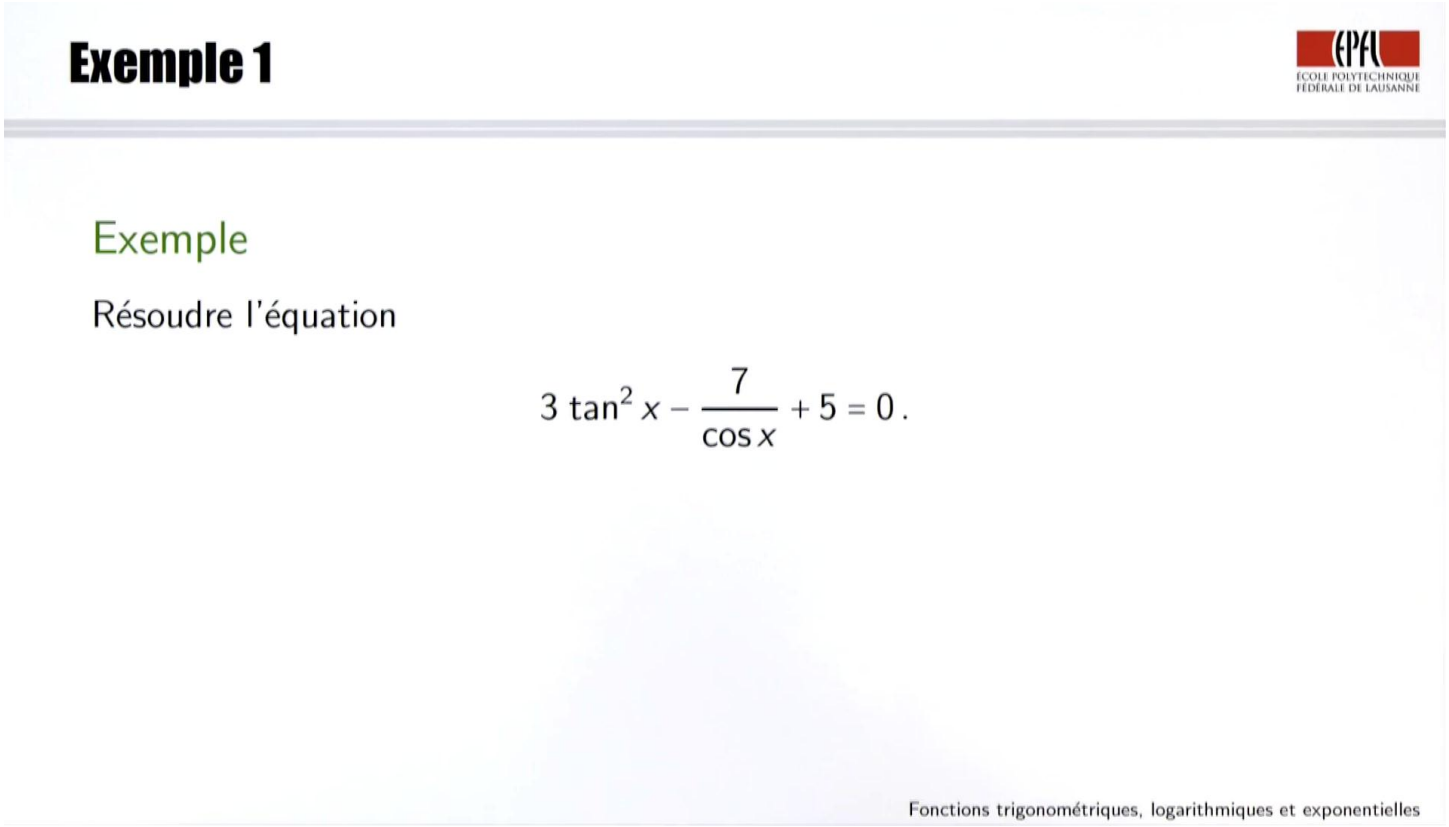
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Equations trigonométriques

6.3 Règle de Bioche : examples

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Bonjour. Comme promis la dernière fois, je vais vous présenter aujourd'hui quelques exemples d'équations trigonométriques rationnelles, que je vais résoudre à l'aide de la règle de Bioche et vous allez voir qu'en fait, l'application de cette règle de Bioche est certainement beaucoup plus simple qu'on pourrait peut-être le croire en suivant simplement la présentation de la dernière fois sur l'aspect théorique de cette règle. Vous allez voir que l'on peut résoudre ces équations trigonométriques rationnelles très simplement. Évidemment, à condition de tomber sur des équations algébriques que l'on arrive à maîtriser. Voici mon premier exemple, une équation trigonométrique rationnelle; on a *3.tan²(x) - 7/cos(x) + 5 = 0* C'est exactement la forme d'équation dont nous avons parlé la dernière fois.

Notes

Summary

0m 03s

Exemple 1 : solution

Notre équation : $3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$

(I) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \tan x \text{ et } \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \mathbb{D}_{\tan}$

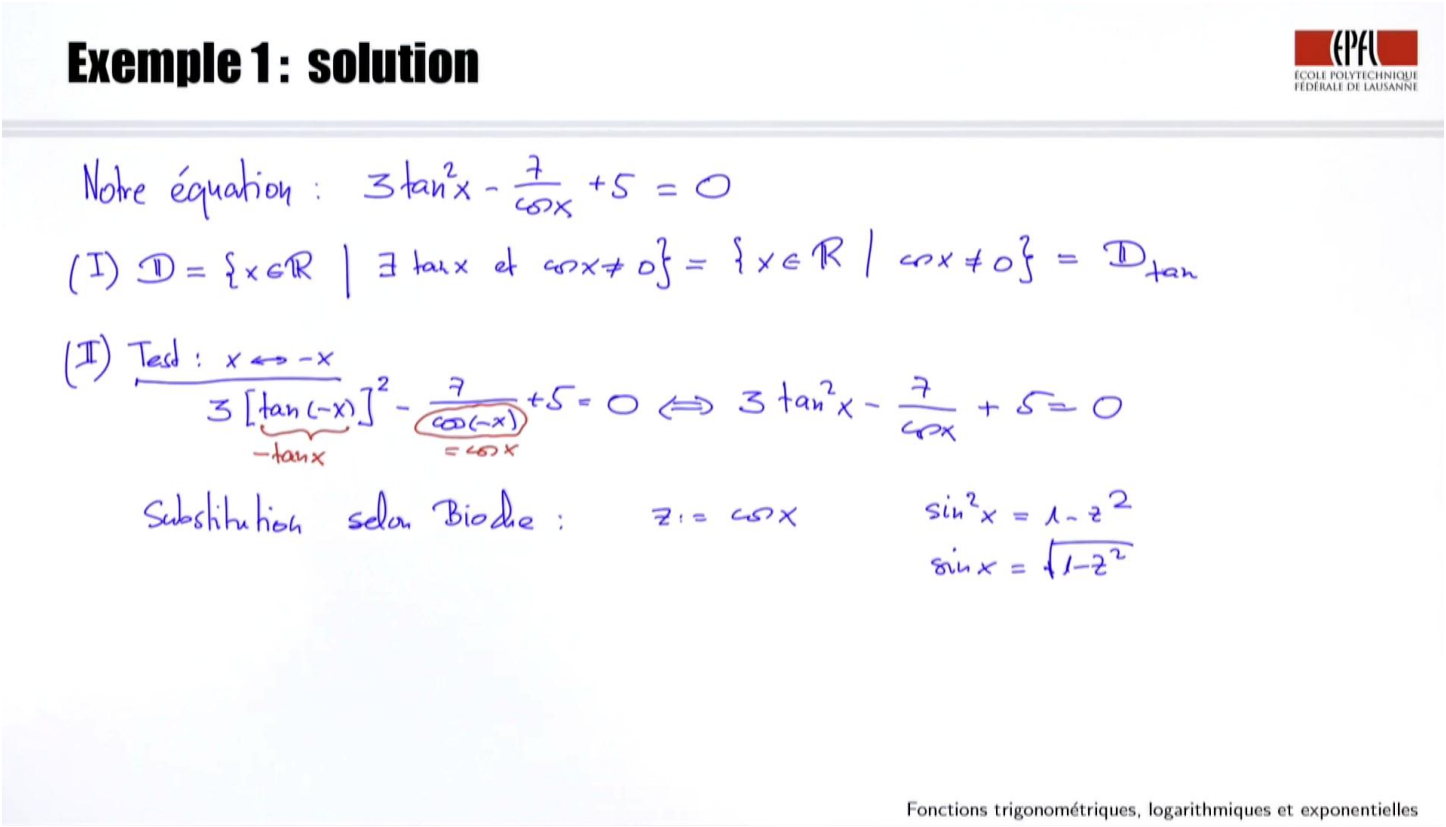
Écrivons notre équation : elle est donnée par *3.tan²(x) - 7/cos(x) + 5 = 0* Je vous rappelle qu'il faut toujours traiter ces équations en prenant tous les termes d'un même côté égal à zéro. Dans une première étape, ce qu'il faut faire avec toute équation c'est regarder pour quelle valeur de *x* l'équation a simplement un sens, c'est-à-dire que le terme gauche peut être calculé pour quelle valeur de *x*. C'est la première étape, et je m'aperçois que les *x* pour lesquels je peux espérer trouver une solution, l'ensemble des *x* parmi lesquels je vais chercher une solution, ce sont tous les réels, mais je dois exclure ici les réels qui diviseraient par zéro, c'est-à-dire les points où cosinus s'annulerait, où tangente ne serait pas défini. Ici c'est donc l'ensemble des *x* dans ℝ, pour lesquels *tan(x)* doit exister et *cos(x)* doit être différent de zéro. C'est deux conditions sont en réalité les mêmes, il suffit de dire que ce sont tous les ($x \in \mathbb{R}$) pour lesquels le *cos(x)* est différent de zéro. C'est ce que nous avions appelé le domaine (D) de définition de *tan(x)*. C'est sur cet ensemble uniquement que je vais chercher des solutions.

