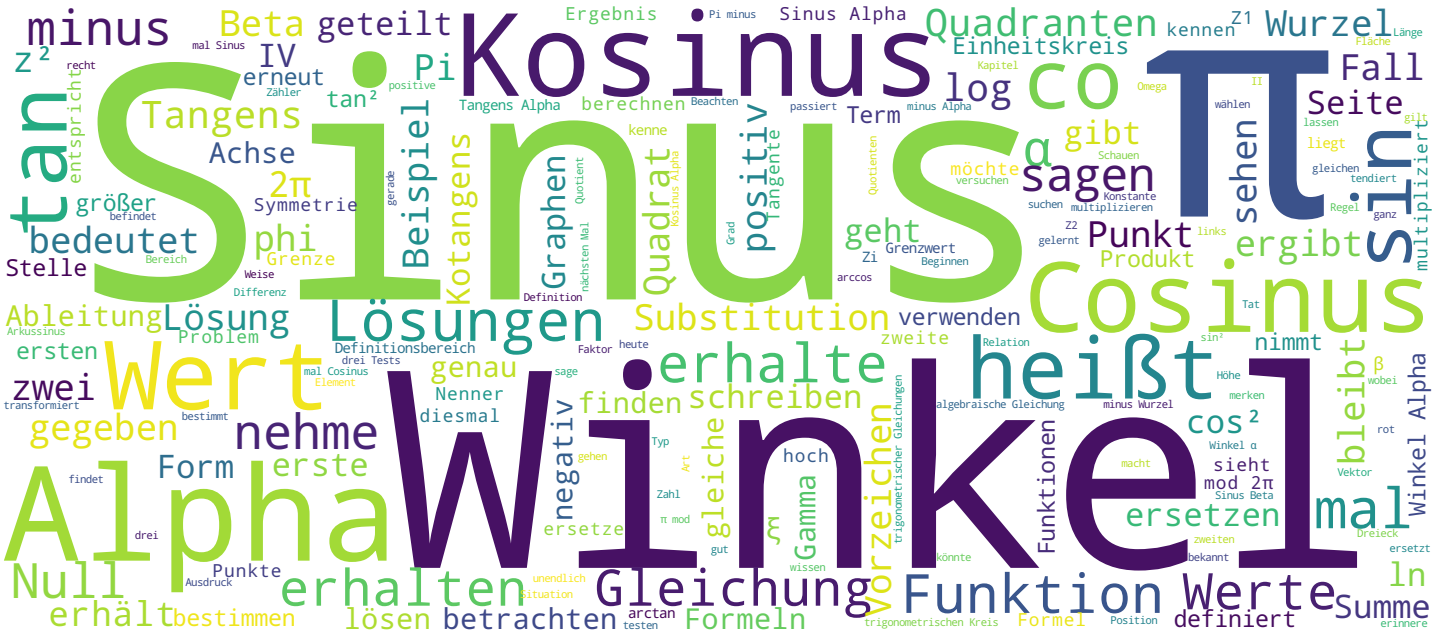
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Equations trigonométriques

6.2 Règle de Bioche : théorie

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Video

EPFL

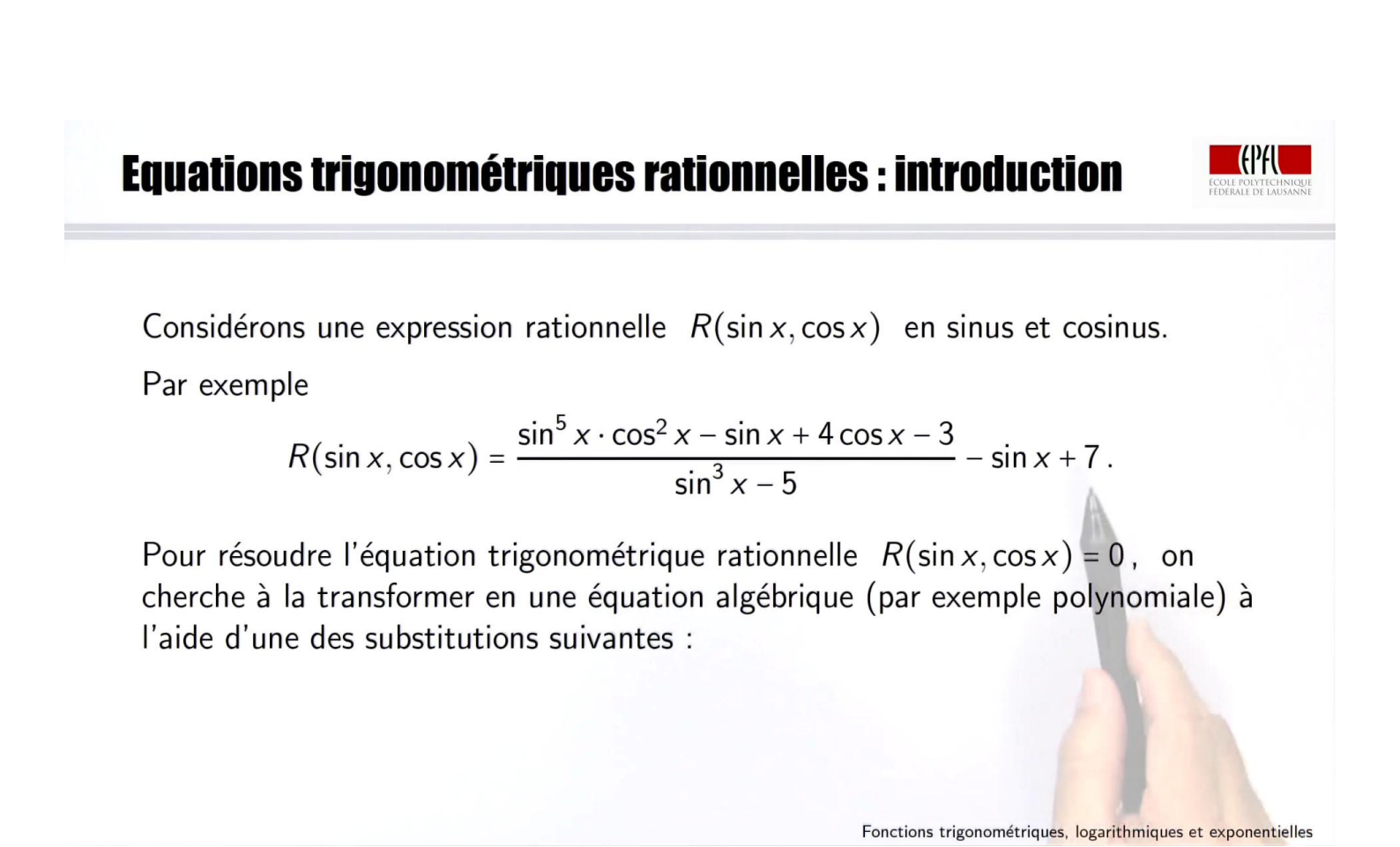
Equations trigonométriques rationnelles : introduction

