ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Equations trigonométriques

## 6.2 Règle de Bioche : théorie

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

# Equations trigonométriques rationnelles : introduction

Considérons une expression rationnelle $R(\sin x, \cos x)$ en sinus et cosinus.

Par exemple

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^5 x \cdot \cos^2 x - \sin x + 4\cos x - 3}{\sin^3 x - 5} - \sin x + 7\,.$$

Pour résoudre l'équation trigonométrique rationnelle $R(\sin x, \cos x) = 0$, on cherche à la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une des substitutions suivantes :



Bonjour. La dernière fois, nous avons passé en revue toute une gamme d'équations trigonométriques que nous savons résoudre à présent. Aujourd'hui je vais vous présenter un autre type d'équation trigonométrique. Ce sont les équations trigonométriques rationnelles que l'on peut résoudre à l'aide des règles de Bioche. Des règles que je vais présenter aujourd'hui. La prochaine fois, je les mettrai en oeuvre sur quelques exemples. Alors qu'est-ce que c'est une équation trigonométrique rationnelle? On considère donc ce qu'on appelle une équation rationnelle, en l'abrégeant avec *R(sin x, cos x)*, une expression rationnelle en sinus et cosinus. Ça veut dire que vous retrouvez, ici, une expression de ce type-là. Donc vous avez des sinus, des cosinus. Vous avez aussi des sinus et cosinus à des puissances 2, 3, 7, 8. Vous avez des produits de sinus, de cosinus, de puissances de sinus et de puissances de cosinus. Vous avez des fractions et des sommes. Voilà. Ça, c'est une expression rationnelle en sinus et en cosinus. Pour résoudre une équation trigonométrique rationnelle, donc *R(sin x, cos x) = 0*, on va toujours considérer ici égale à 0 donc, cacher ce *+ 7* qui aurait pu être de l'autre côté en tant que égal *-7*.

Notes

Summary

0m 04s

# Equations trigonométriques rationnelles : introduction

Considérons une expression rationnelle $R(\sin x, \cos x)$ en sinus et cosinus.

Par exemple

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^5 x \cdot \cos^2 x - \sin x + 4\cos x - 3}{\sin^3 x - 5} - \sin x + 7\,.$$

Pour résoudre l'équation trigonométrique rationnelle $R(\sin x, \cos x) = 0$, on cherche à la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une des substitutions suivantes :

1. $z := \cos x$,
2. $z := \sin x$,
3. $z := \tan x$ ou
4. $z := \tan \frac{x}{2}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On reprend tout sur un même membre égale à 0. On cherche à transformer cette équation trigonométrique en équation algébrique. De préférence, on aimerait qu'elle soit polynomiale. Et pour le faire, nous allons utiliser différent types de substitutions. Nous allons utiliser la substitution *z := cos x*, *z := sin x*, troisième possibilité, *z := tan x* et quatrième possibilité, *z := tan x/2*. Alors, il faudra clarifier à chaque fois quand est-ce qu'on peut utiliser quelle substitution. Alors là, ceux sont les règles de Bioche ou la règle de Bioche qui va nous aider.

Notes

Summary

1m 35s

# Règle de Bioche

## Proposition

*Soit* $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

*On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :*

- *si l'équation est invariante lorsqu'on remplace* $x$ *par* $-x$ *:*

$$\underbrace{R\left[\sin(-x), \cos(-x)\right]}_{=R[-\sin x, \cos x]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{D}_{def}),$$

*on pose* $z := \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in [-1, 1].$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous la formulons dans le cadre d'une proposition. Donc si on veut résoudre une équation trigonométrique rationnelle. On va la transformer en une équation algébrique. Alors, on peut procéder de la façon suivante... Nous distinguons les quatre substitutions, alors nous distinguerons quatre cas. Et dans chaque cas, nous indiquons quand est-ce qu'il faut se lancer avec la substitution de ce type. Donc premier cas, c'est la substitution *z := cos x* Ce que l'on va faire sur l'équation rationnelle : on va remplacer *x* par *-x*. Donc, on va considérer l'équation *R [sin (-x), cos (-x)]*. Donc, on remplace dans cette équation partout *x* par *-x*. Et nous testons si cette équation reste invariante par rapport à l'équation de départ. C'est-à-dire si on peut obtenir exactement la même forme d'équation. Notez bien que que le *cos (-x)* n'est rien d'autre que le *cos x* et le *sin (-x)* n'est rien d'autre que *- sin x* Si vous voulez, vous remplacez simplement *sin x* par *- sin x* et vous laissez *cos x*. Si l'équation ne change pas de forme, alors on est dans un bon cas.