Notes

Summary

1m 01s

Exemple 1 : solution



Cherchons ensuite des solutions : nous allons commencer par les tests selon Bioche. Le premier test est de remplacer *x* par *-x*. Faisons ça formellement : nous avons trois fois expression tangente, je remplace *x* par *-x* et je l'élève au carré, moins sept fois le *1 / cos x* où je remplace *x* par *-x*, et j'ajoute 5, ce qui est égal à zéro. Regardons cela un peu de plus près : tangente est une fonction impaire, donc en fait ça c'est *-tan(x)*, et le cosinus quant à lui, qui est une fonction paire, est en réalité ici *cos(x)*; maintenant, cette *-tan(x)*, je l'élève au carré et si je fais le tout, je peux écrire ceci comme $3.\tan^2(x) - 7/\cos(x) + 5 = 0$ donc c'est invariant, je retombe sur exactement la même forme d'équation, c'est-à-dire que la règle de Bioche me dit maintenant : cette règle me dit maintenant "on prend *z = cos(x)*", et si je fais cette substitution je peux simplement exprimer un $\sin^2(x)$; je peux l'exprimer comme un $1 - z^2$, au besoin, si j'ai un sinus, je prends le $1 - z^2$ et je tire la racine avec le signe +. Alors, qu'est-ce que cela donne ?

Notes

Summary

2m 45s

Exemple 1 : solution (suite)

Cela donne :

$$3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$3\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]^2 - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right] - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

J'ai l'équation de départ : *3.tan²(x) - 7/cos(x) + 5 = 0* et je connais une expression pour le sinus, le cosinus, il me manque celle de tangente donc écrivons cette tangente à l'aide de sinus et de cosinus : je vais avoir trois fois; j'ai tangente qui est le quotient du sinus et du cosinus et si je l'élève au carré, *3. [sin²(x)/cos²(x)] - 7/cos(x) + 5 = 0*. Je fais les substitutions voulues et alors j'ai ici 3; le cosinus, c'est *z* donc j'ai ici *z²*; le sinus carré c'est *1 - z²*; je soustrais *7 / cos x* et j'ajoute 5, ce qui est égal à 0. Faisons tout de même une remarque : on aurait pu avoir ici trois fois l'écriture *sin(x)/cos(x)* au carré, auquel on soustrait *7/cos(x)* puis auquel on ajoute 5, ce qui égal à zéro, et dans ce cas-là, nous aurions écrit trois fois et pour le cosinus j'écris *z* jusqu'à rien ne change. Pour le sinus, j'écris le *1 - z²* avec le signe + devant la racine, ce que nous avions vu dans la théorie de Bioche car on peut faire cela simplement de cette façon-là, et donc là j'ai *7/x + 5 = 0*. Et en fait si vous regardez vous allez trouvez exactement -pardon, ici, il manque encore le carré...

Notes

Summary

4m 57s

Exemple 1 : solution (suite)

Cela donne :

$$3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-z^2) - 7z + 5z^2}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - 7z + 3 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - \ldots}}{\ldots}$$

$$3\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]^2 - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right]^2 - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

Rem $z \neq 0$ car $\cos x \neq 0$

Ici, maintenant vous faîtes les calculs vous avez trois fois cette racine élevée au carré, et vous voyez bien que vous retombez sur la même chose. Ici, je me retrouve devant une équation qui est encore rationnelle, je peux mettre le tout sous le même dénominateur ce que je vais faire : le dénominateur commun, c'est z^2, donc il va me rester $3.(1 - z^2) - 7.z + 5.z^2 = 0$ et si cette fraction est nulle, il faut que le numérateur soit nul donc tout cela n'est valable que si et seulement si le numérateur que je peux calculer : j'ai ici $- 3.z^2 + 5.z^2 = 2.z^2$; j'ai ensuite $-7.z$ et j'ai un +3 qui est nul. Notons bien que z doit être différent de zéro, ce qui est dû au fait que le cosinus est au dénominateur et nous avons dit que le cosinus est différent de zéro; c'est donc sur ce domaine que nous calculons. Ici, nous pouvons résoudre une équation quadratique : le discriminant va être positif, on va alors obtenir pour *Z1* et *Z2* deux solutions. On a-*B*, c'est 7 ± la racine, avec le 7^2 qui donne *49*, moins *4AC*, *4. 2. 3*, qui me font *24*, ça c'est sous la racine, le tout divisé par *2A*, qui font 4, donc j'obtiens *7 ± 5/4* ce qui me donne deux possibilités.

Notes

Summary

6m 59s

Exemple 1 : solution (suite)

Cela donne :

$$3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-z^2) - 7z + 5z^2}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - 7z + 3 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 & \in [-1,1] \\ 1/2 & = \cos x \end{cases}$$

$$3\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]^2 - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right]^2 - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

Rem $z \neq 0$ car $\cos x \neq 0$

Une première, 3, la deuxième, *1/2*. Notez bien que le 3, je vais tout de suite le rejeter parce que *z* est donné comme *cos x* et que ce cosinus ne peut être à l'extérieur des valeurs entre -1 et 1. Donc, le cosinus ne peut pas prendre la valeur 3. Je retiens uniquement ce 1/2, qui va être cosinus de *x*.