Considérons une expression rationnelle $R(\sin x, \cos x)$ en sinus et cosinus.

Par exemple

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^5 x \cdot \cos^2 x - \sin x + 4\cos x - 3}{\sin^3 x - 5} - \sin x + 7\,.$$

Pour résoudre l'équation trigonométrique rationnelle $R(\sin x, \cos x) = 0$, on cherche à la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une des substitutions suivantes :



Guten Tag. Das letzte Mal haben wir eine ganze Reihe trigonometrischer Gleichungen Revue passieren lassen, die wir jetzt auflösen können. Heute stelle ich Ihnen einen anderen Typ trigonometrischer Gleichungen vor. Es sind rationale trigonometrische Gleichungen, die man mit Hilfe der Bioche-Regeln lösen kann. Regeln, die ich Ihnen heute vorstelle. Nächstes Mal werde ich sie an einigen Beispielen anwenden. Was ist eine rationale trigonometrische Gleichung? Als rationale Gleichung bezichnet man unter Kürzung mit *R(sin x, cos x)* einen rationalen Ausdruck mit Sinus und Cosinus. Das heißt, Sie finden hier einen Ausdruck dieses Typs. Sie haben also Sinus und Cosinus. Sie haben auch Sinus und Cosinus mit den Potenzen 2, 3, 7, 8. Sie haben ferner Produkte des Sinus, des Cosinus, Potenzen des Sinus und Potenzen des Cosinus. Sie haben Brüche und Summen. So. Das hier ist ein rationaler Ausdruck in Sinus und Cosinus. Zur Lösung rationaler trigonometrischer Gleichungen, also *R(sin x, cos x) = 0*, betrachten wir dies hier immer als gleich 0. Sie verbergen dieses + *7*, das auf der anderen Seite gleich - *7* sein könnte Man wendet alles auf dasselbe Glied gleich null an.

Notes

Summary

0m 04s

Equations trigonométriques rationnelles : introduction

Considérons une expression rationnelle $R(\sin x, \cos x)$ en sinus et cosinus.

Par exemple

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^5 x \cdot \cos^2 x - \sin x + 4\cos x - 3}{\sin^3 x - 5} - \sin x + 7\,.$$

Pour résoudre l'équation trigonométrique rationnelle $R(\sin x, \cos x) = 0$, on cherche à la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une des substitutions suivantes :

1. $z := \cos x$,
2. $z := \sin x$,
3. $z := \tan x$ ou
4. $z := \tan \frac{x}{2}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir versuchen, diese trigonometrische Gleichung in eine algebraische Gleichung zu transformieren. Am besten sollte sie polynomisch sein. Und dazu verwenden wir verschiedene Arten von Substitutionen. Wir verwenden die Substitution *z := cos x*, *z := sin x*, dritte Möglichkeit, *z := tan x* und vierte Möglichkeit *z := tan x/2*. Man muss es also jedes Mal klären, welche Substitution man verwenden kann. Dies sind Regeln bzw. die Regel von Bioche, die uns helfen wird.

Notes

Summary

1m 39s

Règle de Bioche

Proposition

Soit $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :

- *si l'équation est invariante lorsqu'on remplace* x *par* $-x$ *:*

$$\underbrace{R\big[\sin(-x), \cos(-x)\big]}_{=R[-\sin x, \cos x]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{D}_{def}),$$

on pose $z := \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in [-1, 1]$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir formulieren sie als Satz. Wenn man also eine rationale trigonometrische Gleichung lösen will, transformiert man sie in eine algebraische Gleichung. Man kann also folgendermaßen vorgehen: Wir unterscheiden die vier Substitutionen, also vier Fälle. Und für jeden Fall zeigen wir, wann eine Substitution dieses Typs angebracht ist. Zum ersten Fall, der Substitution *z := cos x*. Wir machen Folgendes mit der rationalen Gleichung: Wir ersetzen *x* durch *-x*. Wir betrachten also die Gleichung *R [sin (-x), cos (-x)]*. Wir ersetzen in dieser Gleichung überall *x* durch *-x*. Und wir testen, ob diese Gleichung gegenüber der Ausgangsgleichung invariant bleibt. Das heißt, ob wir genau die gleiche Form der Gleichung erhalten. Beachten Sie, dass *cos (-x)* nichts Anderes als *cos x* ist, und dass *sin (-x)* nichts Anderes als *- sin x* ist. Wenn Sie wollen, ersetzen Sie einfach *sin x* durch *- sin x* und lassen *cos x*. Wenn die Gleichung Ihre Form nicht ändert, sind wir im richtigen Fall. Sie sehen hier typischerweise die Situation, dass der Sinus nur zum Beispiel mit einer Potenz 2 oder 4 auftaucht.