Notes

Summary

2m 17s

# Règle de Bioche

## Proposition

*Soit* $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

*On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :*

- *si l'équation est invariante lorsqu'on remplace* $x$ *par* $\pi - x$ *:*

$$\underbrace{R\left[\sin(\pi - x), \cos(\pi - x)\right]}_{= R[\sin x, -\cos x]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{D}_{def}),$$

*on pose* $z := \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in [-1, 1]$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Vous imaginez typiquement ici la situation où le sinus n'apparaîtrait que, par exemple, à une puissance 2 ou à une puissance 4. Dans ce cas, si on remplaçait le *sin x* par - *sin x*, le sinus carré et le sinus puissance quatre ne bouge pas, il reste tel quel. Donc c'est ça la situation typique que nous cherchons. Si nous l'avons, nous prenons *z := cos x* en indiquant bien que nous sommes intéressés uniquement aux valeurs de Z comprises entre - *1* et *1*. Deuxième possibilité, donc si la première possibilité ne donne pas satisfaction : on va remplacer *x* par *π - x* Donc, on procède comme précédemment. Partout où l'on *x*, on met *π - x*. Et l'équation doit rester invariante, c'est-à-dire qu'elle doit être exactement de la même forme que l'équation de départ. Par exemple, après le remplacement de *x* par *π - x*, on peut multiplier cette expression, par exemple, par *-1* ou comme ça. On peut la manipuler algébriquement mais il faut qu'on obtienne pour finir la même forme de l'équation. Alors notez bien que ceci signifie que le sinus reste le même. Donc le *sin (π - x)* est le *sin x*.

Notes

Summary

3m 32s

# Règle de Bioche

## Proposition

*Soit* $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

*On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :*

- *si l'équation est invariante lorsqu'on remplace* $x$ *par* $\pi + x$ *:*

$$\underbrace{R\big[\sin(\pi+x), \cos(\pi+x)\big]}_{=R[-\sin x, -\cos x]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{D}_{def}),$$

*on pose* $z := \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

En revanche, le cosinus bouge de signe c'est-à-dire que, ici si vous voulez testez autrement, vous remplacez simplement le *cos* par - *cos* et vous laissez le *sin* tel quel. A nouveau, une situation typique, c'est que le cosinus n'apparaîtrait que dans une puissance paire, la puissance deux ou quatre. Alors là, on est exactement dans cette situation. Et dans ce cas là, on choisit *z := sin x*. Notez bien que si le cosinus n'apparaissait, par exemple, que sous la forme d'une puissance deux on pourrait, sans autre, exprimer ce cosinus à l'aide de *z*. Troisième possibilité, si les deux premières ne donnent pas satisfaction : on remplace *x* par $\pi$ *+x*. Cette fois-ci, cela signifie, si vous regardez ici que le *sin* devient - *sin* et le *cos* devient également - *cos*. Typiquement ça, ça peut arriver, par exemple si le sinus et le cosinus n'apparaissent que comme produit, sinus fois cosinus. Donc, là si vous remplacez le *sin* par - *sin* et le *cos* par - *cos*, le produit ne change pas de forme. C'est ça la situation typique.

Notes

Summary

4m 44s

# Règle de Bioche

## Proposition

*Soit* $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

*On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :*

- *si l'équation est invariante lorsqu'on remplace* $x$ *par* $\pi + x$ *:*

$$\underbrace{R\big[\sin(\pi + x), \cos(\pi + x)\big]}_{= R[-\sin x, -\cos x]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{D}_{def}),$$

*on pose* $z := \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Au lieu d'un produit, on peut aussi avoir un quotient, c'est-à-dire que le sinus et le cosinus apparaissent uniquement que comme *sin / cos*, c'est-à-dire précisément sous la forme de tangente. C'est pour cela qu'on va choisir la substitution *z := tan x*. Notez bien que cette substitution, elle a un désavantage. Elle va transformer certains *x* en *z* mais pas tous. En effet, si *x* vaut *π / 2 modulo π*, *tan x* n'est pas définie. Il faudra traiter ces valeurs de *x* de façon séparée.