Notes

Summary

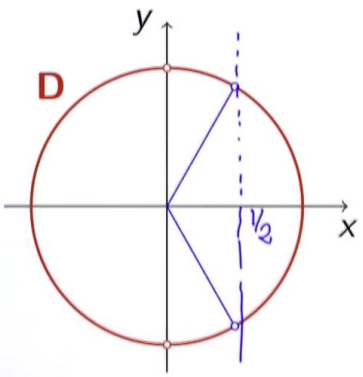
8m 56s

Exemple 1 : solution (suite et fin)

Mais
$\cos x = \frac{1}{2}$

donne
$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + k2\pi$

c.à.d
$x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



Maintenant, on peut conclure : si je prends cette équation *cos(x) = 1/2*, c'est ce que nous avons fait ici, c'est-à-dire que nous avons recherché le cosinus, ici à la valeur *1/2*, Pour le cosinus nous avons deux possibilités, nous avons une fois arccos, *arccos(1/2) + modulo 2π*, et l'on met devant tout cela un ±, ce qui donne ± *arccos(1/2) + k.2π* et que les solutions sont données par ±. *1/2* est une valeur remarquable, le cosinus prend la valeur *1/2* pour l'angle de *π/3*, donc j'obtiens ici *π/3 + k.2π*. C'est l'ensemble de toutes les solutions. On mentionne toutefois que ($k \in \mathbb{Z}$), ce qui est une condition usuelle, et voilà, ce sont mes solutions. Vous retrouvez ici, dans le dessin, ces solutions et remarquez bien qu'ici, avec le cercle rouge, nous indiquons le fait que l'équation de départ n'était pas définie; ici, avec les deux points en bleu, nous donnons les positions sur le cercle trigonométrique qui correspondent à ces solutions.

Notes

Summary

9m 21s

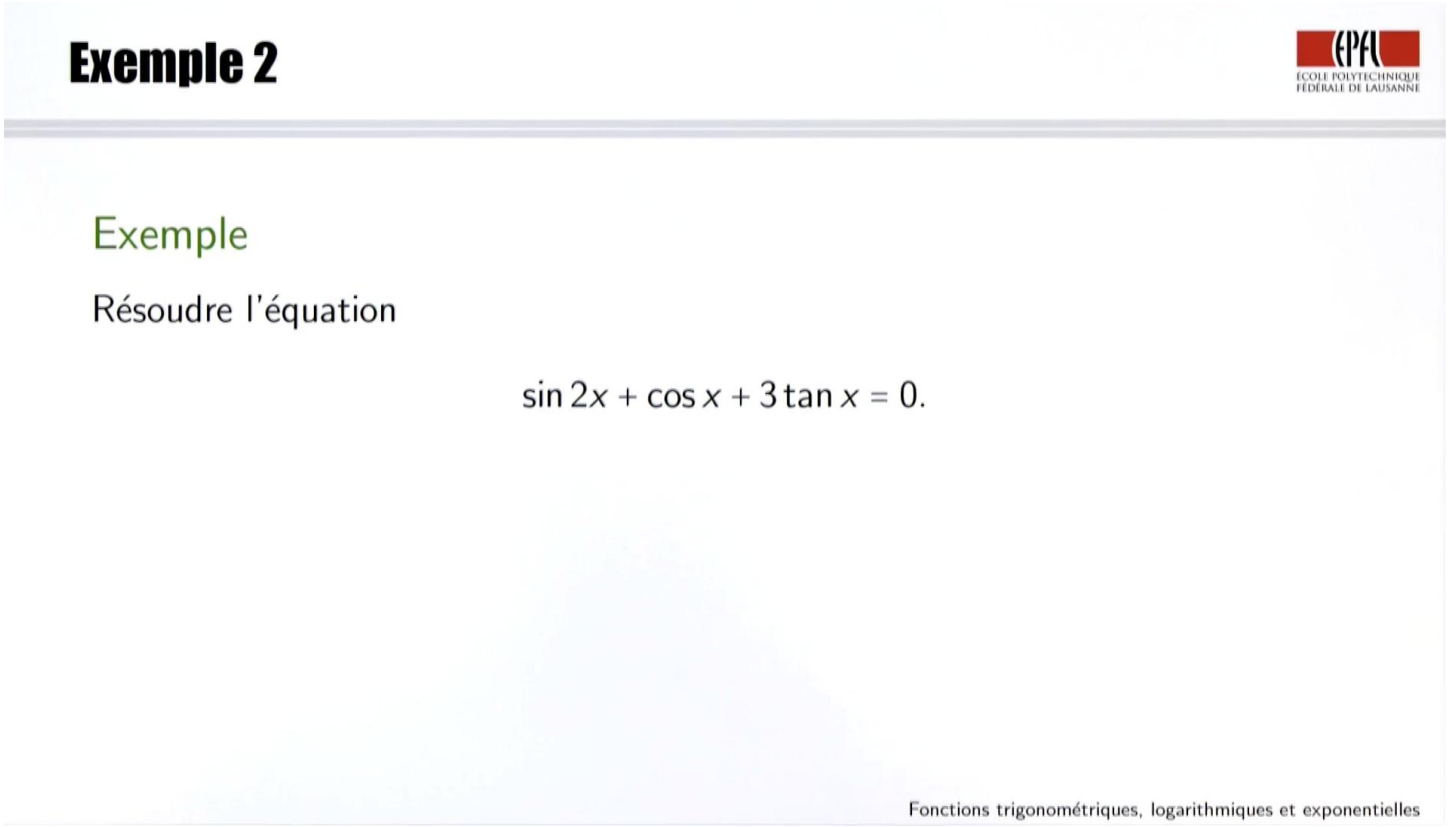
Exemple 2

Exemple

Résoudre l'équation

$$\sin 2x + \cos x + 3\tan x = 0.$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles



