Trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen, einem Kapitel, welches trigonometrischen Gleichungen gewidmet ist. Während der vorausgegangenen Kapitel haben wir bereits viele trigonometrische Gleichungen gelöst. Mit Beginn des heutigen Kapitels wollen wir zwei Themen weiterverfolgen. Zunächst werden wir eine Liste des bereits Erledigten anfertigen und in einem weiteren Schritt, den wir das nächste Mal gehen werden, werden wir eine Lösungsmethode für verschiedene trigonometrische Gleichungen vorstellen, die man als rational bezeichnet, und die eine ganz spezielle Vorgehensweise nutzen.

Notes

Summary

0m 03s

Ce que nous savons déjà faire

Les équations trigonométriques que nous avons déjà abordées et illustrées par des exemples sont les suivantes :

- les équations trigonométriques simples

$$\sin x = \sin\alpha\,, \quad \cos x = \cos\alpha\,, \quad \tan x = \tan\alpha\,, \quad \cot x = \cot\alpha\,,$$

- les équations trigonométriques constituées d'une superposition d'oscillations harmoniques de même argument

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = D\,,$$

Wenn ich die Liste zu dem erstelle, was wir bereits wissen, könnte man die Situation wie folgt zusammenfassen: Wir haben trigonometrische Gleichungen kennengelernt, die ich als „einfache“ zum Sinus bezeichnet habe. Hier handelte es sich um Gleichungen des Typs Sinus x (Unbekannte) = C (das ist eine gegebene Konstante). Wir haben diese auch vorgestellt in der Form Sinus x = Sinus α. Hier, im zweiten Fall weiß man, dass die Winkel x und α gleich sind oder auch Zusätze zum Modulo 2π. Wir haben über einfache trigonometrische Gleichungen zum Kosinus gesprochen. Cosinus x = eine gegebene Konstante, oder auch Kosinus x = Kosinus α. Hier weiß man, dass x = α oder x = -α, beide mal Modulo 2π. Ebenso haben wir für Tangensfunktionen Gleichungen des Typs Tangens x = gegebene Konstante, man sucht x oder auch Tangens x = Tangens α, wobei die Situation hier etwas einfacher ist, weil hier x und α gleich Modulo π sind und wir dann eine ähnliche Situation für den Kotangens haben. Damit haben Sie also diese Liste trigonometrischer Gleichungen, die ich als „einfache“ bezeichnet habe. Wir haben auch betrachtet, was mit einer Superposition von zwei Oszillationen des Typs A cos (ωt) + B sin (ωt) passiert, wenn man will, dass diese Summe gleich einer Konstanten ist.

Notes

Summary

0m 41s

Ce que nous savons déjà faire

Les équations trigonométriques que nous avons déjà abordées et illustrées par des exemples sont les suivantes :

- les équations trigonométriques simples

$$\sin x = \sin \alpha\,, \quad \cos x = \cos \alpha\,, \quad \tan x = \tan \alpha\,, \quad \cot x = \cot \alpha\,,$$

- les équations trigonométriques constituées d'une superposition d'oscillations harmoniques de même argument

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = D\,,$$

- les équations trigonométriques qui se ramènent à des équations trigonométriques simples par transformation ou par factorisation.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Schließlich, das sollte man nicht vergessen, kann man jetzt mithilfe dieser von uns präsentierten Methoden in den beiden ersten Fällen bestimmte algebraische Manipulationen einer Gleichung, das ist üblich, übereinanderlegen. Aber auch diese Manipulationen werden erstellt mithilfe trigonometrischer Beziehungen, trigonometrischer Funktionen, Und hier öffnet sich dann ein weites Feld. Man kann beispielsweise auch eine gegebene Gleichung in Faktoren zerlegen und so den Zugang zu dieser Gleichung vereinfachen.

Notes

Summary

2m 05s

Exemple 1 : équation trigonométrique simple

Exemple

Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation suivante

$$\sin(2x) = -\frac{3}{4}.$$

On traite ce problème en deux étapes :

- on résout cette équation sur son domaine de définition $\mathbf{D} = \mathbb{R}$,
- puis on détermine les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Also möchte ich dies heute anhand einiger Beispiele illustrieren, die einfach verschiedene Techniken vergegenwärtigen und die auch eine Präzisierung ermöglichen. Im ersten Beispiel nehme ich eine einfache Gleichung zum Sinus. Ich möchte die Gleichung sin(2x) = -3/4 lösen. Das Element, welches hier vielleicht etwas speziell ist, besteht darin, dass man ausschließlich für Werte von x zwischen 0 und 2π auflösen möchte. Also lösen wir diese Gleichung zunächst nach R auf. Dann können wir versuchen, entsprechend den erhaltenen Lösungen ausschließlich jene auszuwählen, die zwischen 0 und 2π liegen.