Notes

Summary

5m 47s

# Règle de Bioche

## Proposition

*Soit* $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

*On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :*

- *si les trois tests d'invariance précédents*

$$x \longleftrightarrow -x, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x,$$

*sont négatifs, on pose* $z := \tan \frac{x}{2}$, $x \neq \pi \mod 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Finalement, si les trois tests que nous venons de présenter ne fonctionnent pas, si les trois tests sont négatifs alors on peut se rabattre sur *z := tan x / 2* Là, de nouveau, les valeurs de *x* qui sont égaux à *π modulo 2π* ne peuvent pas être transformés et devront être traités de façon séparée.

Notes

Summary

6m 20s

# Remarques

- Nous venons de voir que si l'équation est invariante lorsqu'on remplace $x$ par $\pi + x$, on pose

$$z := \tan x, \quad x \neq \tfrac{\pi}{2} \mod \pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

  Mais les valeurs $x = \frac{\pi}{2} \mod \pi$, qui sont inaccessibles par le changement de variable, sont peut-être solutions ; il faut donc les tester dans l'équation initiale.

- De même, si les trois tests d'invariance sont négatifs, on pose

$$z := \tan \tfrac{x}{2}, \quad x \neq \pi \mod 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

  Les valeurs $x = \pi \mod 2\pi$ sont interdites par le changement de variable, mais elles sont peut-être solutions ; il faut les tester dans l'équation initiale.



Disons tout de suite ce que cela veut dire pour *tan x* et *tan x / 2*. Donc si j'utilise cette subsititution *z := tan x*, ça c'était le troisième cas, il faut simplement tester sa valeur *π / 2 mod π*. Il faut les tester par insertion dans l'équation. Il faut les tester, s'ils sont solution oui ou non. De même pour la substitution *tan x / 2*, les *x* qui ne sont pas admissibles dans *tan* sont *π mod 2π*, il faut les insérer dans l'équation de départ et vérifier est-ce qu'ils remplissent l'équation oui ou non. Regardons un peu de plus près comment fonctionne cette substitution proposée par la règle de Bioche.

Notes

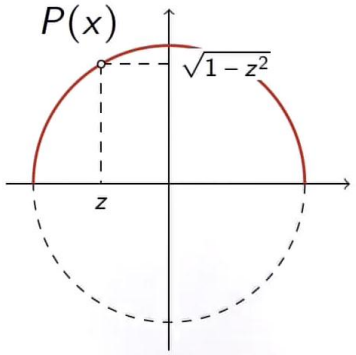
Summary

6m 41s

# Test d'invariance $x \longleftrightarrow -x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace $x$ par $-x$,

- la substitution $\cos x = z$ transforme l'équation trigonométrique en une équation algébrique en $z$ dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,






Commençons par le premier cas, c'est-à-dire le cas où je remplace *x* par - *x* et où l'équation reste invariante. Si l'équation reste invariante, ça signifie que si une certaine valeur fixe de *x* est solution, le - *x* sera également une solution de cette équation. Alors ça me permet de prendre la démarche que voici : on va chercher uniquement des solutions dans les cadrans *I* et *II*. Sur ce cadran, le cosinus varie entre *-1* et *1*. En revanche, le sinus reste positif. Ensuite quand j'aurai toutes les solutions dans les cadrans *I* et *II*, par symétrie, c'est-à-dire en remplaçant *x* par *-x*, j'obtiendrai les autres solutions et de ce fait, toutes les solutions. Alors ça, ça signifie que je remplace cosinus par *z carré*, ça c'est la substitution. Mais le sinus je peux le remplacer par √ *(1 - x)* avec un signe + devant, puisque dans les cadrans *I* et *II*, le sinus est plus grand ou égal à zéro. Alors une fois qu'on fait ces substitutions, on obtient une expression algébrique, on peut ou on peut pas la résoudre. Ça c'est un problème plus générique.

Notes

Summary

7m 22s

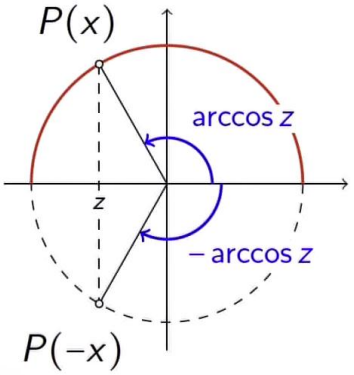
# Test d'invariance $x \longleftrightarrow -x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace $x$ par $-x$,

- la substitution $\cos x = z$ transforme l'équation trigonométrique en une équation algébrique en $z$ dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,
- chaque équation simple donne, dans les quadrants I et II

  $\cos x = z_i \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos(z_i) + k\,2\pi$,
- par symétrie, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont

  $x = \pm \arccos(z_i) + k\,2\pi$, $i = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{Z}$.