Notes

Summary

2m 17s

Règle de Bioche

Proposition

Soit $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :

- *si l'équation est invariante lorsqu'on remplace* x *par* $\pi - x$ *:*

$$\underbrace{R\big[\sin(\pi - x), \cos(\pi - x)\big]}_{= R[\sin x, -\cos x]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{D}_{def}),$$

on pose $z := \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in [-1, 1]$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenn man in diesem Fall *sin x* durch - *sin x* ersetzt, bewegen Sinus Quadrat und Sinus hoch vier sich nicht, sie bleiben gleich. Dies ist die typische Situation, nach der wir suchen. Wenn wir sie haben, nehmen wir *z := cos x*, wobei wir nur an den Z-Werten zwischen - *1* und *1* interessiert sind. Zweite Möglichkeit, also wenn die erste nicht zufriedenstellend ist: Wir ersetzen *x* durch *π - x* Wir gehen also wie eben vor. Für jedes *x* setzen wir *π - x* ein. Und die Gleichung muss invariant bleiben, das heißt, sie muss exakt dieselbe Form haben wie die Ausgangsgleichung. Zum Beispiel kann man nach der Ersetzung von *x* durch *π - x* diesen Ausdruck zum Beispiel mit *-1* oder so multiplizieren. Man kann Sie algebraisch manipulieren, muss aber am Ende dieselbe Form der Gleichung haben. Beachten Sie, dass dies bedeutet, dass der Sinus derselbe bleibt. Das heißt *sin (π - x)* ist *sin x*. Der Cosinus dagegen wechselt das Vorzeichen, das heißt, wenn Sie es anders testen möchten, ersetzen Sie einfach *cos* durch - *cos* und lassen *sin* gleich.

Notes

Summary

3m 39s

Règle de Bioche

Proposition

Soit $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :

- *si l'équation est invariante lorsqu'on remplace* x *par* $\pi + x$ *:*

$$\underbrace{R\big[\sin(\pi+x), \cos(\pi+x)\big]}_{=R[-\sin x, -\cos x]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{D}_{def}),$$

on pose $z := \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wiederum eine typische Situation ist, dass der Cosinus nur in einer geradzahligen Potenz erscheint, nämlich zwei oder vier. Dort ist man genau in dieser Situation. Und in diesem Fall hier wählt man *z := sin x*. Beachten Sie: Wenn der Cosinus nur zum Beispiel in Form einer Zweierpotenz erschiene, könnte man ohne Weiteres diesen Cosinus mit Hilfe von *z* ausdrücken. Dritte Möglichkeit, wenn die beiden ersten nicht zufriedenstellend waren: Man ersetzt *x* durch *π +x*. Diesmal bedeutet dies, wenn Sie hierher blicken, dass der *sin* zu - *sin* und der *cos* auch zu - *cos* wird. Typischerweise geschieht dies etwa dann, wenn der Sinus und der Cosinus nur als Produkt Sinus mal Cosinus auftreten. Wenn Sie also den *sin* durch - *sin* und den *cos* durch - *cos* ersetzen, ändert das Produkt nicht seine Form. Das ist die typische Situation. Statt eines Produkts kann man auch einen Quotienten haben, das heißt dasss der Sinus und der Cosinus nur als *sin / cos* auftreten das heißt genau in Form der Tangente. Daher wählen wir die Substitution *z := tan x*. Beachten Sie, dass diese Substitution einen Nachteil hat. Sie transformiert einige *x* in *z*, aber nicht alle. Wenn *x* gleich *π / 2 modulo π*, dann ist *tan x* nicht definiert. Wir müssen diese Werte von *x* separat behandeln.

Notes

Summary

4m 53s

Règle de Bioche

Proposition

Soit $R(\sin x, \cos x) = 0$, *une équation rationnelle en sinus et cosinus.*

On peut la transformer en une équation algébrique (par exemple polynomiale) à l'aide d'une substitution que l'on choisit de la façon suivante :

- *si les trois tests d'invariance précédents*

$$x \longleftrightarrow -x, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x,$$

sont négatifs, on pose $z := \tan \frac{x}{2}$, $x \neq \pi \mod 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenn schließlich keiner der drei Tests, die wir eben kennengelernt haben, funktioniert, wenn sie alle drei negativ sind, weichen wir auf *z := tan x / 2* aus. Hier können wiederum die Werte von *x*, die gleich *π modulo 2π* sind, nicht transformiert werden und müssen separat behandelt werden.

Notes

Summary

6m 20s

Remarques

- Nous venons de voir que si l'équation est invariante lorsqu'on remplace x par $\pi + x$, on pose

$$z := \tan x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} \mod \pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Mais les valeurs $x = \frac{\pi}{2} \mod \pi$, qui sont inaccessibles par le changement de variable, sont peut-être solutions ; il faut donc les tester dans l'équation initiale.