Notes

Summary

2m 39s

Exemple 1 : solution

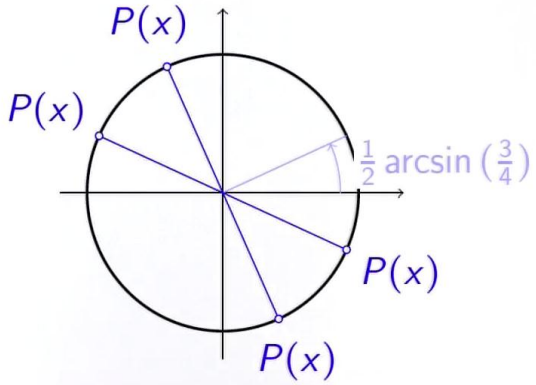
- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(2x) = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ 2x = \pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ 2x = \pi + \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi \quad \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Die Vorgehensweise ist folgende: man hat sin(2x) = -3/4. Dies möchte ich gerne am trigonometrischen Einheitskreis demonstrieren, den Sie hier haben, am Kreis von Strahl 1. Für den Sinus von -3/4 nehme ich -3/4 auf der vertikalen Achse. Ich habe dann zwei mögliche Positionierungen, eine hier und eine dort. In diesem Fall hat der Sinus den Wert -3/4. Das heißt, dass der Winkel 2x derjenige sein muss, für den ich an einem dieser beiden Punkte bin. Also kann ich schreiben, dass 2x, dieser Punkt hier rechts, gegeben wird durch arcsin(-3/4). Und das ist Modulo 2π. Also kann ich ein ganzzahliges Vielfaches, positiv oder negativ, von 2π hinzufügen. Die andere Möglichkeit ist 2x=π - dieser Winkel, den wir von vorhin haben, erneut Modulo 2π. Also kann man das Ganze eindeutig auflösen im Verhältnis zu x. Hier eine kleine Zwischenbemerkung: Arkussinus war ungerade, dieses Zeichen „-“ kann davor stehen, auch hier kann es davor stehen. Und dann teile ich durch 2; um x zu erhalten. Demzufolge erhalte ich: -(1/2)arcsin(3/4) + k mal, Achtung, man teilt durch 2, k mal π, Modulo π, also. Und ähnlich für die zweite Linie.

Notes

Summary

3m 23s

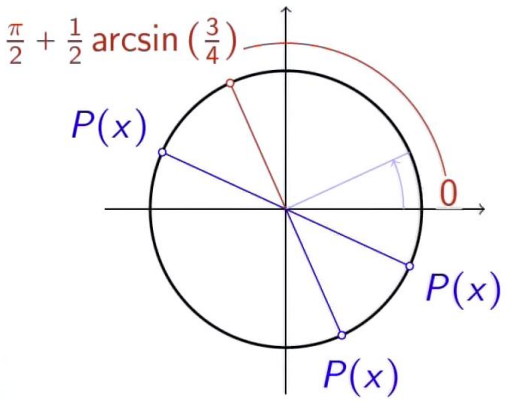
Exemple 1 : solution

- Résolution sur $[0\,,\,2\pi]$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi \quad \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi\,. \end{cases}$$

En parcourant l'intervalle $[0\,,\,2\pi]$, on retient les solutions suivantes :

$$x \;=\; \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),$$



Also schauen wir, ob wir hier zu Lösungen auf der Achse der reellen Zahlen kommen, zu Lösungen, die zwischen Null und 2π liegen. Um dies zu tun, kehren wir zurück zum geometrischen Einheitskreis und werden hier einige Winkel positionieren. Ich werde ab hier (1/2)arcsin(3/4) positionieren. Der Arkussinus von 3/4 ist positiv, er liegt etwa hier. Wenn ich die erste Linie nehme, habe ich „-“. Hier nehme ich die Hälfte von arcsin(3/4). Ich ziehe diese Größe ab. Dann befinde ich mich hier. Modulo π, ich füge hinzu π, π, π, sodass ich mich an zwei Situationen wiederfinde. Für die erste Linie muss ich π/2 + (1/2)arcsin(3/4) nehmen. Arcsin(3/4) plus ein rechter Winkel ergibt diese Position, Modulo π ergibt für mich diese Positionen hier. Also habe ich auf dem trigonometrischen Einheitskreis vier mögliche Positionen. Diese entsprechen einer doppelt unendlichen Familie von Lösungen auf der reellen Geraden. Man fängt an, dieses Intervall zwischen Null und α durchzugehen. Ich fange mit einen Winkel von Null an und vergrößere diesen Winkel, um eine erste Lösung zu suchen. Wenn ich hochgehe, wird die erste Lösung, auf die ich treffe, diese hier sein, die gegeben ist durch, ich erinnere Sie daran, (1/2)arcsin(3/4) + den rechten Winkel.

Notes

Summary

4m 49s

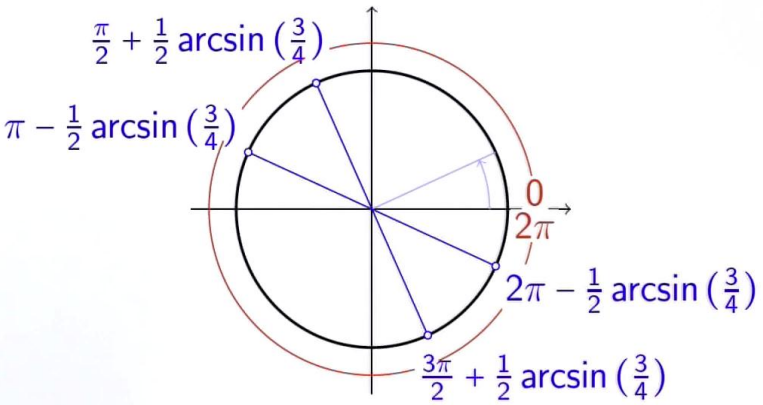
Exemple 1 : solution

- Résolution sur $[0\,,\,2\pi]$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi \quad \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k\,\pi\,. \end{cases}$$

En parcourant l'intervalle $[0\,,\,2\pi]$, on retient les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right), \\ x &= -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \pi\,, \\ x &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \pi\,, \\ x &= -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi\,. \end{aligned}$$



Das ist ein Ausdruck für diese Lösung, die zwischen Null und 2π liegt. Ich gehe weiter und ich vergrößere. Ich erhalte dann folgende Lösung, die hier ist. Wie kann ich diese Lösung erzielen? Ich muss -arcsin(3/4) nehmen, der hier war, plus π. Also bin ich hier und fahre fort. Für den folgenden Punkt, um mich hier wiederzufinden, nehme ich die Position, die ich als erste Möglichkeit hatte und füge π hinzu, was für mich diesen (1/2)arcsin(3/4) ergibt und π/2, vergrößert um π, ergibt 3π/2, was eine dritte Möglichkeit gibt. Ich vergrößere meine Winkel, um zu einer vierten und letzten Lösung zu gelangen. Hier muss man die zweite Möglichkeit plus π nehmen, sodass ich dieses Mal (1/2)arcsin(3/4) plus 2π erhalten werde. Wenn ich fortfahre, beende ich den Bogen bei 2π und finde keine zusätzliche Lösung.