Mais si on a toutes les solutions de cette équation algébrique, disons *Z1*, *Z2*, etc... jusqu'à *Zn*, si ça on peut le réaliser alors on peut en déduire, de nouveau, les valeurs de *x* correspondantes. Alors on va dire que le *cos x* c'était le *Z1*, *Z2*, *Z3*, etc..., donc *Zi* de façon générale. Et là, on obtient *arcos (z)*. Alors l'*arccos(z)* est dans les cadrans *I* et *II* et on prend + *k 2 π* pour rester dans les cadrans *I* et *II*. Mais je vous rappelle que par symétrie, nous avons toujours *x* et *-x* possibles, c'est-à-dire dans ce cas là, on prend, en fait, *+/- arccos(z) mod 2π*.

Notes

Summary

8m 33s

## Test d'invariance $x \longleftrightarrow -x$ : procédure

1. On pose $z := \cos x$ et on procède aux remplacements suivants dans l'équation donnée :

$$\cos x = z, \quad \sin^2 x = 1 - z^2 \quad \text{(et au besoin } \sin x = \sqrt{1 - z^2}\text{)};$$

on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.

2. On collecte dans l'ensemble solutions toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\cos x = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors si on tire un bilan de la procédure, voilà ce qui faut retenir pour la substitution dans ce cas-là. On remplace *cos x* par *z*, le *sin²* par *1 - z²*, ça c'est clair. La plupart du temps, on s'en sort avec ces deux parce que le sinus risque d'apparaître sous des puissances paires. Si cela n'est pas le cas, ça c'est surtout du au fait que les équations trigonométriques peuvent assez bien cacher ces symétries et je vous montrerai ça la prochaine fois dans des exemples. Donc si on a besoin d'un *sin x* ou d'un sinus cube, alors on remplace ça par *√ (1 - z²)* avec le signe + simplement. On recherche les solutions *Z1* jusqu'à *Zn*. Et ensuite on prend toutes les solutions de *cos x = Zi*. En prenant toutes les solutions, c'est-à-dire *+/- arccos mod 2π*, on corrige cette hypothèse sur le sinus, ça nous venons de le présenter.

Notes

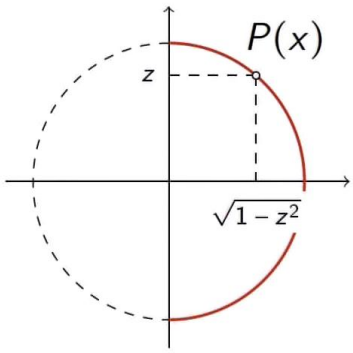
Summary

9m 16s

# Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi - x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace $x$ par $\pi - x$,

- la substitution $\sin x = z$ nous donne une équation algébrique en $z$ dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,






Cette procédure, on peut la réitérer pour les autres cas. Donc, si on est dans le deuxième cas, où on a invariance par rapport au remplacement de *x* par *π - x*. Dans ce cas là, on peut argumenter comme suit. Cette fois-ci, ça signifie que si *x* est une solution dans l'équation, le *π - x*, donc l'équation est invariante, est également une solution. Je vais cette fois-ci me concentrer sur les cadrans *I* et *IV*. Sur ces cadrans, le sinus varie entre *-1* et *1*. Le cosinus, quand à lui, reste positif. Dès que j'ai toutes les solutions sur les cadrans*I* et *IV*, j'obtiens les autres solutions dans les autres cadrans simplement par symétrie. Il suffit de remplacer tous les *x* par *π - x*. On sait très bien que si *x* est solution, *π - x* l'est aussi. Donc, on peut procéder à la façon suivante : on remplace *sin x* par *z*, le *cos x* par *1 - z²*, c'est *1 - sin² x*, sous la racine c'est *cos² x*, on tire la racine, on prend le signe + parce que nous sommes dans les cadrans *I* et *IV*. On introduit cela dans l'équation, on obtient une équation algébrique.