- De même, si les trois tests d'invariance sont négatifs, on pose

$$z := \tan \frac{x}{2}, \quad x \neq \pi \mod 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Les valeurs $x = \pi \mod 2\pi$ sont interdites par le changement de variable, mais elles sont peut-être solutions ; il faut les tester dans l'équation initiale.

Sagen wir gleich, was dies für *tan x* und *tan x / 2* bedeutet. Wenn ich also diese Substitution *z := tan x* verwende – das war der dritte Fall –, brauche ich nur seinen Wert *π / 2 mod π* zu testen. Man testet durch Einsetzen in die Gleichung. Man muss testen, ob sie eine Lösung sind oder nicht. Dasselbe gilt für die Substitution *tan x/2*, die *x*, die in *tan* unzulässig sind, sind *π mod 2π*, man muss sie in die Ausgangsgleichung einsetzen und prüfen, ob sie die Gleichung erfüllen oder nicht. Sehen wir uns näher an, wie diese Substitution funktioniert, die durch die Regel von Bioche empfohlen wird.

Notes

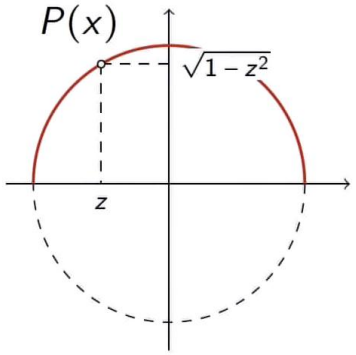
Summary

6m 41s

Test d'invariance $x \longleftrightarrow -x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace x par $-x$,

- la substitution $\cos x = z$ transforme l'équation trigonométrique en une équation algébrique en z dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,



Beginnen wir mit dem ersten Fall, also dem Fall, wo ich *x* durch - *x* ersetze und die Gleichung invariant bleibt. Bleibt die Gleichung invariant, so bedeutet dies, dass, falls ein bestimmter fixer Wert *x* eine Lösung ist, - *x* ebenfalls eine Lösung dieser Gleichung ist. Daher kann ich folgendermaßen vorgehen: Wir suchen ausschließlich Lösungen in den Quadranten *I* und *II*. In diesem Quadranten variiert der Cosinus zwischen *-1* und *1*. Der Sinus dagegen bleibt positiv. Habe ich dann alle Lösungen in den Quadranten *I* und *II*, so erhalte ich durch Symmetrie, d.h. indem ich *x* durch *-x* ersetze, die anderen Lösungen und damit alle Lösungen. Das heißt also, ich ersetze Cosinus durch *z Quadrat*, das ist die Substitution. Aber den Sinus kann ich durch √ *(1 - x)* mit dem Vorzeichen + davor ersetzen, da in den Quadranten *I* und *II* der Sinus größer gleich null ist. Wenn man diese Substitutionen vornimmt, erhält man einen algebraischen Ausdruck, den man lösen kann oder nicht. Dies ist ein generischeres Problem. Wenn man aber alle Lösungen dieser algebraischen Gleichung hat, sagen wir *Z1*, *Z2* usw.

Notes

Summary

7m 22s

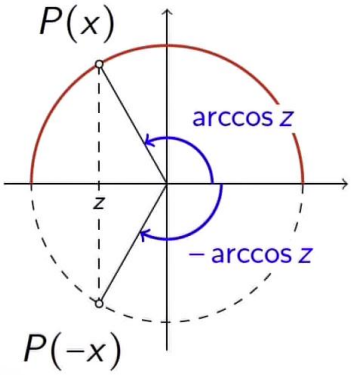
Test d'invariance $x \longleftrightarrow -x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace x par $-x$,

- la substitution $\cos x = z$ transforme l'équation trigonométrique en une équation algébrique en z dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,
- chaque équation simple donne, dans les quadrants I et II

  $\cos x = z_i \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos(z_i) + k\,2\pi$,
- par symétrie, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont

  $x = \pm \arccos(z_i) + k\,2\pi, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}$.



bis *Zn*, wenn man die hat, kann man kann man wiederum die entspechenden Werte *x* daraus ableiten. Wir werden also sagen, der *cos x* ist *Z1*, *Z2*, *Z3* etc., allgemein gesprochen also *Zi*. Und da erhält man *arcos (z)*. *arccos(z)* ist also in den Quadranten *I* et *II* und man nimmt + *k 2 π*, um in den Quadranten *I* et *II* zu bleiben. Denken Sie daran, dass uns durch Symmetrie stets *x* und *-x* möglich ist, das heißt, in diesem Fall nimmt man *+/- arccos(z) mod 2π*.

Notes

Summary

8m 39s

Test d'invariance $x \longleftrightarrow -x$: procédure

1. On pose $z := \cos x$ et on procède aux remplacements suivants dans l'équation donnée :

$$\cos x = z, \quad \sin^2 x = 1 - z^2 \quad \text{(et au besoin } \sin x = \sqrt{1 - z^2}\text{)};$$

on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.