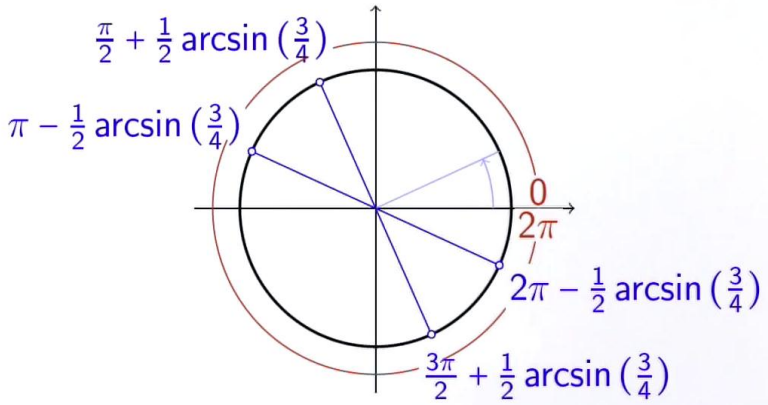
Notes

Summary

6m 19s

Exemple 1 : solution

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),\ \pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),\ \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right),\ 2\pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \right\}.$$



Ich habe also vier insgesamt und für alle, die hier noch einmal aufgeschrieben sind.

Notes

Summary

7m 20s

Exemple 2 : équation trigonométrique simple

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\cos(3x + 2) = 2\cos(x) \cdot \sin(-x)\,.$$

Il s'agit d'une équation trigonométrique simple un peu déguisée :

- on transforme le membre de droite en un sinus,
- puis en un cosinus à l'aide d'un déphasage de $\frac{\pi}{2}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Betrachten wir ein zweites Beispiel. Ich habe Kosinus 3x+2 was gleich 2cos(x) • sin(-x) sein muss, mit einem x, welches bei allen reellen Zahlen erscheint. A priori stimmt diese Gleichung nicht mit der Klassifizierung der einfachen trigonometrischen Gleichung oder der Superposition von Harmonien überein. Man muss hier einen anderen Weg nehmen. Man wird den Term auf der Rechten so transformieren, dass man schließlich eine einfache trigonometrische Gleichung erhält. Auf der Geraden wird man einen Sinus wiederfinden, den man mithilfe einer Phasenverschiebung in einen Kosinus überführt.

Notes

Summary

7m 25s

Exemple 2 : solution

- Transformation

$$\begin{aligned}\cos(3x+2) &= 2\cos(x)\cdot\sin(-x)\\ &= -2\sin(x)\cdot\cos(x)\\ &= -\sin(2x)\\ &= \sin(-2x)\\ &= \cos\left[\tfrac{\pi}{2}-(-2x)\right]\end{aligned}$$

Betrachten wir im Detail, was dabei herauskommt. Man hier muss das Gespür dafür haben, um in diesem 2cos(x) • sin(-x) in etwa eine Formel für einen doppelten Winkel zu sehen und wiederzuerkennen. Das Element, welches stört, ist das „-“ vor dem x. Aber die Sinusfunktion ist ungerade. Doch ein Vorzeichen „-“ im Inneren kann ins Äußere des Sinus verschoben werden, kann also hinter das Gleichheitszeichen verschoben werden und ich erhalte dann auf der rechten Seite -2sin(x) • cos(x). Und dort ist 2sin(x) • cos(x) nichts anderes als der Sinus von 2x. Wenn diese Transformation gemacht ist, kann ich das Zeichen „-“ im Inneren des Sinus zurücksetzen und nutze so den Fakt, dass der Sinus ungerade ist. Das erlaubt, eine Gleichung zu erhalten, die noch einfacher ist, denn dann kombiniere ich jetzt einen Kosinus mit einem Sinus. Ich würde es vorziehen, einen Kosinus mit einem Kosinus zu vergleichen. Doch es ist erforderlich, z. B. diesen Sinus mit einem Kosinus zu vergleichen. Also nutze ich dort eine Phasenverschiebung. Ich sage einfach, dass der Sinus in der Eigenschaft eines Kosinus geschrieben werden kann, wenn man den Winkel (-2x) durch den komplementären Winkel ersetzt, das heißt (π/2 - 2x).

Notes

Summary

8m 03s

Exemple 2 : solution

- Transformation

$$\begin{aligned}
\cos(3x+2) &= 2\cos(x)\cdot\sin(-x)\\
&= -2\sin(x)\cdot\cos(x)\\
&= -\sin(2x)\\
&= \sin(-2x)\\
&= \cos\left[\tfrac{\pi}{2}-(-2x)\right]\\
&= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+2x\right)
\end{aligned}$$

Die beiden Zeichen „-“ addieren sich. Schließlich ergibt sich am Ende, dass Kosinus (3x+2) nichts anderes ist als Kosinus (π/2 +2x). Hier finde ich jetzt eine Gleichung vom einfachen Typ cos = cos wieder.