Notes

Summary

10m 12s

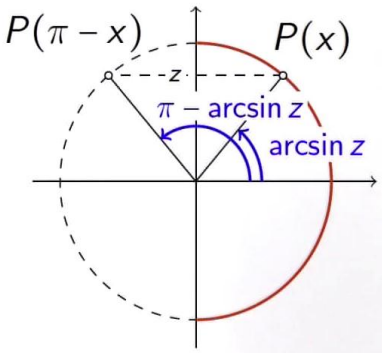
# Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi - x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace $x$ par $\pi - x$,

- la substitution $\sin x = z$ nous donne une équation algébrique en $z$ dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,
- chaque équation simple donne, dans les quadrants I et IV

  $\sin x = z_i \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin(z_i) + k\,2\pi$,
- par symétrie, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont

$$\begin{cases} x = \arcsin(z_i) + k\,2\pi, & \text{ou} \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin(z_i) + k\,2\pi & i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$






On résout, on trouve les solutions *Z1* jusqu'à *Zn*. Et on recherche donc les *Z* correspondants dans les cadrans *I* et *IV*. Alors là c'est *arcsin*, si je prends *sin x = Zi*, cela me donne pour *x = arcsin (Zi) mod 2π*, ici vous avez le dessin. Et dès que j'ai tous les *x*, j'utilise encore la symétrie, c'est-à-dire que je prends des solutions du type *π - x*, donc j'obtiens encore *π - arcsin(Zi) mod 2π*. Ce qui arrive, c'est que je prends toutes les solutions de *sin x = Zi*, j'oublie que je suis uniquement dans les cadrans *I* et *IV*.

Notes

Summary

11m 28s

# Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi - x$ : procédure

1. On pose $z := \sin x$ et on procède aux remplacements suivants dans l'équation donnée :

$$\sin x = z, \quad \cos^2 x = 1 - z^2 \quad \text{(et au besoin } \cos x = \sqrt{1 - z^2}\text{)};$$

on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.

2. On collecte dans l'ensemble solutions toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\sin x = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc la procédure est très simple. Je remplace dans ce cas-là, le *sin x* par *z* et *cos² x* par 1 - z². Si j'en ai besoin, le *cos x* par √(1 - z²), donc avec le signe +. On obtient une équation algébrique, on la résout, on obtient des solutions *Z1*, *Z2*, etc... Et on résout après chaque équation simple, *sin x = Zi*, puis on prend vraiment toutes les solutions dans tous les cadrans. Et ça, ça donne l'ensemble des solutions.

Notes

Summary

12m 03s

# Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi + x$

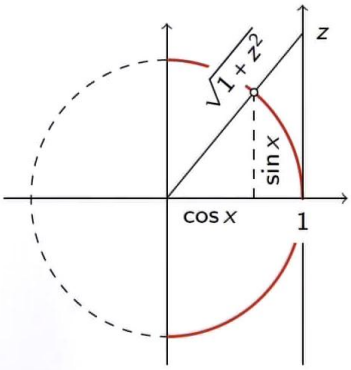
Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace $x$ par $\pi + x$,

- on pose $z := \tan x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi,$

  et on en déduit

$$\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}};$$




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Troisième cas, là nous sommes dans le cas où l'équation reste invariante si je remplace *x* par *π + x*. Alors le raisonnement est tout à fait similaire, cela signifie que si *x* est solution, *x + π* l'est également. Alors cette fois-ci, je recherche des solutions dans les cadrans *I* et *IV* à nouveau parce que, je prends la subsitution *tan x* et je choisis toujours les cadrans qui correspondent à *arc* de la substitution. Donc ici *arctan*, c'est les cadrans *I* et *IV*. Sur ce cadran, je sais en tout cas que le cosinus est toujours positif. Le sinus, non, il peut être positif ou négatif. Alors dès que j'ai toutes les solutions dans les cadrans *I* et *IV*, j'obtiens toutes les solutions sur le cercle trigonométrique en prenant pour chaque solution *x* également la solution *π + x*. Dans les faits, cela signifie partout où j'ai *tan x*, j'ai pris *z*. Ensuite qu'est-ce que je fais avec les sinus et les cosinus. Le cosinus peut s'écrire comme $1 / \sqrt{(1 + z^2)}$ Pourquoi? Simplement, je vous rappelle que $1 + \tan^2 x = \cos^2 x$. Donc vous résolvez cela par rapport au cosinus et vous prenez la variante avec le +.