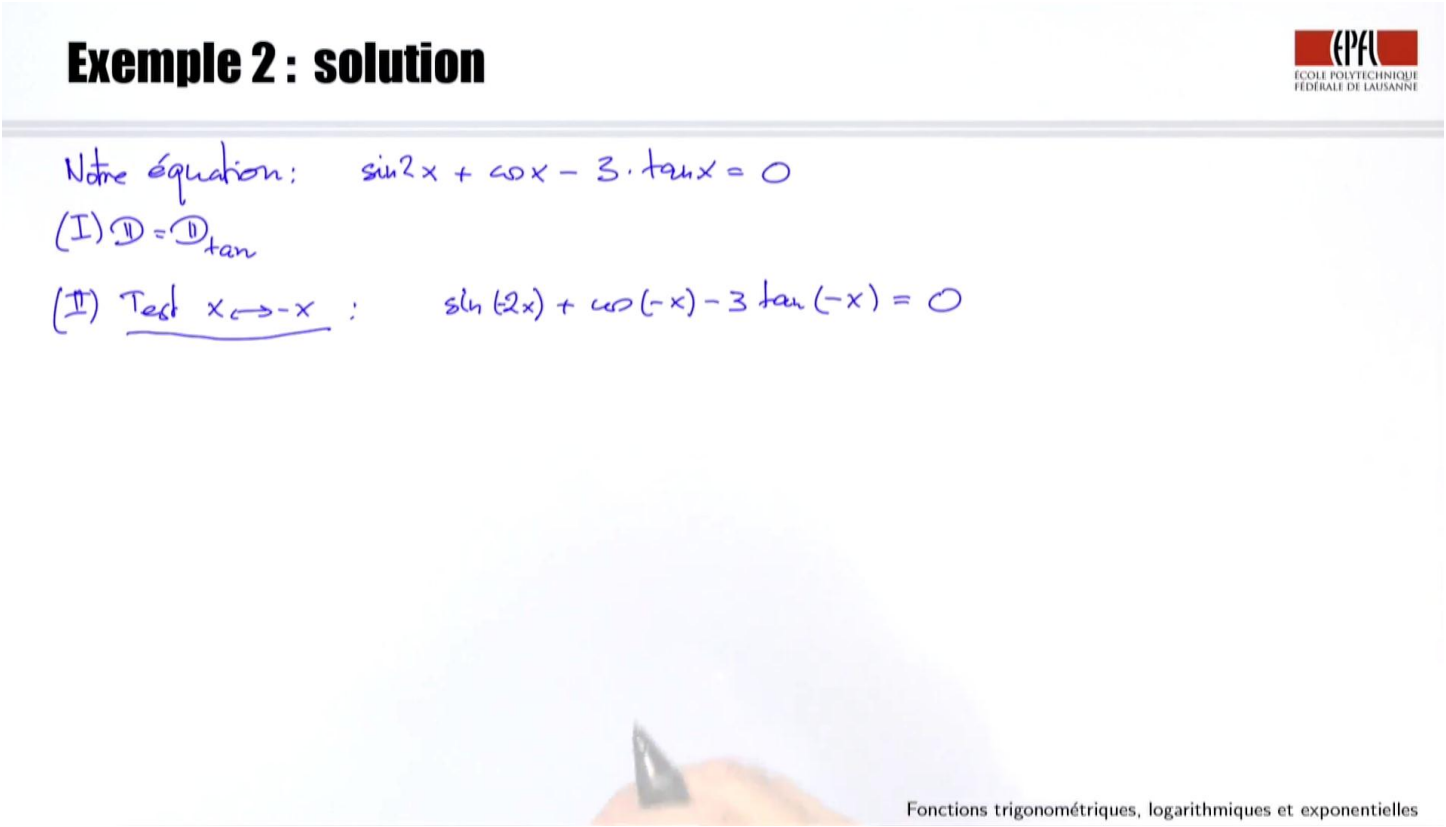
Voici un deuxième exemple : c'est une équation trigonométrique rationnelle. Il n'y a pas de quotient, la difficulté de cette équation provient alors du premier terme. Là, vous avez un *sin(2x) + cos x + 3.tan x* En réalité, *tan(x)* va de nouveau être un *sin/cos*, nous avons donc aussi des fractions de présentes, ce qui cadre tout à fait avec des équations trigonométriques rationnelles et nous allons résoudre cette équation à nouveau à l'aide des règles de Bioche.

Notes

Summary

11m 07s

Exemple 2 : solution



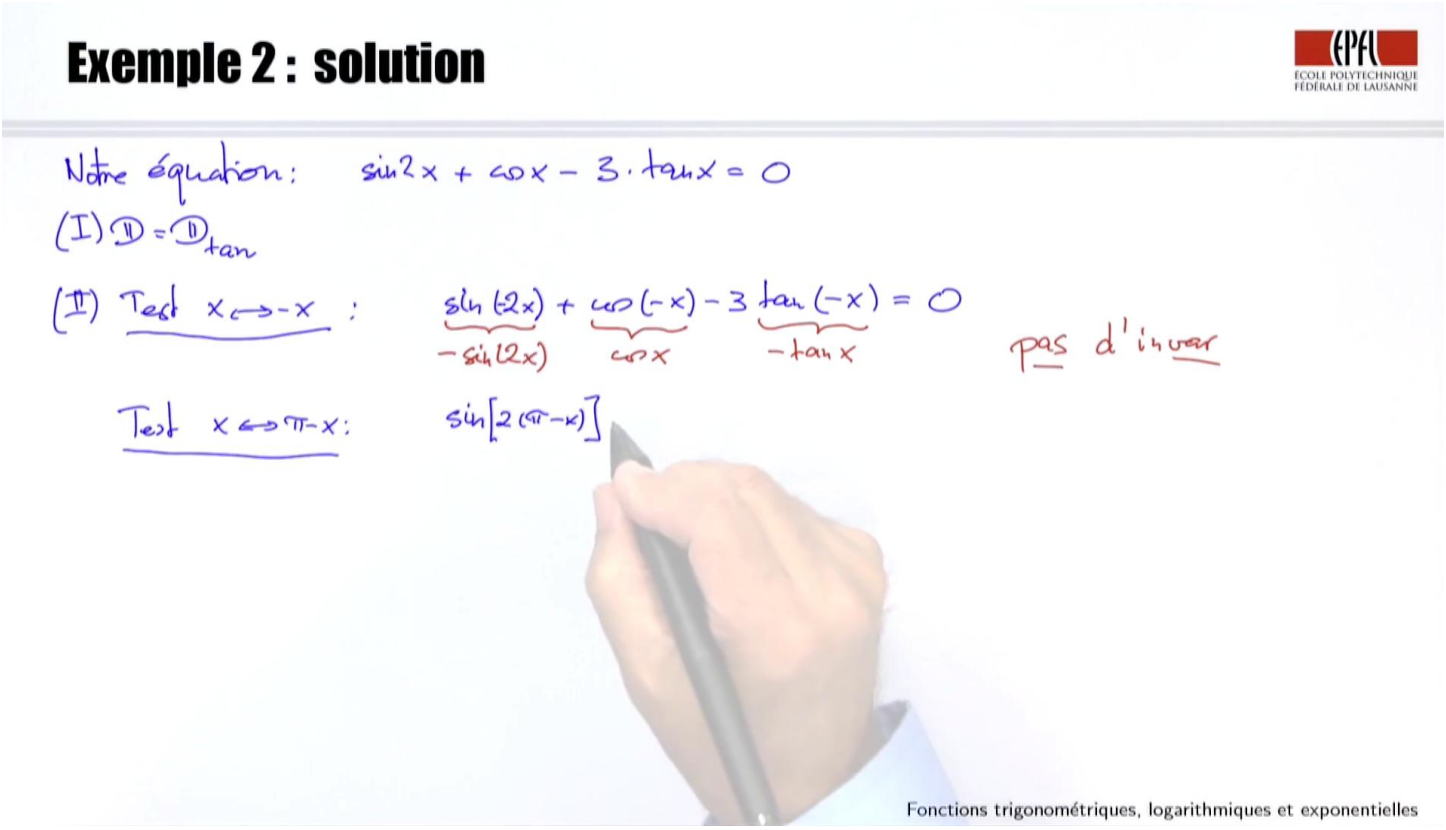
Reprenons notre équation. Elle est donnée par *sin(2x) + cos(x) - 3.tan(x) = 0*. On commence par réfléchir pour quelle valeur de *x* cette équation, surtout le terme de gauche, a un sens; on voit immédiatement qu'il faut prendre uniquement des *x* dans le domaine de définition de tangente et alors, le terme de gauche a parfaitement un sens et on peut décider si pour un *x* donné, dans ce domaine *Dtan*, si une valeur de *x* est ou non solution en l'insérant dans l'équation. Ensuite, nous allons chercher ces solutions et nous procédons par les tests. Nous commençons par le premier test de Bioche, le test remplaçant *x* par *-x*. Qu'est-ce que cela va donner ? Je prends le premier terme, je prends sinus et là, je remplace *x* par *-x*, donc j'obtiens *sin(-2x)*. Ensuite, j'ai le *cos(x)*, que je remplace également pas *-x*, moins 3 fois tangente où je remplace également *x* par *-x*, et je me pose la question: Est-ce que cette équation que je viens d'écrire, où je remplace *x* par *-x*, est invariante ? Correspond-t-elle à l'équation de départ, d'un point de vue formel ?