Notes

Summary

9m 21s

Exemple 2 : solution

- Résolution

$$\cos(3x+2) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + 2x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+2 = \left(\tfrac{\pi}{2} + 2x\right) + k\,2\pi & \text{ou} \\ 3x+2 = -\left(\tfrac{\pi}{2} + 2x\right) + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \tfrac{\pi}{2} - 2 + k\,2\pi & \text{ou} \\ 5x = -\tfrac{\pi}{2} - 2 + k\,2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \tfrac{\pi}{2} - 2 + k\,2\pi & \text{ou} \\ x = -\tfrac{\pi}{10} - \tfrac{2}{5} + k\,\tfrac{2\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$S = \left\{ \tfrac{\pi-4}{2} + k\,2\pi\,,\ -\tfrac{\pi+4}{10} + k\,\tfrac{2\pi}{5} \ :\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Diese kann ich auflösen, wie wir dies gewöhnlich tun, das heißt hier, dass die Winkel gleich sind oder auch mit gegensätzlichem Vorzeichen immer Modulo 2π sind. Also das schreibt sich spontan. Es reicht jetzt, jede der beiden Linien im Verhältnis zu x aufzulösen. Also, wenn ich 2x auf die andere Seite verschiebe, das heißt, wenn ich 2x von den beiden Seiten dieser Gleichung subtrahiere, erhalte ich sofort x =. Ich addiere noch -2, wobei die 2 auf die andere Seite wandern können, wenn man möchte, es bleibt dann x = π/2 - 2 + k2π. Wenn man auf der zweiten Linie 2x verschiebt, erhält man nicht sofort x, man erhält wieder 5x, aber es reicht, durch 5 zu teilen und man erhält dann das gewünschte Ergebnis. Daraus kann man schließen, dass es zwei Lösungstypen gibt. Diejenige auf der ersten Linie, für die man schreiben kann π-4/2 + k2π. Für die zweite Linie kann man sagen, dass diese -π + 4/10 + k mal ist; Achtung, hier nicht 2π, 2π/5.

Notes

Summary

9m 36s

Exemple 3 : équation trigonométrique simple

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 0\,.$$

Il s'agit d'une équation trigonométrique constituée d'une superposition d'oscillations harmoniques de même argument.

Mais cette équation est particulière : le membre de droite est nul.

Elle se ramène donc à une équation trigonométrique simple en tangente.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Betrachten wir ein drittes Beispiel. Lassen Sie mich beim Betrachten dieses Beispiel direkt sagen: Oh, das, ich erkenne es wieder. Es handelt sich um eine Superposition von Harmonien. Ja, es handelt sich um eine Superposition von Harmonien, aber ich werde diese nicht nachfolgend nicht nutzen, denn wenn ich eine Überlagerung habe, ergeben die beiden Harmonien Null. Wenn also die Zahl auf der rechten Seite Null ist, kann man eine besondere Methode nutzen, die auf der Tatsache beruht, dass man versucht, diese Gleichung wieder in eine einfache trigonometrische Tangensgleichung zu überführen. Lassen Sie uns sehen, wie das funktioniert.

Notes

Summary

10m 50s

Exemple 3 : solution

- Transformation

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2t-1) = \frac{2}{3}\cos(2t-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(2t-1)}{\cos(2t-1)} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(2t-1) = \frac{2}{3}.$$

Ich gehe von dieser Gleichung, die gegeben ist, aus. Man kann 2 mal Kosinus auf der rechten Seite schreiben, man kann weiter durch 3 teilen, dann ergibt sich, dass der Sinus (2t-1) nichts anderes ist als 2/3 des Kosinus des gleichen Winkels (2t-1). Ich kann einen Tangens erhalten, wenn ich durch den Kosinus teile. Kann ich durch diesen Term dividieren? Eindeutig kann ich durch cos(2t-1) teilen, wenn ich sicher bin, dass sich dies nicht aufhebt. Ich komme gleich auf dieses Problem zurück. Fahren wir fort mit der Idee, dass sich der Term nicht auflöst, wenn ich rechne. Ich dividiere dann durch cos(2t-1) und erhalte den Quotienten Sinus zu Kosinus, was einen Tangens von 2/3 ergibt. Schließlich beendet man mit einer Tangensgleichung. Bleibt die Frage, ob ich das Recht habe, so zu kalkulieren? Ist dies legitim? Also betrachten wir, was hier passiert. Sie sagen: „ Ah, hier hebt sich der Kosinus für ein bestimmtes t auf. Er wird Null. Ist das möglich? Das ist eindeutig möglich, es gibt solche Werte für t. Aber kann t die Lösung sein? Verliere ich Lösungen? Die Gleichung sagt mir: Wenn der Kosinus Null ist, wenn der Term Null ist, dann ist auch der Sinus Null.

Notes

Summary

11m 26s

Exemple 3 : solution

- Transformation

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2t-1) = \frac{2}{3}\cos(2t-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(2t-1)}{\cos(2t-1)} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(2t-1) = \frac{2}{3}.$$

Remarque :

si $\cos(2t-1) = 0$, alors $\sin(2t-1) = \pm 1$, l'équation n'est pas vérifiée.

Wobei der Sinus und der Kosinus sich nicht zur gleichen Zeit aufheben können. Wenn der Kosinus sich aufhebt, muss der Sinus einen Wert von ±1 haben. Das bedeutet hier, dass Werte von t, die einen Kosinus aufheben, keine Lösungen sind. Also werde ich einzig mit Werten von t rechnen, die mögliche Lösungen darstellen. Und ich habe dann das Recht fortzufahren, wie ich gerade getan habe, ich habe das Recht durch Kosinus zu teilen und zu einer einfachen Tangensgleichung zu kommen.

Notes

Summary

12m 45s

Exemple 4 : superposition d'oscillations harmoniques

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 3\,.$$

Cette équation se distingue de celle de l'exemple précédent par le fait que le membre de droite n'est pas nul.

On la résout en appliquant le principe de superposition des oscillations harmoniques de même argument.