Notes

Summary

12m 33s

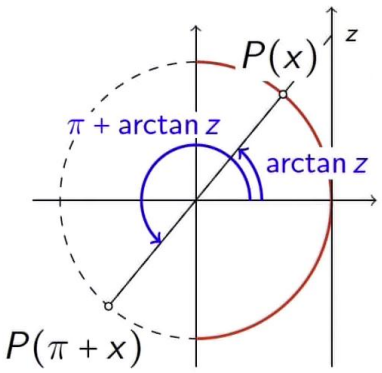
# Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi + x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace $x$ par $\pi + x$,

- la substitution $\tan x = z$ nous donne une équation algébrique en $z$ dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,
- chaque équation simple donne, dans les quadrants I et IV

  $\tan x = z_i \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(z_i) + k\,2\pi$,
- par symétrie, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont

  $x = \arctan(z_i) + k\,\pi, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Je vous rappelle que ici, sur les cadrans *I* et *IV*, le cosinus est positif. Vous pouvez tout à fait faire cette analyse sur le cercle trigonométrique, vous avez ici la tangente. Ici, la valeur *tan z* qui correspond à l'angle *x*. Et nous prenons alors pour le cosinus : le cosinus c'est le côté adjacent *1* divisé par l'hypoténuse donc $\sqrt{(1 + z^2)}$. Quand au sinus, également, vous pouvez le lire c'est le côté opposé, *z* divisé par l'hypoténuse $1 + z^2$. Là, on sait que la substitution ne transforme pas toutes les valeurs de *x*. Donc, il faut encore tester ces valeurs $\pi/2 \bmod k\,\pi$. Est-ce qu'elles sont solutions ou pas? Une fois que l'on a la substitution qui est faite, on obtient donc une équation algébrique qui donne des solutions *Z1*, *Z2*, etc... On cherche les solutions dans les cadrans *I* et *IV*. Donc si j'écris *tan x = Zi* donc ça fait *arctan Zi mod* $2\pi$ mais vu que j'aimerais avoir toutes les solutions, je peux aussi prendre une solution que j'avais et rajouter $\pi$. Cela revient donc à dire que c'est *arctan Zi* + $k\,\pi$. C'est-à-dire que en fait, on prend toutes les solutions de l'équation *tan x = Zi*.

Notes

Summary

13m 44s

## Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi + x$ : procédure

1. On vérifie si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des solutions ou pas ;
2. On pose $z := \tan x$ et on procède aux remplacements :

$$\tan x = z, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}, \quad \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}$$

$$\left(\text{et au besoin } \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\ \sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right);$$

on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.

3. On rajoute aux solutions obtenues sous le premier pas toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\tan x = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc le procédé est le suivant : on teste d'abord les valeurs que l'on ne peut pas transformer *π / 2 + k π*, solutions ou pas. On les retient si ceux sont des solutions, on les rejette si elles ne sont pas. Ensuite, on remplace partout *tan x* par *Z*, le *cos² x* par *1 / (1 + z²)*, c'est *1 / (1 + tan² x)*. Le *sin² x*, je dis simplement que c'est *tan² x. cos² x* Donc c'est *z² / (1 + z²)*. Si besoin, pour le cosinus, je prends la valeur positive 1 / √(1 + z²). Pour le sinus, il faut respecter la transformation avec tangente. Il faut l'exprimer comme *tan x. cos x*, c'est à dire *z / √(1+ z²)*. Si vous préférez, vous reprenez le dessin que j'avais précédemment où on illustre sur le cercle trigonométrique comment retrouver ces formules pour *cos x* et *sin x*. Alors l'équation algébrique donne des solutions *Z1*, *Z2*, etc... et ensuite on résout les équations *tan x = Zi*, là on prend les solutions, de nouveau, dans tous les cadrans et pas seulement dans les cadrans *I* et *IV*.

Notes

Summary

15m 04s

# Les trois tests sont négatifs

Si les trois tests d'invariance précédents

$$x \longleftrightarrow -x, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x,$$

sont négatifs, on pose $z := \tan \frac{x}{2}$, $x \neq \pi \mod 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

On en déduit

- $\tan x = \tan\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\boxed{\tan x = \dfrac{2z}{1-z^2},}$

Remarque : $x \in \mathbf{D}_{\tan} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z \neq \pm 1.$



Finalement, si les trois tests sont négatifs, qu'est-ce qu'on fait ? Si les trois tests sont négatifs, on va prendre cette substitution : *z := tan x/2* Je sais, c'est une substitution qui peut être très surprenante. Comme ça, quand on la voit, j'ai plus de peine à voir pourquoi. Alors regardons ensemble ce que ça a comme avantage de prendre cette subsitution. Petite remarque sur laquelle je reviendrai encore, il n'est pas judicieux de prendre toujours cette substitution, on se disant pourquoi faire les tests, celle-ci marche de toute façon toujours. Il faut vraiment l'utiliser si les trois premiers tests sont négatifs. Les valeurs interdites sont *π mod 2π*, c'est simplement la *tan x/2* n'est pas définie. Alors comment je peux exprimer un sinus et un cosinus avec *tan x/2* ? Dans une première étape, je vais m'intéresser à comment exprimer *tan x*. Vous passez par les angles doubles, *tan x* c'est *tan (2. (x/2))*. Et la formule pour les angles doubles donne *(2. tan (x/2))* / *(1 - tan² (x/2)) Et là, vous avez le *z* sur le *z²*. Petite remarque, il est vrai ici que pour *z = +/- 1*, on diviserait par 0.