2. On collecte dans l'ensemble solutions toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\cos x = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenn wir also eine Bilanz des Verfahrens ziehen, muss man sich zur Substitution in diesem Fall Folgendes merken. Man ersetzt *cos x* durch *z*, *sin²* durch *1 - z²*, das ist klar. Meist behilft man sich mit diesen beiden, da der Sinus Gefahr läuft, unter geradzahligen Potenzen zu erscheinen. Falls dies nicht der Fall ist, liegt es meist daran, dass diese trigonometrischen Gleichungen diese Symmetrien gut verbergen können, und ich werde Ihnen dies nächstes Mal an einigen Beispielen demonstrieren. Braucht man also einen *sin x* oder einen Kubiksinus, ersetzt man dies einfach durch √ *(1 - z²)* mit dem Vorzeichen +. Wir suchen nach Lösungen von *Z1* bis *Zn*. Und danach nehmen wir alle Lösungen von *cos x = Zi*. Indem wir alle diese Lösungen nehmen, das heißt *+/- arccos mod 2π*, korrigieren wir diese Hypothese über den Sinus, das haben wir gezeigt.

Notes

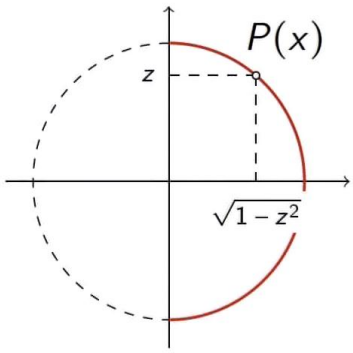
Summary

9m 16s

Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi - x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace x par $\pi - x$,

- la substitution $\sin x = z$ nous donne une équation algébrique en z dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,



Dieses Verfahren kann man auch auf die anderen Fälle anwenden. D.h. dann, wenn man im zweiten Fall ist oder Invarianz hat, wenn man *x* durch *π - x* ersetzt. In diesem Fall kann man so argumentieren: Diesmal bedeutet es, dass wenn *x* eine Lösung der Gleichung ist, *π - x* bei invarianter Gleichung ebenfalls eine Lösung ist. Dieses Mal konzentriere ich mich auf die Quadranten *I* und*IV*. In diesen Quadranten liegt der Sinus zwischen *-1* und *1*. Der Cosinus wiederum bleibt positiv. Sobald ich alle Lösungen für die Quadranten *I* und *IV* habe, erhalte ich die anderen Lösungen in den anderen Quadranten einfach durch Symmetrie. Wir müssen nur alle *x* durch *π - x* ersetzen. Wir wissen: Wenn *x* eine Lösung ist, ist *π - x* es auch. Wir können daher so fortfahren: Wir ersetzen *sin x* durch *z*, *cos x* durch *1-z²*, d.h. *1-sin² x*, unter der Wurzel ist *cos² x*, wir ziehen die Wurzel und nehmen das Vorzeichen +, weil wir in den Quadranten *I* und *IV* sind. Dies setzen wir in die Gleichung ein und erhalten eine algebraische Gleichung. Wir lösen sie und finden Lösungen *Z1* bis *Zn*.

Notes

Summary

10m 12s

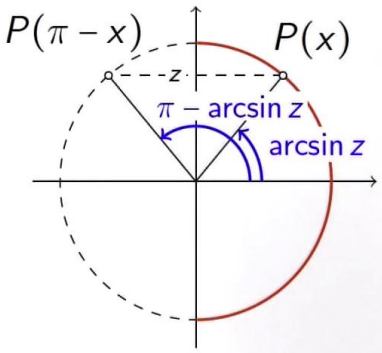
Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi - x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace x par $\pi - x$,

- la substitution $\sin x = z$ nous donne une équation algébrique en z dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,
- chaque équation simple donne, dans les quadrants I et IV

  $\sin x = z_i \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin(z_i) + k\,2\pi$,
- par symétrie, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont

$$\begin{cases} x = \arcsin(z_i) + k\,2\pi, & \text{ou} \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin(z_i) + k\,2\pi & i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$



Und wir suchen nach entsprechenden *Z* in den Quadranten *I* und *IV*. Das ist also *arcsin*, wenn ich *sin x = Zi* nehme, Das gibt mir für *x = arcsin (Zi) mod 2π*, hier die Zeichnung. und sobald ich alle *x* habe, nutze ich wieder die Symmetrie, das heißt ich nehme die Lösungen vom Typ *π - x*, und erhalte daher wieder *π - arcsin(Zi) mod 2π*. Jetzt nehme ich alle Lösungen von *sin x = Zi*, ich vergesse, dass ich ausschließlich in den Quadranten *I* und *IV* bin.

Notes

Summary

11m 32s

Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi - x$: procédure

1. On pose $z := \sin x$ et on procède aux remplacements suivants dans l'équation donnée :

$$\sin x = z, \quad \cos^2 x = 1 - z^2 \quad \text{(et au besoin } \cos x = \sqrt{1 - z^2}\text{)};$$

on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.

2. On collecte dans l'ensemble solutions toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\sin x = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Das Verfahren ist also sehr einfach. Ich ersetze in diesem Fall *sin x* durch *z* und *cos² x* durch1 - z². Und bei Bedarf *cos x* durch √(1 - z²), mit dem Vorzeichen +. Man erhält eine algebraische Gleichung, löst sie auf, erhält Lösungen *Z1*, *Z2* etc. Und nach der Lösung jeder einfachen Gleichung *sin x = Zi* nimmt man alle Lösungen in allen Quadranten. Und das ist die Gesamtheit der Lösungen.