On utilise l'ansatz : $3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = C\cos\left[(2t-1)+\varphi\right]\,.$

Ab dann ist die Situation einfach, denn ich habe vor mir eine trigonometrische Tangensgleichung, eine einfache trigonometrische Gleichung und ich weiß, dass der Winkel (2t-1) einfach arctan(2/3) + kπ ist. Ich löse diese Gleichung im Verhältnis zu t auf, ich erhalte 1 + arctan(2/3), zu dividieren durch 2, Achtung, kπ wird ebenfalls durch 2 geteilt. Und ich kann die vollständige Lösung, aufschreiben, die exakt gegeben ist durch die Hälfte der Summe 1 + arctan(2/3) + kπ/2, k ist eine ganze positive oder negative Zahl. Nehmen wir jetzt wieder den gleichen Ausdruck, den ich vorher auf der linken Seite hatte, 3sin(2t-1) - 2cos(2t-1) = 3. Hier habe ich jetzt tatsächlich eine Superposition von Harmonien. Auf der linken Seite ändert sich, dass ich hier nicht mehr Null habe. In diesem Fall wird man eine Superposition harmonischer Schwingungen nutzen. Sie können bis hierher festhalten, dass wir immer überlagerte harmonische Schwingungen haben, die die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben, aber keine Phasenverschiebung. Hier hat man auch eine gleiche Phasenverschiebung, die Idee, die wir genutzt haben, bleibt also gültig.

Notes

Summary

13m 15s

Exemple 4 : superposition d'oscillations harmoniques

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = 3\,.$$

Cette équation se distingue de celle de l'exemple précédent par le fait que le membre de droite n'est pas nul.

On la résout en appliquant le principe de superposition des oscillations harmoniques de même argument.

On utilise l'ansatz : $3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = C\cos\left[(2t-1)+\varphi\right]\,.$

Also wird man den Ansatz nutzen, dass der Term auf der linken Seite einfach durch eine Amplitude C beschrieben wird, die man vorzugsweise positiv verwenden wird. Man kann Sinus oder Kosinus verwenden, das ist eine Geschmacksfrage, also ich werde den Kosinus nehmen. Was sich bei den letzten Malen änderte, man schreibt hier nicht 2t+φ, man schreibt wirklich den Winkel, der hier ist (2t-1) plus eine Phasenverschiebung. Der Ansatz ist also leicht modifiziert, aber die Idee, die unsere Berechnungen leitet, bleibt absolut gleich.

Notes

Summary

14m 28s

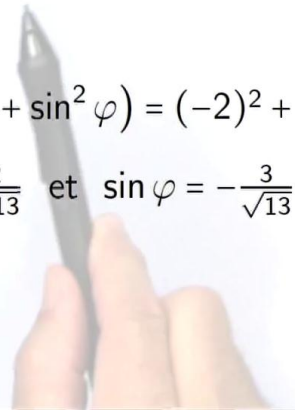
Exemple 4 : solution

$$3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) = C\cos\left[(2t-1)+\varphi\right]$$
$$= C\cos(2t-1)\cdot\cos\varphi - C\sin(2t-1)\cdot\sin\varphi\,.$$

Par identification, on obtient $C\cos\varphi = -2$ et $C\sin\varphi = -3$.

On en déduit

- l'amplitude C : $C^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = (-2)^2 + (-3)^2 \quad\Rightarrow\quad C = \sqrt{13}$
- et la phase φ : $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$,



Also mit diesem Ansatz ist der Term links gleich C mal Kosinus [(2t-1)+φ]. Man wird den Additionsterm für den Kosinus verwenden, das ist die Standardprozedur. Also hat man hier cos·cos minus sin·sin. Und jetzt vergleichen wir mit dem Beispiel 3sin(2t-1), welches ich hier habe. Hier finde ich wieder ein sin(2t-1) und kann also sagen, was übrig bleibt. Das heißt hier: -C·sinφ muss wieder die 3 ergeben. Also ergibt C·sinφ tatsächlich -3, was ebenfalls wieder erscheint. Und hier muss mir C·cosφ diese -2 geben. So komme ich also zum System der zwei Gleichungen. Für die Unbekannten : C und für die Phasenverschiebung : φ. Üblicherweise geht man dann so vor, dass man die beiden Terme links ins Quadrat erhebt und diese addiert. Das C² kann dann ermittelt werden. Es bleibt also die Summe cos²φ + sin²φ, die gleich 1 ist, also bleibt einzig C². Und auf der rechten Seite habe ich (-2)² und (-3)², die beide zusammen 13 ergeben. Also kann ich für C diese √13 nehmen, ich ziehe es vor, die positive Variante für C zu nehmen. Für die Phase führe ich √13 in das System ein. Das heißt, dass der Kosinus von φ -2/√13 ist und der Sinus φ -3/√13.

Notes

Summary

15m 01s

Exemple 4 : solution

$$\begin{aligned} 3\sin(2t-1) - 2\cos(2t-1) &= C\cos\big[(2t-1)+\varphi\big] \\ &= C\cos(2t-1)\cdot\cos\varphi - C\sin(2t-1)\cdot\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient $C\cos\varphi = -2$ et $C\sin\varphi = -3$.

On en déduit

- l'amplitude C : $C^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = (-2)^2 + (-3)^2 \quad\Rightarrow\quad C = \sqrt{13}$
- et la phase φ : $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$,

  $P(\varphi)$ est situé dans le troisième quadrant et $\tan\varphi = \frac{3}{2}$,

  on choisit $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \pi$.

Ich sehe, dass der Winkel φ hier im dritten Quadranten liegen muss und ich weiß, dass Tangens φ gleich Sinus geteilt durch Kosinus ist. Die Vorzeichen „-“ und die √13 werden sich neutralisieren, es bleibt als 3/2. Also kann ich es sicher mit arctan(3/2) versuchen, aber arctan(3/2) ergibt einen Winkel zwischen Null und π/2 folglich im ersten Quadranten. Wenn ich im dritten Quadranten sein möchte, muss ich π subtrahieren und erhalte dann die gewollte Phasenverschiebung.