Notes

Summary

16m 10s

# Les trois tests sont négatifs

Si les trois tests d'invariance précédents

$$x \longleftrightarrow -x, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x,$$

sont négatifs, on pose $z := \tan \frac{x}{2}$, $x \neq \pi \mod 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

On en déduit

- $$\cos x = \cos\left[2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right] = 2\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{1-\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)},$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},}$$



Mais vous voyez bien que, ici, si j'ai *tan x*, ça signifie que mon *x* est différent de *π/2 + k π*, c'est-à-dire que *x/2* est différente de *π/4 + k π/2* et là je sais très bien que *z* ne peut pas valoir *+/- 1* Donc ici, c'est tout à fait propre, les deux termes sont ou bien les deux définis ou les deux non définis. Pour le cosinus, la même chose, on prend le cosinus du double angle. Pour le cosinus du double angle, on a plusieurs formules à la disposition. On a une formule mixte qui contient le *sin² x* et *cos² x*. Ensuite on a des formules qui contiennent uniquement le *sin² x* ou le *cos² x*. Si je connais tangente, il faut opter pour le passage à travers cosinus parce que *1 + cos² x = tan² x* Ça, c'est ce qui motive le fait que je prends ici la formule avec *2 cos² (x/2) - 1* Parce que ce *cos²*, effectivement, c'est *1 / ( 1 + tan² (x/2))* Et ça, c'est le *z²* et j'ai encore le *-1*, je le mets au même dénominateur, donc je vais avoir *2*; ensuite pour le même dénominateur, *-1 - tan² (x/2)* Il reste *1 - tan² (x/2)* Si vous faites le bilan du tout, alors vous obtenez pour le cosinus *(1 - z²) / (1 + z²)* Ça, c'est une formule qui ne pose pas de problème.

Notes

Summary

17m 27s

# Les trois tests sont négatifs

Si les trois tests d'invariance précédents

$$x \longleftrightarrow -x\,, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x\,, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x\,,$$

sont négatifs, on pose $z := \tan\frac{x}{2}\,, \quad x \neq \pi \mod 2\pi\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$

On en déduit

- $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \dfrac{2z}{1-z^2} \cdot \dfrac{1-z^2}{1+z^2} = \dfrac{2z}{1+z^2}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,$

  Remarque :

  si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $z = \pm 1\,,$ la relation reste valable : $\boxed{\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}\,.}$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Il n'y a pas de possibilité de diviser par zéro. Finalement, pour le sinus, on passe à travers cette relation tangente fois cosinus. Ça, il faut le retenir pour la troisième substitution (on l'avait mentionné ici). Je connais tangente, on vient de le calculer. On connait cosinus donc le produit va nous donner la substitution, le *1 - z²*, ici, va se simplifier, il va donc rester *2z / (1 + z²)* Alors cette formule n'est développée que pour les valeurs de *x* qui sont différentes de *π/2 + k π*. Ça, c'est du au fait que sans ça ce terme tangente n'est pas défini. Mais si vous regardez séparément encore ce qui se passe pour *π/2 + k π* : ça signifie que là *z* vaut *+/-1* et si je calcule ici cette fraction pour *z = +/-1*, je vais obtenir les bonnes valeurs pour le sinus. Ça veut dire que je retiens *+/-1*.

Notes

Summary

18m 55s

# Les trois tests sont négatifs

- la substitution $\tan\frac{x}{2} = z$ n'est pas définie en $x = \pi + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs peuvent être solutions, il faut les tester dans l'équation initiale ;
- cette substitution nous donne une équation polynomiale en $z$ dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$ ;
- on en déduit les solutions de l'équation trigonométrique rationnelle en résolvant chaque équation simple :

$$\begin{aligned} \tan\tfrac{x}{2} = z_i \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{x}{2} = \arctan(z_i) + k\,\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2\arctan(z_i) + k\,2\pi\,, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$



Alors avec ces remarques, comment retrouver le sinus, cosinus et tangente. Le processus est le suivant, on commence par tester si les valeurs qui ne sont pas transformées, c'est-à-dire, $\pi + k\,2\pi$, si elles sont solutions ou pas. Si elles sont solutions, on les retient, dans le cas contraire, on les rejette. Ensuite, on introduit cette substitution. Là, on a développé les formules pour *tan x*, *sin x*, *cos x*. On obtient une équation, cette fois-ci, sûrement polynomiale. Là, il n'y a pas possibilité de racines qui restent trainer. Et on résout ces équations trigonométriques simples. On a donc *tan x/2 = Zi* Ça, ça va donner des *arctan (Zi) + k π* pour x/2 Il faut encore multiplier par deux et on obtient alors un modulo *2π*.