Notes

Summary

12m 03s

Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi + x$

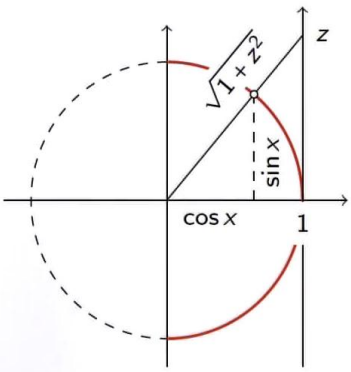
Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace x par $\pi + x$,

- on pose $z := \tan x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi,$

  et on en déduit

$$\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}};$$



Dritter Fall, und hier haben wir den Fall, dass die Gleichung invariant bleibt, wenn ich *x* durch *π + x* ersetze. Die Argumentation ist ganz ähnlich, das heißt wenn *x* eine Lösung ist, ist *x + π* es auch. Diesmal also suche erneut ich Lösungen in den Quadranten *I* und *IV*, denn ich nehme die Substitution *tan x* und wähle immer die Quadranten, die dem *arc* der Substitution entsprechen. Hier ist der *arctan* nämlich die Quadranten *I* und *IV*. Über diesen Quadranten weiß ich auf jeden Fall, dass der Cosinus stets positiv ist. Nein, der Sinus kann positiv oder negativ sein. Sobald ich also alle Lösungen in den Quadranten *I* und *IV* habe, erhalte ich alle Lösungen für den gesamten trigonometrischen Kreis, indem ich für jede Lösung *x* auch die Lösung *π + x* nehme. Das heißt, überall, wo ich *tan x* habe, habe ich *z* genommen. Was mache ich dann mit dem Sinus und dem Cosinus. Den Cosinus kann man schreiben als *1 / √(1 + z²)*. Warum? Denken Sie einfach daran, dass *1 + tan² x = cos² x*. Lösen Sie dies nach dem Cosinus auf und nehmen Sie die Variante mit +.

Notes

Summary

12m 33s

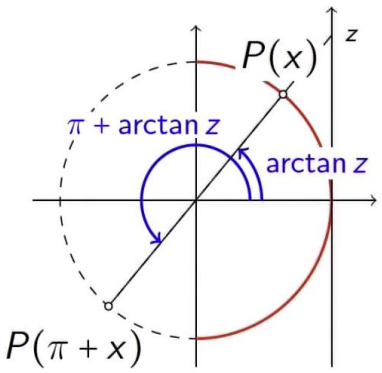
Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi + x$

Si l'équation est invariante lorsqu'on remplace x par $\pi + x$,

- la substitution $\tan x = z$ nous donne une équation algébrique en z dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$,
- chaque équation simple donne, dans les quadrants I et IV

  $\tan x = z_i \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(z_i) + k\,2\pi$,
- par symétrie, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont

  $x = \arctan(z_i) + k\,\pi, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}$.



Denken Sie daran: In den Quadranten *I* und *IV* ist der Cosinus positiv. Sie können diese Analyse durchaus am trigonometrischen Kreis vornehmen, Sie haben hier die Tangente. Hier der Wert *tan z*, der dem Winkel *x* entspricht. Und wir nehmen nun für den Cosinus: Der Cosinus ist die angrenzende Seite *1* geteilt durch die Hypotenus, d.h. $\sqrt{(1 + z^2)}$. Auch den Sinus können Sie so lesen: Er ist die entgegengesetzte Seite *z* geteilt durch die Hypotenus, $1 + z^2$. Hier sagt man, dass die Substitution nicht alle Werte von *x* transformiert. Wir müssen diese Werte $\pi/2 \bmod k\,\pi$ also noch testen. Sind sie Lösungen oder nicht? Sobald die Substitution durchgeführt ist, erhält man eine algebraische Gleichung, die die Lösungen *Z1*, *Z2* etc. zurückgibt. Wir suchen die Lösungen in den Quadranten *I* und *IV*. Wenn ich also *tan x = Zi* schreibe, ergibt das *arctan Zi mod* 2π, aber da ich alle Lösungen haben möchte, kann ich auch eine Lösung nehmen, die ich schon habe, und π hinzufügen. Damit sage ich, dass es *arctan Zi* + $k\,\pi$ ist. Das heißt, man nimmt in der Tat alle Lösungen der Gleichung *tan x = Zi*.

Notes

Summary

13m 44s

Test d'invariance $x \longleftrightarrow \pi + x$: procédure

1. On vérifie si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des solutions ou pas ;
2. On pose $z := \tan x$ et on procède aux remplacements :

$$\tan x = z, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}, \quad \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}$$

$$\left(\text{et au besoin } \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\ \sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right);$$

   on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.
3. On rajoute aux solutions obtenues sous le premier pas toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\tan x = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Das Vorgehen ist also folgendermaßen: Man testet zuerst die Werte, die man nicht transformieren kann *π / 2 + k π*: Lösungen oder nicht? Man behält sie, wenn sie Lösungen sind, sonst verwirft man sie. Dann ersetzt man überall*tan x* durch*Z*, *cos² x* durch *1 / (1 + z²)*, das ist *1 / (1 + tan² x)*. Zu *sin² x* sage ich einfach *tan² x. cos² x*. Das ist also *z² / (1 + z²)*. Falls nötig, nehme ich für den Cosinus den positiven Wert 1 / √(1 + z²). Beim Sinus muss man die Transformation mit Tangens bewahren. Man muss es als *tan x. cos x*, das heißt *z / √(1+ z²)* ausdrücken. Nehmen Sie ruhig die Zeichnung von vorhin, wo wir am trigonometrischen Kreis gezeigt haben, wie man die Formeln für *cos x* und *sin x* findet. Diese algebraische Gleichung liefert uns also Lösungen *Z1*, *Z2* usw., dann löst man die Gleichungen *tan x = Zi*, dort nimmt man wieder die Lösungen in allen Quadranten, nicht nur in den Quadranten *I* und *IV*.