Notes

Summary

16m 40s

Exemple 4 : solution

L'équation initiale s'écrit donc

$$\sqrt{13}\cos\left[(2t-1)+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)-\pi\right]=3$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos\left[(2t-1)+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)-\pi\right]=\tfrac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos\left[(2t-1)+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)\right]=-\tfrac{3}{\sqrt{13}}\,.$$

On résout cette équation simple en cosinus :

$$2t-1+\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)=\pm\arccos\left(-\tfrac{3}{\sqrt{13}}\right)+k\,2\pi$$

$$\Leftrightarrow\quad t=\tfrac{1}{2}\left[1-\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)\pm\arccos\left(-\tfrac{3}{\sqrt{13}}\right)\right]+k\,\pi\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Hier angekommen, kann ich den Term links hinschreiben wie diesen Wert für C, √13. Und dann erhalte ich den Kosinus, der (2t-1) ist, was dann die Phasenverschiebung φ ist, die wir mit arctan(3/2)-π berechnet haben, und von der wir möchten, dass diese gleich 3 ist. Wir isolieren den Kosinus, was hier getan wurde. Hier kann man dies tun oder nicht, das ist Geschmackssache. Sie sehen, dass wir hier noch dieses -π haben. Diese Phasenverschiebung können Sie neutralisieren, sie mit einem Vorzeichen „- " verschieben, ich verschiebe diese also nach rechts. Noch einmal, Sie können dies tun oder nicht, es kommt auf dasselbe heraus. Hier habe ich eine trigonometrische Gleichung, einfach als Kosinus, das heißt, dass der Winkel, dieser hier innen, durch ±arccosinus gegeben wird, den Term rechts. Ich kann schreiben, dass [2t-1 + arctan(3/2)] ist, dass ist dieser Winkel hier zwischen den eckigen Klammern, das ist ±arccos(-3/√13) Modulo 2π. Eine Gleichung, die ich im Verhältnis zu t auflösen kann, und erhalte dann hier alle möglichen Werte für t, hier in der Form mit einem kπ. Wenn man hierhin sieht ist klar, dass ich t isolieren kann, indem ich durch 2 dividiere, sodass mann dann Modulo π erhält und nicht Modulo 2π.

Notes

Summary

17m 14s

Exemple 5 : résolution par factorisation

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0\,.$$

La résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de plusieurs équations simples.

Pour cela, il suffit de factoriser le membre de gauche en utilisant les formules "somme-produit" sur les deux sommes

$$\sin x + \sin 4x \qquad \text{et} \qquad \sin 2x + \sin 3x\,.$$

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man auch Lösungen trigonometrischer Gleichungen erhalten kann, indem man trigonometrische Formeln verschiedener trigonometrischer Beziehungen verwendet. Hier werden wir ein Problem mithilfe der Faktorisierung lösen. Auf Basis der Faktorisierung können wir hier folgende Beobachtung machen. Man kann beoachten, dass die Summe der Winkel x und 4x (also 5x) hier wieder gegeben wird durch 2x + 3x. Und wir wissen, dass wir die Summen von Sinus in Produkte transformieren können und dass in diesen Produkten Winkel in der Form von Halbdifferenzen und Halbsummen erscheinen werden. Das heißt, wenn ich eine derartige Formel benutze, einmal für den ersten und den letzten Term sin(x) und sin(4x), das andere Mal für die beiden anderen Terme, werde ich eine Winkelsumme von 5x erhalten, was üblich ist.

Notes

Summary

18m 39s

Exemple 5 : solution

- Factorisation

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x &= \left[\sin x + \sin 4x\right] + \left[\sin 2x + \sin 3x\right] \\
&= \left[2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos \tfrac{3x}{2}\right] + \left[2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos \tfrac{x}{2}\right] \\
&= 2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \left[\cos \tfrac{3x}{2} + \cos \tfrac{x}{2}\right] \\
&= 2 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \left[2 \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2}\right] \\
&= 4 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2}\,.
\end{aligned}$$

Das erlaubt mir, sehr weit in Richtung Lösung dieser Gleichung zu gelangen. Wenn ich diese Gleichung, die gleich Null ist, zusammenfasse, wenn ich die erste und die letzte und die beiden anderen zusammenfasse, verwende ich diese Transformation einer Summe in einem Produkt. Dann habe ich den Faktor 2. Man erhält sin cos. Man erhält den Sinus der Halbsumme, 5x/2, und den Kosinus der Halbdifferenz. Beachten Sie, dass die Halbdifferenz -3x/2 wäre, aber der Kosinus ist gerade, also kann man sofort 3x/2 schreiben. Für den zweiten Term ist es genauso. Faktor 2, der Sinus der Halbsumme, also ist die Summe 5x, also 5x/2, und der Kosinus der Halbdifferenz, diese Halbdifferenz wäre -x/2, der Kosinus wäre gerade, also könnte ich diese -x/2 durch x/2 ersetzen. Wenn ich den Term, den ich hier sehe, betrachte, kann ich 2sin(5x/2) herausstellen und was bleibt ist ein cos(3x/2) und ein cos(x/2). In diesen eckigen Klammern finde ich die Kosinussumme wieder, die ich erneut in ein Produkt transformieren kann. Für die Kosinussumme erhält man 2cos(x)·cos(x/2), wenn sie die Formel für die Transformation einer Kosinussumme in ein Produkt betrachten. Also erhalte ich schließlich 4sin(5x/2)·cos(x)·cos(x/2), alles in einem Produkt.