Notes

Summary

19m 53s

# Remarque

Quelle que soit l'équation $R(\sin x, \cos x) = 0$, la substitution $z = \tan \frac{x}{2}$ donne une équation polynomiale, car les expressions de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $z$ sont rationnelles :

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \text{et} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Mais dans ce cas, l'équation polynomiale obtenue est de degré élevé, donc difficile à résoudre.

Il est essentiel de commencer par les trois tests d'invariance pour trouver la bonne substitution et de n'utiliser $z = \tan \frac{x}{2}$ que si les trois tests sont négatifs.



Donc là, je vous rappelle encore une fois que cette fois-ci, on est sûr d'obtenir des expressions polynomiales parce que le sinus et le cosinus sont rationnels. C'est clair, si vous aboutissez encore sur un polynôme divisé par un polynôme égale à zéro, il suffit d'annuler le numérateur. Donc, on va arriver sur une équation polynomiale. Alors le problème, c'est que cette équation polynomiale que vous obtenez dans le cadre de cette quatrième substitution, il peut être d'un degré très élevé, et là, le problème de résoudre cette équation polynomiale peut alors devenir assez aigu. Alors c'est pour cela, il faut vraiment essayer d'abord les autres substitutions. Donc, il faut faire ces trois tests dont on a parlé parce que ces tests, s'ils sont concluants, ils vous donnent des équations beaucoup plus simples, d'ordre beaucoup plus petit et là on arrive à passer plus facilement.

Notes

Summary

20m 38s

# Les trois tests sont négatifs

1. On vérifie si $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des solutions ou pas ;
2. On pose $z := \tan\frac{x}{2}$ et on procède aux remplacements suivants dans l'équation donnée :

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1 + z^2}$$

   on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.
3. On rajoute aux solutions obtenues sous le premier pas toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\tan\frac{x}{2} = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc ici, résumons ce qui se passe si les trois tests avaient été négatifs. On vérifie ces valeurs qui ne sont pas transformées par la substitution *tan x/2* Donc, c'est $\pi + k\,2\pi$. Ensuite, on remplace le cosinus par $(1 - z^2) / (1 + z^2)$, le sinus par $2\,z / (1 + z^2)$. On obtient une équation algébrique qui va se réduire à un polynôme. On détermine les solutions et ensuite on résout toutes les équations simples *tan x/2 = Zi* Et toutes les solutions qu'on obtient ici, je les rajoute aux solutions que j'ai obtenu avant par vérification pour les *x* qui ne sont pas transformés par ma substitution.

Notes

Summary

21m 32s

# Equations trigonométriques

Ce que nous avons vu :
La règle de Bioche pour résoudre les équations trigonométriques rationnelles par substiutions

- $z = \cos x$,
- $z = \sin x$,
- $z = \tan x$ et
- $z = \tan \frac{x}{2}$.

Prochaine étape :

- L'utilisation de ces règles (exemples).

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Voilà, alors qu'est-ce que nous avons vu ? Nous avons vu qu'une règle pour résoudre des équations trigonométriques rationnelles. Nous avons appris à utiliser les substitutions *z = cos x*, *z = sin x*, *z = tan x*. Là, nous avons pour chaque règle nous avons indiqué un test d'invariance. Si ce test fonctionne, il faut utiliser ces substitutions. Si aucun des tests fonctionne, on peut prendre la substitution universelle de la dernière ligne qui certes passe toujours, elle passe même dans les premiers cas, Mais qui a le désavantage de livrer des équations algébriques ou polynomiales d'un ordre élevé, peut-être beaucoup plus difficile à résoudre. Alors la prochaine fois, je vais vous présenter quelques exemples qui mettent en œuvre cette règle de Bioche. Vous allez voir, qu'en fait, la mise en œuvre est beaucoup plus simple qu'on pourrait le croire en suivant cette présentation. Je vous remercie et à la prochaine.

Notes

Summary

22m 10s