Notes

Summary

11m 40s

Exemple 2 : solution



Il faut regarder les termes un à un : si je regarde ce terme ici, le sinus est impair et je vais avoir *-sin(2x)*, c'est-à-dire que le premier terme change de signe; ici, le deuxième terme en revanche, le cosinus est pair : le deuxième terme ne change pas de signe, ce qui est déjà suffisamment alarmant pour dire qu'il n'y aura pas d'invariance; le troisième terme, quant à lui, change à nouveau de signe. Il est alors clair que l'on a pas d'invariance. On a un deuxième test J'utilise les tests dans l'ordre où je les ai présenté lors de ma présentation du théorème, de cette proposition des règles de Bioche. Le deuxième test consistait à remplacer *x* par *π - x*. Je vais le faire formellement : je prends ce sinus, et le *sin(2x)*, cette fois-ci, je vais le prendre de deux fois, et le *x*, je le remplace par *π - x*. Plus le *cos(x)*, avec le *x* que je remplace par *π - x*, moins *3.tan(x)*; Et ça, je remplace par *π - x*, le tout égal à zéro et je me pose la question : "est-ce une écriture invariante par rapport à l'équation de départ ?" Regardons les termes séparément, commençons par le terme en cosinus : si je remplace ici le *x* par *π - x*, le cosinus va changer de signe; j'obtiens alors *-cos(x)*.

Notes

Summary

13m 26s

Exemple 2 : solution

Notre équation : $\sin 2x + \cos x - 3 \cdot \tan x = 0$

(I) $\mathrm{II} = \mathrm{II}_{\tan}$

(II) Test $x \leftrightarrow -x$: $\underbrace{\sin(-2x)}_{-\sin(2x)} + \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} - 3\underbrace{\tan(-x)}_{-\tan x} = 0$ pas d'invar

Test $x \leftrightarrow \pi - x$: $\sin\underbrace{[2(\pi - x)]}_{2\pi - 2x} + \underbrace{\cos(\pi - x)}_{-\cos x} - 3\underbrace{\tan(\pi - x)}_{= \tan(-x) = -\tan x} = 0$

$= \sin(-2x) = -\sin 2x$

invar !

Substitution selon Bioche : $z := \sin x$, $\cos x = 1 - z^2$

$\cos x = \sqrt{1 - z^2}$

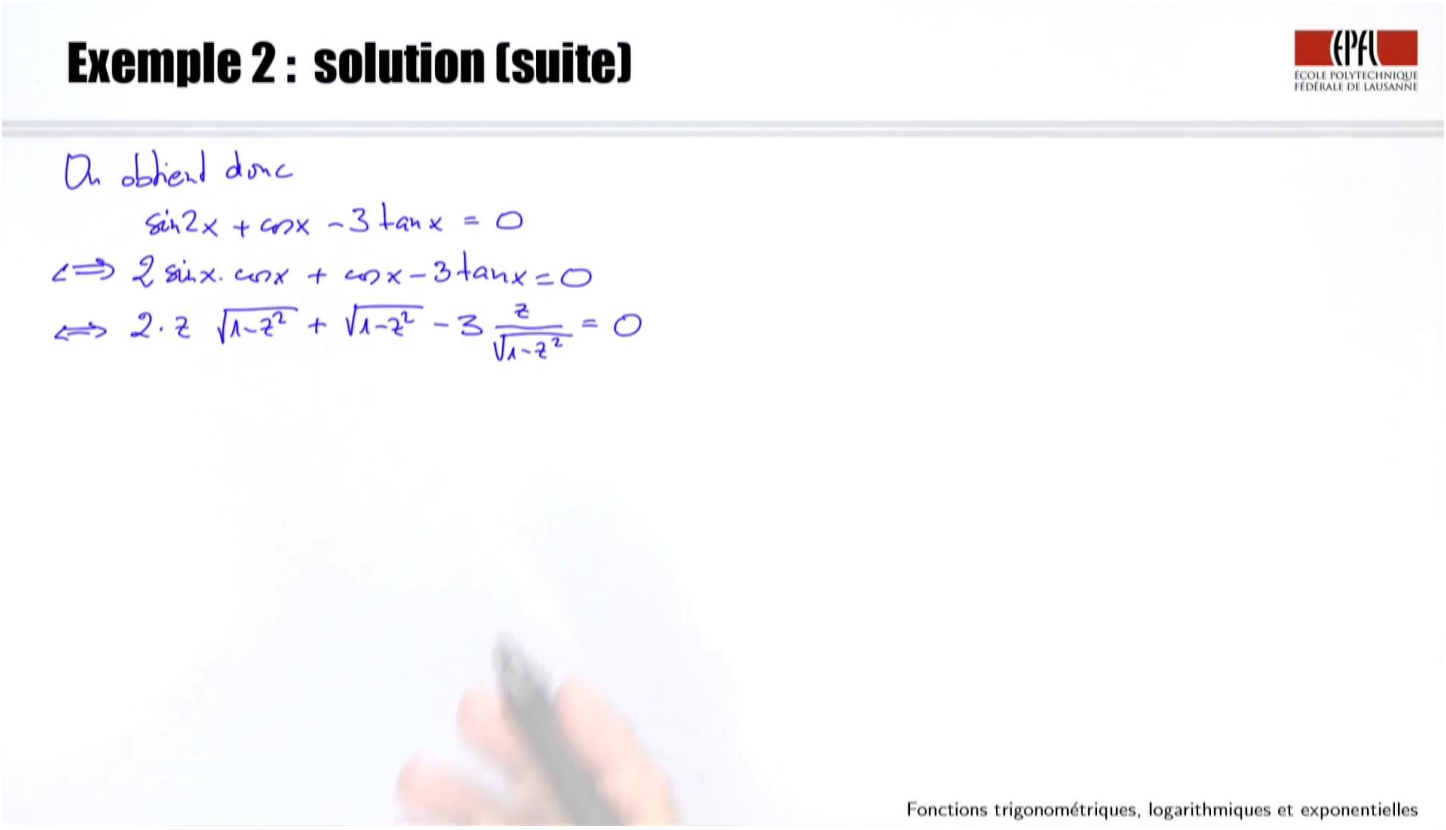
Qu'en est-il de tangente ? Je peux ignorer ce *π*, donc je peux dire que ça, c'est *tan(-x)*, mais je peux aussi dire que c'est *-tan(x)*, donc ce terme-là change également de signe. Pour le premier terme, regardez bien ce qu'il y a comme angle ici : en fait, l'angle est de *2π - 2x* donc je peux ignorer ce *2π*, le sinus est *2π* periodique, il va me rester un sinus de *-2x* ou si vous préférer, un *-sin(2x)*. Dans cette équation, on retrouve l'équation de départ, simplement avec un signe négatif partout. On parle alors d'invariance, parce qu'en réalité, cette équation est tout à fait équivalente à l'équation de départ, puisqu'il suffit de multiplier l'équation par *-1*, donc ici, c'est invariance. Je peux utiliser la substitution selon Bioche. J'utilise ces encadrés jaunes de la dernière fois. La substitution qu'il faut faire, c'est *z* est défini en tant que *sin(x)*, c'est-à-dire que partout où j'ai un *sin(x)*, je vais écrire *z*; ensuite, le *cos(x)*, c'est toujours *1 - z²*. ici, je ne vois tellement des carrés et je peux donc utiliser le cosinus comme *√1 - z²*, nous avions discuté du fait qu'il ne faut pas prendre ici les deux cas, par symétrie on va retrouver les cas où le cosinus serait négatif.