Notes

Summary

19m 36s

Exemple 5 : solution

- Résolution

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sin \tfrac{5x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \tfrac{x}{2} = 0 \,. \end{aligned}$$

  - $\sin \frac{5x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{2\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

Wenn ich meine Gleichung auflösen will, wobei dieser Term gleich Null werden soll, kann ich den Term links sowohl durch trigonometrische als auch durch algebraische Manipulation annullieren, sodass ich diese und ähnliche Dinge somit klarstelle. Diese Gleichung ist äquivalent, sie hat die gleichen Lösungen, hat aber den Vorteil, in Form eines Produkts vorzuliegen, eines Produkts, das Null wird. Ein Produkt kann nur dann Null sein, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Wenn gleichzeitig mehrere Faktoren auf Null gesetzt werden, ist das noch besser. Aber ich kann auch sagen, wenn der erste Faktor sin(5x/2) Null wird, dass dann auch der Kosinus Null wird oder dass der Kosinus von x/2 Null wird. Beachten Sie bitte, dass hier „oder“ enthalten ist, das heißt, dass man auch einen Wert x haben kann, der zwei, ja sogar drei Fälle auf Null setzt. Wir werden diese drei Fälle jetzt separat analysieren. Jeder dieser drei Fälle ist eine einfache trigonometrische Gleichung, die erste für Sinus, die zweite für Kosinus, die dritte ebenfalls für Kosinus. Also bei der ersten, sin(5x/2)=0, handelt es sich um einen speziellen Fall, nämlich „gleich Null“. Wo wird der Sinus hier auf Null gesetzt?

Notes

Summary

21m 16s

Exemple 5 : solution

- Résolution

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 \sin \tfrac{5x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \tfrac{x}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sin \tfrac{5x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \tfrac{x}{2} = 0 \,. \end{aligned}$$

- $\sin \frac{5x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{2\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\cos \frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

Der Sinus wird exakt bei kπ Null, wobei k eine ganze positive oder negative Zahl ist. Wenn 5x/2 in der Form kπ sein muss und man nach x auflöst, also mal 2, dividiert durch 5, dann erhält man ein Vielfaches von 2π/5. Für die zweite Linie, wo wird der Kosinus Null? Der Kosinus wird Null bei π/2 Modulo π. Dies ist alles ganz oben und ganz unten im trigonometrischen Einheitskreis. Und da kann man nichts machen, das sind exakt die Werte von x. Für cos(x/2) hat man den gleichen Ansatz, x/2 muss π/2 + kπ sein. Aber diesmal muss ich noch das x mit 2 multiplizieren und sehe dann, dass x in der Form π + k2π sein muss.

Notes

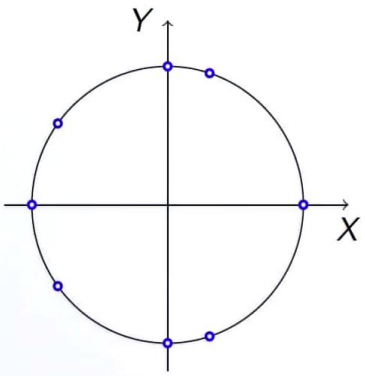
Summary

22m 31s

Exemple 5 : solution

On en déduit l'ensemble solution :

$$S = \left\{ k\,\frac{2\pi}{5}\,,\ \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ \pi + k\,2\pi :\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Man fasst die drei Familien unendlicher Lösungen, die wir gefunden haben, zusammen, also k2π/5, π/2 modulo π, und π modulo 2π. Wenn Sie diese Lösungen auf dem trigonometrischen Einheitskreis einordnen, ist es vielleicht am einfachsten, mit der dritten Möglichkeit anzufangen. Ich habe π, welches sich links befindet, und das ist Modulo 2π, dessen Positionen alle hier sind. Für die zweite Möglichkeit, die π/2 ist, also π/2 ist hier oben, plus kπ gibt eine Position oben, +π unten, +π oben, das sind also 2 Positionen. Also habe ich schon 3 Möglichkeiten auf dem trigonometrischen Einheitskreis identifiziert. Jetzt die erste, die k·2π/5 ist. Der Winkel von 2π/5 findet sich hier. Und ich nehme hier zunächst Null mal 2π/5, einmal 2π/5, zwei-, drei-, viermal. Wenn ich erneut 2π/5 nehme, habe ich 2π, kehre also zurück. Also bietet mir diese erste Möglichkeit hier 5 Positionen auf dem trigonometrischen Einheitskreis, dort, dort, dort, dort und dort.

Notes

Summary

23m 20s

Exemple 6 : équation rationnelle en sinus et cosinus

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\cos x = \tan x \,.$$

Il s'agit d'une équation rationnelle en sinus et cosinus :

$$\cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \,.$$

Pour la résoudre, on cherche à l'exprimer sous la forme d'une équation polynomiale en une variable auxiliaire z.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Um zum Schluss zu kommen, möchte ich jetzt eine Gleichung lösen, die das folgende Kapitel einleitet, die uns zu Gleichungen führt, welche man als rationale zu Sinus und Kosinus bezeichnet. Also, das Beispiel ist cos(x) = tan(x). Man sieht noch nicht, wo der Term „rational“ ist. „Rational“ bedeutet, dass es einen Quotienten, eine Fraktion gibt. Gut, es gibt den Tangens, der als Sinus auf Kosinus beschrieben werden kann. Machen wir es so, schreiben wir Tangens als solcher wie Sinus/Kosinus. Wir versuchen dann, diese Gleichung zu lösen. Und dies werden wir mit einer Methode vorstellen, die für dieses konkrete Beispiel sicherlich etwas überdimensioniert ist, aber den Vorteil hat, eine Technik einzuführen, die wir beim nächsten Mal verfeinern werden. Die Technik besteht darin, diese trigonometrische Gleichung durch ein polynomiale Gleichung mit einer Variablen z zu ersetzen. Und dann können wir all unser Wissen zur Lösung von polynomialen Gleichungen nutzen, um eine trigonometrische Gleichung zu lösen.

Notes

Summary

24m 35s

Exemple 6 : solution

Résolution de l'équation $\cos x = \tan x$.