Notes

Summary

15m 04s

Les trois tests sont négatifs

Si les trois tests d'invariance précédents

$$x \longleftrightarrow -x, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x,$$

sont négatifs, on pose $z := \tan \frac{x}{2}$, $x \neq \pi \mod 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

On en déduit

- $\tan x = \tan\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\boxed{\tan x = \dfrac{2z}{1-z^2},}$

Remarque : $x \in \mathbf{D}_{\tan} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \neq \pm 1$.

Wenn schließlich alle drei Tests negativ sind, was macht man dann? Wenn die drei Tests negativ sind, verwenden wir folgende Substitution: *z := tan x/2*. Ich weiß, diese Substitution kann sehr überraschend sein. Wenn man sie so sieht, ist es schwierig zu sagen warum. Sehen wir uns also gemeinsam näher an, welchen Vorteil diese Substitution hat. Eine kleine Bemerkung, auf die ich noch zurückkommen werde: Es ist nicht ratsam, immer diese Substitution zu verwenden, nach dem Motto: wozu die Tests, die hier funktioniert auf jeden Fall. Man sollte sie wirklich nur verwenden, wenn die ersten drei Tests negativ sind. Die verbotenen Werte sind *π mod 2π*, einfach weil der *tan x/2* nicht definiert ist. Wie also kann ich einen Sinus und einen Cosinus mit *tan x/2* ausdrücken? Im ersten Schritt frage ich, wie man *tan x* ausdrückt. Man geht über Doppelwinkel: *tan x* ist *tan (2. (x/2))*. Und die Formel für Doppelwinkel ergibt *(2. tan (x/2))* / *(1 - tan² (x/2)). Und hier haben wir das *z* über dem *z²*. Kleine Bemerkung: Es stimmt, dass Sie hier für *z = +/- 1* durch 0 teilen würden.

Notes

Summary

16m 10s

Les trois tests sont négatifs

Si les trois tests d'invariance précédents

$$x \longleftrightarrow -x\,, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x\,, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x\,,$$

sont négatifs, on pose $\quad z := \tan\frac{x}{2}\,, \quad x \neq \pi \mod 2\pi\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$

On en déduit

- $$\cos x = \cos\left[2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right] = 2\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,,$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,,}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Sie sehen hier aber: Wenn ich *tan x* heißt das, dass mein *x* ungleich *π/2 + k π* ist, das heißt *x/2* ist ungleich *π/4 + k π/2*, und jetzt weiß ich, dass *z* nicht gleich *+/- 1* sein kann Hier ist daher alles ganz sauber, die beiden Terme sind entweder definiert oder nicht. Für den Cosinus gilt dasselbe: Man nimmt den Cosinus des Doppelwinkels. Für den Cosinus des Doppelwinkels stehen mehrere Formeln zur Verfügung. Eine gemischte Formel, die den *sin² x* und *cos² x* enthält. Dann Formeln, die ausschließlich den *sin² x* oder den *cos² x* enthalten. Wenn ich die Tangente kenne, muss ich den Weg über den Cosinus wählen, weil *1 + cos² x = tan² x*. Das ist der Grund, warum ich hier die Formel mit *2 cos² (x/2) - 1* wähle. Weil der *cos²* effektiv *1 / (1 + tan² (x/2))* ist. und das ist das *z²*, ich habe noch *-1*, bringe es auf einen Nenner, so erhalte ich *2*; dann für denselben Nenner *-1 - tan² (x/2)*. Es bleibt *1 - tan² (x/2)*. Wenn Sie nun Bilanz ziehen, erhalten Sie für den Cosinus *(1 - z²) / (1 + z²)*. Das ist eine unproblematische Formel.

Notes

Summary

17m 27s

Les trois tests sont négatifs

Si les trois tests d'invariance précédents

$$x \longleftrightarrow -x, \qquad x \longleftrightarrow \pi - x, \qquad x \longleftrightarrow \pi + x,$$

sont négatifs, on pose $z := \tan \frac{x}{2}$, $x \neq \pi \mod 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

On en déduit

- $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \dfrac{2z}{1-z^2} \cdot \dfrac{1-z^2}{1+z^2} = \dfrac{2z}{1+z^2}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

  Remarque :

  si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $z = \pm 1$, la relation reste valable : $\boxed{\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}.}$

Man läuft nicht Gefahr, durch null zu dividieren. Für den Sinus schließlich geht man über diese Beziehung Tangens mal Cosinus. Das muss man sich für die dritte Substitution merken (wir hatten sie hier erwähnt). Ich kenne den Tangens, wir haben ihn soeben berechnet. Wir kennen den Cosinus, daher wird uns das Produkt seine Substitution liefern, das *1 - z²* hier wird vereinfacht, und es bleibt *2z / (1 + z²)*. Diese Formel gilt also nur für Werte von *x*, die ungleich *π/2 + k π* sind. Und zwar deshalb, weil sonst dieser Tangententerm undefiniert wäre. Wenn Sie aber separat betrachten, was für *π/2 + k π* geschieht: Das bedeutet, dass *z* gleich *+/-1* ist, und wenn ich diesen Bruch für *z = +/-1* berechne, erhalte ich die richtigen Sinus-Werte. Das heißt, ich behalte *+/-1*.