Notes

Summary

15m 23s

Exemple 2 : solution (suite)



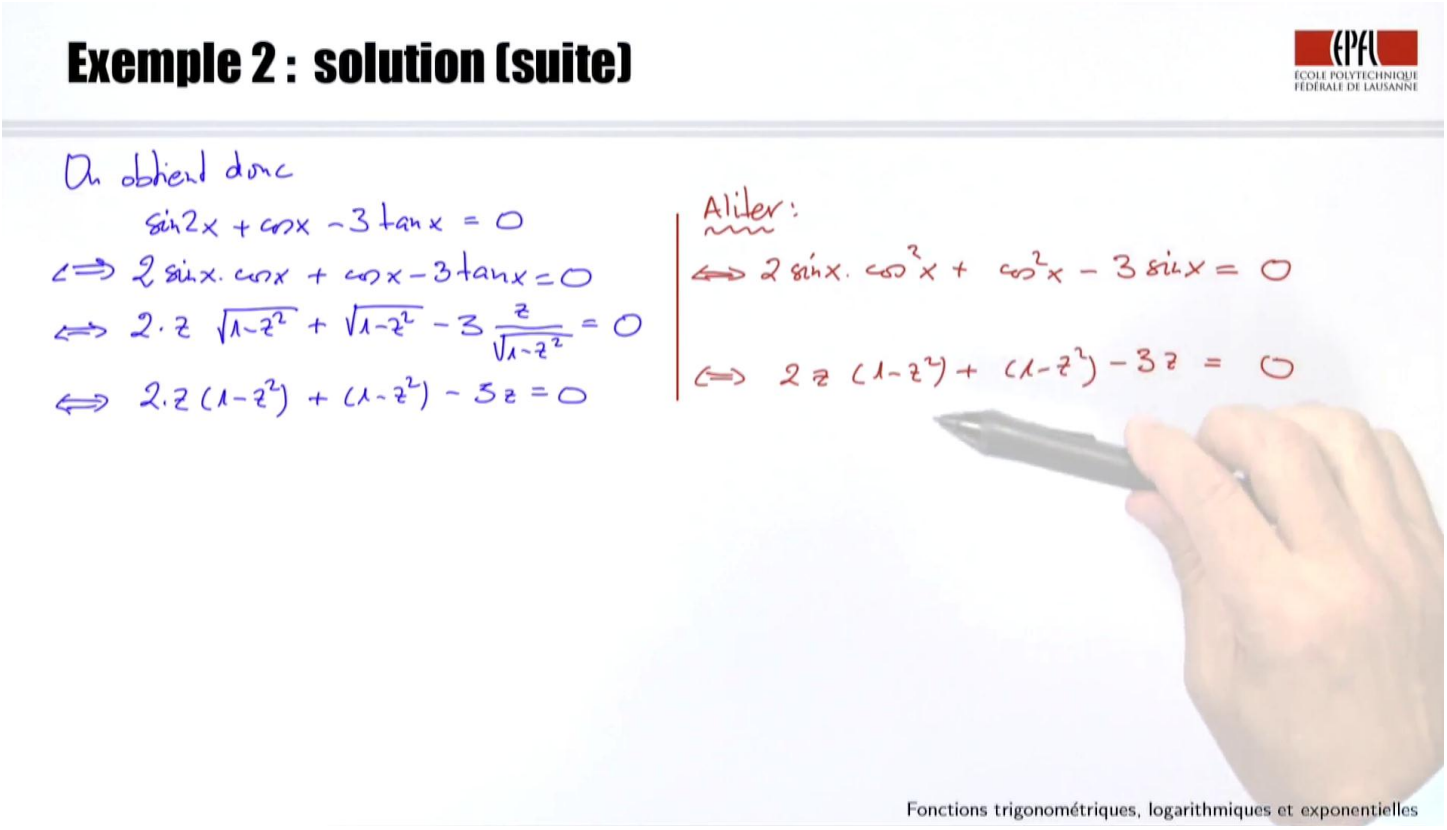
On a l'équation de départ *sin(2x) + cos(x) - 3.tan(x) = 0*. Voici l'équation de départ et, pour pouvoir bien remplacer, j'ai un problème avec ce terme de *sin(2x)*, qui n'est pas là comme substitution, mais nous connaissons tout de même des formules trigonométriques, des formules de l'angle double, je vais donc l'utiliser et j'ai en réalité ici un *2 sin(x). cos(x) - 3.tan(x) = 0*. C'est tout à fait équivalent. Et maintenant j'utilise les substitutions dont nous venons de parler, ça, c'est équivalent à 2 fois, nous avions dit que nous allions utiliser la substitution de *z* par *sin(x)*, donc j'ai ici *z*; pour le cosinus, j'ai *√(1 - z²)*; le terme suivant, j'ai plus le cosinus c'est *√(1 - z²)*; moins trois fois et pour tangente, nous n'avons pas encore la règle, mais évidemment ce sera sinus divisé par cosinus et je prends au numérateur le sinus qui est *z* et au dénominateur le cosinus qui est *√(1 - z²)*; égal à zéro. Ici, je vais mettre le tout sous le même dénominateur et je n'annulerai que le numérateur, c'est-à-dire que je vais multiplier par *√(1 - z²)*, ce qui est tout à fait légitime puisque cette expression ne peut s'annuler.

Notes

Summary

17m 20s

Exemple 2 : solution (suite)



z ne peut être égal à *±1* car si *z* l'était, tangente ne serait pas définie. Cela ne pose donc pas de problèmes, et je vais obtenir *2.z*, puis il va me rester la racine fois la racine, donc uniquement le *(1 - z²)*, plus la racine fois la racine, qui va me donner *(1 - z²)* et ici encore, *1 - 3.z = 0**. Mentionnons tout de même qu'on pourrait s'y prendre différemment : autrement, j'aurais pu dire que l'équation de départ, la deuxième ligne, pouvait s'écrire quelques peu différemment : la tangente, c'est *sin/cos*, le cosinus est non-nul, ou je ne suis pas sur le domaine d'existence de cette équation, j'amplifie par *cos(x)*. Ce qui va me rester, c'est *2.sin(x). cos²(x) + cos²(x) - 3.sin(x) = 0*. Là, la substitution est immédiate : si ici, je substitue, j'obtiens *2.z*; pour le *cos²*, c'est le sinus est *z*, le *cos²* c'est *1 - sin² x*, plus ici, *1 - sin²x*; et ici, trois fois le sinus. On retrouve exactement la même équation. Ce qui fait marcher cette règle de Bioche, c'est le fait que de se restreindre ici à un seul signe ne joue aucun rôle, on retombe sur ses pieds. C'est que le cosinus...