- Domaine de définition : $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Transformation :
$$\cos x = \tan x \ \Leftrightarrow \ \cos^2 x = \sin x \ \Leftrightarrow \ 1 - \sin^2 x = \sin x \ \Leftrightarrow \ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$
- Changement de variable : en posant $z = \sin x$, $z \in [-1, 1]$, on obtient une équation polynomiale du deuxième degré en z :
$$z^2 + z - 1 = 0.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Betrachten wir dies näher. Wie immer müssen wir mit einer Definition anfangen. Es ist klar, dass cos(x) immer definiert ist. Tan(x) kann beispielsweise nicht durch π/2 oder 3π/2 definiert werden. Also müssen wir im Bereich der Definition von tan(x) bleiben, das heißt, bei allen reellen Werten außer Werten vom Typ π/2 Modulo π. Wir haben bereits gesagt, dass man tan auch als sin/cos schreiben kann. Den Kosinus können wir auf der anderen Seite als eine Gleichung vom Typ $\cos^2 x = \sin(x)$ angeben. Hier kann man dieses Verhältnis, welches ich als das von Pythagoras einordnen würde, verwenden, ich drücke also $\cos^2$ mithilfe von $\sin^2$ aus, wonach $1-\sin^2 x$ $\cos^2$ ergibt. Und dann erhalte ich eine Gleichung, die nur noch den Sinus von x enthält. Ich stelle also alles auf dieselbe Seite und habe dann $\sin^2 x + \sin(x) - 1 = 0$. Dies ist also eine besonders glückliche Situation, weil man hier ganz einfach sagen kann, ok, nennen wir diesen sin(x) „z“. Demnach kann z nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Also nennen wir dies z. Sin^2 wird dann z^2, also kann ich hier schreiben: z^2 anstelle von $\sin^2$, z anstelle von sin und -1 bleibt. Also erhalte ich tatsächlich eine polynomiale Gleichung zweiten Grades der Form $z^2+z-1=0$.

Notes

Summary

25m 41s

Exemple 6 : solution

- Résolution de l'équation polynomiale en z :

$$z^2 + z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{<-1} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

- Solutions de l'équation initiale :

$$\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi \quad \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$S = \left\{ \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi,\ \pi - \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\,2\pi :\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Diese Gleichung löst sich auf. Nehmen Sie die übliche Form, dann finden Sie eine erste und eine zweite Lösung. Betrachten wir die erste (-1-√5)/2 etwas näher. Sie können einen Taschenrechner nehmen, Sie können auch Schätzungen mithilfe eines Wertes nahe bei √5 vornehmen und werden dann etwas finden, was unterhalb von -1 liegt. Also wird der Sinus nicht diesen Wert z annehmen können. Dageben ist (-1+√5)/2 ein Wert, der zwischen -1 und 1 liegt. Also haben wir nur eine einzige Möglichkeit, die wir für den Sinus nutzen werden. Ab hier lässt sich alles zurückführen zur Auflösung sin(x) = diesem Wert (-1+√5)/2, den wir gefunden haben. Ich komme einmal mehr auf eine einfache trigonometrische Gleichung zum Sinus zurück Gut, ab hier beginnen wir die übliche Prozedur. Der Winkel x wird durch arcsinus des Terms links gegeben oder π-arcsin des Terms links, Modulo 2π. Und wir schreiben dann die ganze Lösung in der hier unten angezeigten Form auf.

Notes

Summary

27m 08s

Remarque

Dans l'exemple précédent, le choix du bon changement de variable est facile car la transformation effectuée nous amène vers un polynôme en $\sin x$.

Dans la section suivante, nous allons généraliser cette méthode qui consiste à transformer une équation trigonométrique rationnelle en une équation polynomiale à l'aide d'un changement de variable.

Le choix du changement de variable étant souvent difficile à faire, nous allons présenter un test qui permet de faire le bon choix.

In dem hier vorgestellten Beispiel war natürlich die Wahl des Wechsels der Variablen, dieses z=sin(x) leicht zu finden um abzuschließen, da man hier eine Gleichung hatte, die nur den Sinus enthielt. Im folgenden Abschnitt werden wir diese Methode verallgemeinern, die darin besteht, eine rationale trigonometrische Gleichung, die also Produkte, Summen, Quotienten, Formen von Termen mit Sinus und Kosinus beinhaltet, in eine polynomiale Gleichung mit gut gewählter Änderung der Variablen zu transformieren. Das zentrale Problem dabei ist: Wie kann man die Änderung der Variablen, die zu realisierende Substitution finden? Und wir wollen dabei in der Lage sein, klare und präzise Indizes finden.

Notes

Summary

28m 19s

Equations trigonométriques

Ce que nous avons revu :

- la résolution de certaines équations trigonométriques :
  - les équations simples,
  - celles qui comportent une superposition d'oscillations harmoniques
  - et celles qui se ramènent aux équations simples par transformation ou par factorisation.

Prochaine étape :

- la résolution des équations trigonométriques rationnelles, les tests de Bioche.

Eine Bilanz dessen, was wir heute gemacht haben: Ich habe ganz einfach daran erinnert und Ihnen gezeigt, was man macht, wenn man einige Dinge schon recht gut beherrscht, denn Sie haben schon eine Menge gelernt. Die einfachen trigonometrischen Gleichungen erlauben es, viele Probleme zu lösen, insbesondere jene, die mit trigonometrischen Transformationen, Faktorisierungen und algebraischen Manipulationen verbunden sind, Wir haben Superpositionen harmonischer Schwingungen studiert: Wenn eine Superposition Null ist, dann fällt sie auf eine einfache trignonometrische Tangensgleichung zurück und ohne dies nutzt man die üblichen Methoden der Superposition. Und um dies abzuschließen, wir haben die Tür zur Substitution geöffnet, über die wir dann beim nächsten Mal sprechen werden. Also hoffe ich, dass ich Ihren Appetit für das nächste Mal anregen konnte. Vielen Dank, dass Sie mir gefolgt sind und bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

29m 15s