Notes

Summary

18m 55s

Les trois tests sont négatifs

- la substitution $\tan\frac{x}{2} = z$ n'est pas définie en $x = \pi + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs peuvent être solutions, il faut les tester dans l'équation initiale ;
- cette substitution nous donne une équation polynomiale en z dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_n$;
- on en déduit les solutions de l'équation trigonométrique rationnelle en résolvant chaque équation simple :

$$\begin{aligned} \tan\tfrac{x}{2} = z_i \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{x}{2} = \arctan(z_i) + k\,\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2\arctan(z_i) + k\,2\pi\,, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Wie findet man nun auf der Basis dieser Bemerkungen Sinus, Cosinus und Tangens. Man geht so vor: Man testet zunächst, ob die nicht transformierten Werte, also $\pi + k\,2\pi$, Lösungen sind oder nicht. Sind es Lösungen, behält man sie, sonst verwirft man sie. Dann setzt man diese Substitution ein. Hier haben wir Formeln für *tan x*, *sin x*, *cos x* entwickelt. Man erhält eine Gleichung, diesmal eine polynomische. Hier kann man keine Wurzeln ziehen. Und man löst diese einfachen trigonometrischen Gleichungen. Man hat also *tan x/2 = Zi*. Und das ergibt die *arctan (Zi)* + $k\,\pi$ für x/2. Wir müssen nun noch mit 2 multiplizieren und erhalten ein modulo 2π.

Notes

Summary

19m 53s

Remarque

Quelle que soit l'équation $R(\sin x, \cos x) = 0$, la substitution $z = \tan \frac{x}{2}$ donne une équation polynomiale, car les expressions de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de z sont rationnelles :

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \text{et} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Mais dans ce cas, l'équation polynomiale obtenue est de degré élevé, donc difficile à résoudre.

Il est essentiel de commencer par les trois tests d'invariance pour trouver la bonne substitution et de n'utiliser $z = \tan \frac{x}{2}$ que si les trois tests sont négatifs.

Denken Sie daran: Diesmal erhalten wir mit Sicherheit polynomische Ausdrücke, weil Sinus und Cosinus rational sind. Es ist klar, wenn Sie auf ein Polynom stoßen, das durch ein anderes Polynom gleich null geteilt wird, müssen Sie nur den Zähler auf Null setzen. Wir kommen also zu einer polynomischen Gleichung. Das Problem ist, dass diese polynomische Gleichung, die Sie bei dieser vierten Substitution erhalten, einen sehr hohen Grad aufweisen kann, daher kann es äußerst knifflig sein, diese polynomische Gleichung zu lösen. Daher muss man wirklich zuerst die anderen Substitutionen probieren. Man muss also diese drei erwähnten Tests machen, weil diese, wenn sie zum Ziel führen, Ihnen wesentlich einfachere Gleichungen liefern, mit niedrigerer Ordnung, und dann hat man es viel leichter.

Notes

Summary

20m 38s

Les trois tests sont négatifs

1. On vérifie si $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des solutions ou pas ;
2. On pose $z := \tan\frac{x}{2}$ et on procède aux remplacements suivants dans l'équation donnée :

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

   on obtient ainsi une équation algébrique dont on détermine les solutions $z_1, \ldots z_n$.
3. On rajoute aux solutions obtenues sous le premier pas toutes les solutions de chacune des équations simples

$$\tan\frac{x}{2} = z_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Fassen wir nun zusammen, was geschieht, wenn die drei Tests negativ waren. Wir prüfen diese Werte, die nicht durch die Substitution *tan x/2* transformiert werden. Das heißt $\pi + k\ 2\pi$. Dann ersetzen wir den Cosinus durch $(1 - z^2) / (1 + z^2)$, den Sinus durch $2\ z / (1 + z^2)$. Wir erhalten eine algebraische Gleichung, die sich auf ein Polynom reduziert. Wir bestimmen die Lösungen, und dann lösen wir all die einfachen Gleichungen *tan x/2 = Zi*. Und alle Lösungen, die man hier erhält, füge ich den Lösungen hinzu, die ich zuvor durch Überprüfung für die *x* erhalten habe, die nicht durch meine Substitution transformiert wurden.

Notes

Summary

21m 32s

Equations trigonométriques

Ce que nous avons vu :
La règle de Bioche pour résoudre les équations trigonométriques rationnelles par substiutions

- $z = \cos x$,
- $z = \sin x$,
- $z = \tan x$ et
- $z = \tan \frac{x}{2}$.

Prochaine étape :

- L'utilisation de ces règles (exemples).

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Was haben wir nun gesehen? Wir haben eine Regel für die Auflösung rationaler trigonometrischer Gleichungen kennengelernt. Wir haben gelernt, die Substitutionen *z = cos x*, *z = sin x*, *z = tan x* anzuwenden. Für jede Regel haben wir einen Invarianztest angegeben. Funktioniert der Test, sind diese Substitutionen zu verwenden. Funktioniert keiner von ihnen, kann man die universelle Substitution der letzten Regel anwenden, die immer passt, auch in den ersten Fällen. Dort hat sie aber den Nachteil, algebraische oder polynomische Gleichungen höherer Ordnung zu liefern, die schwer zu lösen sind. Beim nächsten Mal werde ich Ihnen einige Beispiele vorstellen, bei denen diese Regel von Bioche angewendet wird. Sie werden sehen. dass die Umsetzung viel einfacher ist, als man nach dieser Präsentation meinen möchte. Vielen Dank und bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

22m 10s