Notes

Summary

19m 08s

Exemple 2 : solution (suite)

On obtient donc

$$\sin 2x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot z\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-z^2} - 3\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{2z^3 + z + z - 1}_{=: f(z)} = 0$$

Mais $\cdot f(0) = -1$,

Aliter :

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - 3\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$

vu que cette équation à cette symétrie, le cosinus devrait apparaitre sous forme paire. Vous pouvez ignorer tout à fait cette partie où j'ai dis que je m'y prenais autrement, et nous avons ici une équation qui va être polynomiale : on effectue les produits, et ce qui va me rester, c'est un *2.z^3 + z² + z - 1 = 0*. On tombe sur une équation polynomiale de degré trois. Je vais pour clarifier un peu la situation, appeler cette expression ici *f(z)*, donc j'ai une fonction qui dépend d'un nombre réel, *z*, et j'analyse un peu ce *f(z)*. J'écris "mais"; qu'est-ce que je sais ? Par exemple, je peux, une fois calculé *f(z)* à l'endroit zéro, si je prends *z = 0*, j'obtiens *-1*. Je vous rappelle que *z* varie uniquement entre *-1* et *1*; les autres valeurs de *z* ne m'intéressent pas, donc ici je me suis mis au mieux. Je peux encore regarder par exemple ce qui se passe sur le bord, sur la plus grande valeur de *z* qui nous intéresse et qui est *z = 1*, si je prends 1, j'obtiens ici *2, 3, 4 - 1*, ce qui donne 3 en tout.

Notes

Summary

21m 00s

Exemple 2 : solution (suite)

On obtient donc

$\sin 2x + \cos x - 3\tan x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + \cos x - 3\tan x = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot z\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-z^2} - 3\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = 0$

$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{2z^3 + z^2 + z - 1}_{=:f(z)} = 0$

Mais $\cdot f(0) = -1$, $f(1) = 3$

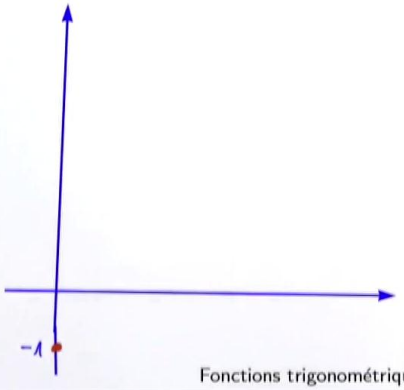
$\cdot f'(z) = \underbrace{6z^2 + 2z + 1}_{\Delta < 0}$

$\Rightarrow f'(z) > 0$ pour $z \in \mathbb{R}$

Aliter :

$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - 3\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$



Si vous connaissez un peu quelques théorèmes d'analyse, vous voyez que j'ai une fonction qui est continue; en zéro, elle est négative, en 1, elle est positive, donc il existe au moins un z où ce *f(z)* va s'annuler. On peut être encore un peu plus précis ici si vous prenez la dérivé : la dérivé va vous donner $6.z^2 + 2.z + 1$. Si vous analyser cette expression quadratique, si vous regardez son discriminant, le discriminant va être négatif, c'est-à-dire que cette dérivé ne change jamais de signe : si vous prenez $z = 0$, on voit que la dérivé est positive, donc je peux dire que cette dérivé est toujours positive pour toute valeur de z. J'ai une fonction qui est strictement croissante si on retient le tout sur un graphe : je vais prendre un axe vertical, un axe horizontal là, je vais me placer en un point, pour zéro, j'obtiens -1. Je vais peut-être rallonger quelque peu ici vers le bas. Pour 0, j'obtiens - 1 et là, je suis à la hauteur de -1. Si je vais à l'endroit 1, je vais obtenir une valeur de +3, et la fonction *f(z)* est monotone croissante, elle fait certainement quelque chose comme ceci, et je peux conclure ici qu'à cet endroit-là, quelque part, il existe exactement une valeur de *z*, disons *Z1*, avec la dérivé qui, à l'endroit de *Z1*, vaut zéro.

Notes

Summary

22m 32s

Exemple 2 : solution (suite)

On obtient donc

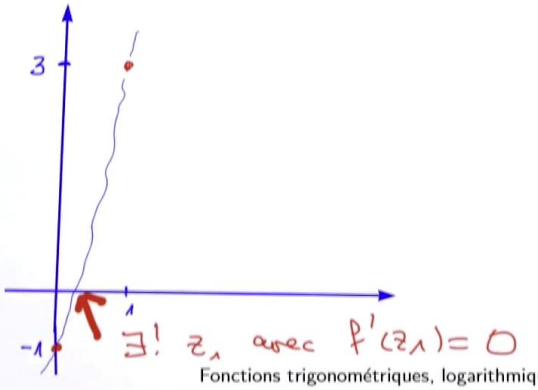
$$\sin 2x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot z\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-z^2} - 3\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{2z^3 + z^2 + z - 1}_{=:f(z)} = 0$$

Mais
- $f(0) = -1$, $f(1) = 3$
- $f'(z) = \underbrace{6z^2 + 2z + 1}_{\Delta < 0}$

$\Rightarrow f'(z) > 0$ pour $z \in \mathbb{R}$

Aliter :

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - 3\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$



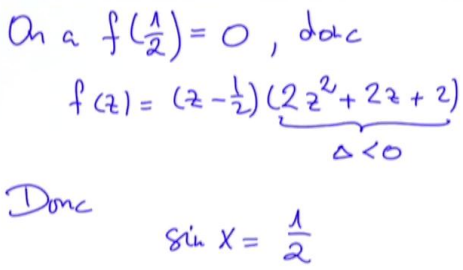
Dans un cadre général, il faudrait peut-être pour finir lancer une méthode numérique qui permettrait de trouver cette valeur entre 0 et 1; on a déjà pas mal d'informations mais ici, l'exemple marche peut-être un peu mieux qu'on aurait pu l'espérer.

Notes

Summary

25m 09s

Exemple 2 : solution (suite et fin)



On peut évidemment toujours essayer des valeurs qui sont remarquables. Une valeur remarquable, c'est la valeur *1/2*, et effectivement, si vous introduisez la *1/2*, vous obtenez zéro. Là, on peut deviner, pour finir, cette solution de l'équation *f(z) = 0*. Notez bien que si vous ne faites pas toute l'analyse de cette fonction *f(z)*, mais que vous trouvez simplement cette solution à l'équation *z = 1/2*, vous pouvez dans ce cas-là diviser le polynôme par *z - 1/2*, et alors vous allez obtenir un quotient qui s'écrit comme $2.z^2 + 2.z + 2$ et le terme quadratique ici, il aura un discriminant toujours négatif, c'est-à-dire que l'on retrouve que l'on a exactement une solution. Je peux alors conclure que le *sin(x)* est donné par *1/2*; c'est cette valeur, *1/2*, qui annule ce *f(z)*. Je prends toutes les solutions possibles pour *x* avec *x* est donné par : une première possibilité serait *arcsin(1/2) modulo 2π*.

Notes

Summary

25m 29s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

On a $f(\frac{1}{2}) = 0$, donc

$f(z) = (z - \frac{1}{2})(2z^2 + 2z + 2)$

$\Delta < 0$

Donc

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{2} + k2\pi = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \pi - \arcsin\frac{1}{2} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Le sinus prend la valeur de *1/2* pour *π/6*; Donc j'ai ici *π/6 + k.2π*, et l'autre possibilité par symétrie pour le sinus serait de prendre *π - arcsinus* : j'ai ici *π - arcsin(1/2) + k.2π*, c'est-à-dire que cette fois-ci, j'ai *π - π/6*, donc *5π/6 + k.2π*, dans les deux cas *(k ∈ ℤ)*, et cela résout mon problème puisque là, j'ai toutes les solutions de mon équation trigonométrique rationnelle.

Notes

Summary

26m 55s

Exemple 3

Exemple

Résoudre l'équation

$$15 \tan x + 9 \sin x + 32 \cos x + 32 = 0 .$$

Passons à un troisième exemple. L'équation que je vais considérer est donnée par *15.tan(x)*, en fait un quotient, *sin/cos + 9. sin(x) + 32.cos(x) + 32 = 0*.

Notes

Summary

27m 40s

Exemple 3 : solution

Notre équation : $15 \tan x + 9 \sin x + 32 \cos x + 32 = 0$

(I) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\tan}$

(II) $x \mapsto -x$, $x \mapsto \pi - x$, $x \mapsto \pi + x$: aucune invar !

Notre équation est donc *15.tan(x) + 9.sin(x) + 32.cos(x) + 32 = 0* Le domaine de cette équation -l'unique problème est que j'ai *tan(x)*, il faut donc éviter d'avoir un *x* où le cosinus s'annule- je vais alors me restreindre au domaine de définition de tangente. Ensuite, j'applique les règles de Bioche. Vous pouvez analyser l'invariance par rapport à ces règles, elles ne marcherons jamais : vous voyez, si par exemple seul le sinus change de signe, vous avez un problème sur ces deux termes, et si le cosinus change, sur ces deux termes. Mais, même si vous prenez la troisième substitution où le sinus et le cosinus changent, alors les deux termes ici changent de signes mais pas le 32 ni le *15.tan(x)* donc vous êtes toujours piégés; cette équation n'a aucune des invariances : *x* remplacé par *-x*, *x* remplacé par π - *x* et *x* remplacé par π + *x*, là, je n'ai dans aucun des trois cas une invariance. De nouveau, on peut vite le voir simplement par une analyse des signes comme je viens de le faire. Il reste alors la substitution, qu'on qualifie d'universelle : selon Bioche, nous allons utiliser la substitution *z = tan(x/2)*.

Notes

Summary

27m 56s

Exemple 3 : solution

Notre équation : $15\tan x + 9\sin x + 32\cos x + 32 = 0$

(I) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\tan}$

(II) $x \mapsto -x$, $x \mapsto \pi - x$, $x \mapsto \pi + x$: aucune impair !

Nous allons utiliser la substitution : $z = \tan\frac{x}{2}$

- Pour $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a

$$15\underbrace{\tan(\pi + k2\pi)}_{=0} + 9\underbrace{\sin(\pi + k2\pi)}_{=0} + 32\underbrace{\cos(\pi + k2\pi)}_{=-1} + 32 = 0 \quad : \checkmark$$

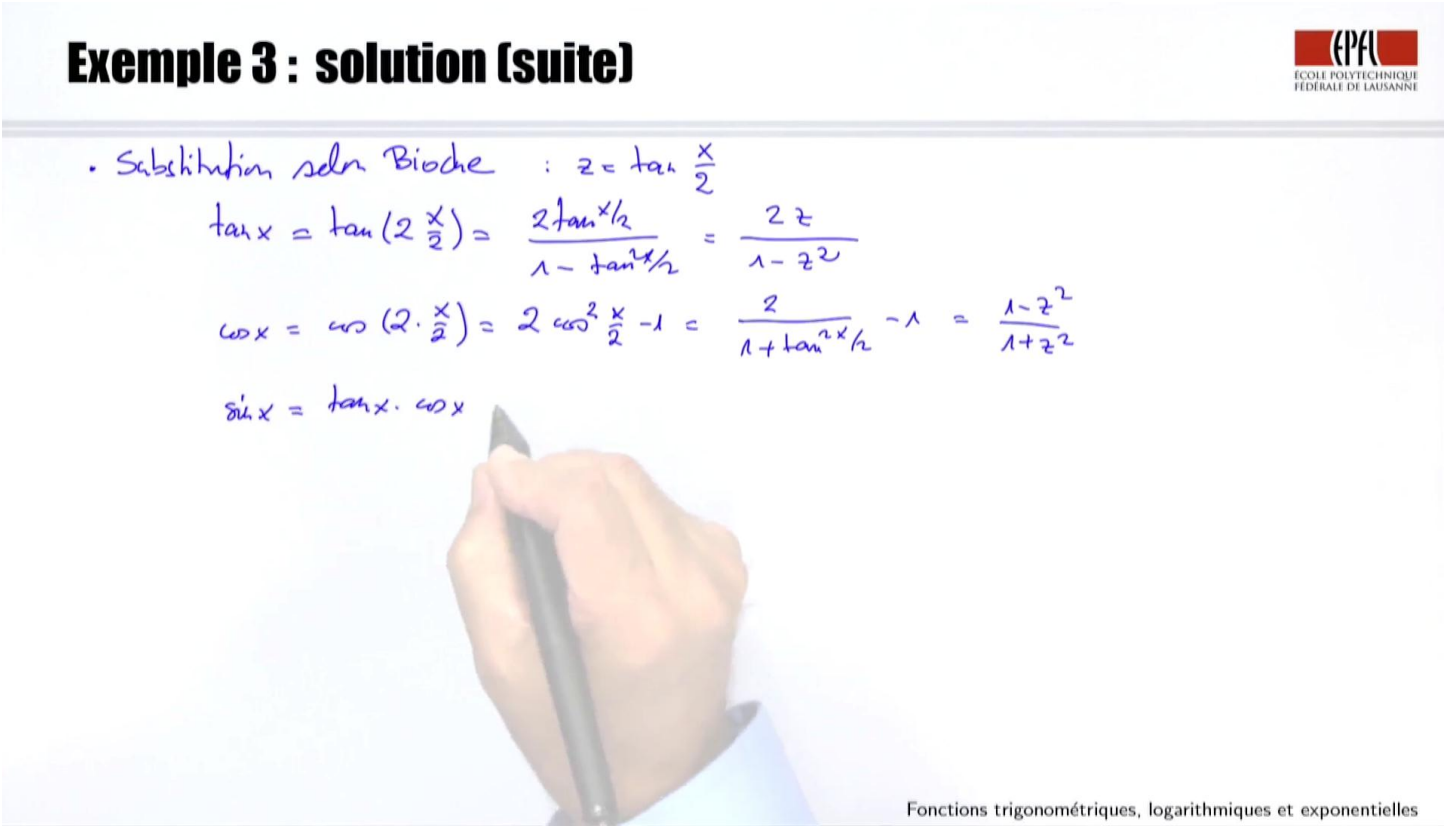
Les valeurs $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des solutions de notre équation !

La première chose à faire, c'est de vérifier les *x* qui ne sont pas dans le domaine de définition de cette transformation, c'est-à-dire que *tan(x/2)* n'est pas défini. Pour ces valeurs-là, pour *x* est égal à les valeurs où *tan(x/2)* n'est pas défini c'est $\pi + k.2\pi$avec $(k \in \mathbb{Z})$, et pour ces valeurs on va simplement les introduire dans l'équation et regarder ce qui se passe. On les introduit surtout à gauche, je vais alors avoir $15.\tan(\pi + k.2\pi) + 9.\sin(\pi + k.2\pi) + 32.\cos(\pi + k.2\pi) + 32 = 0$. Pour tangente, le $k.2\pi$ ne joue aucun rôle donc c'est uniquement $\tan(\pi)$ et $\tan(\pi)$ c'est zéro. Pour le sinus qui est 2π periodique, le $k.2\pi$ ne joue aucun rôle donc j'ai uniquement $\sin(\pi)$, et le $\sin(\pi)$, il est nul. Pour le cosinus, il est 2π periodique donc le $k.2\pi$ ne joue aucun rôle, j'ai uniquement le $\cos(\pi)$ qui, lui, vaut -1; en tout, il reste $-32 + 32 = 0$, donc cela, c'est vérifié, je peux conclure que les valeurs $x = \pi + k.2\pi$ et $(k \in \mathbb{Z})$ sont des solutions, et nous allons les retenir.

Notes

Summary

29m 55s



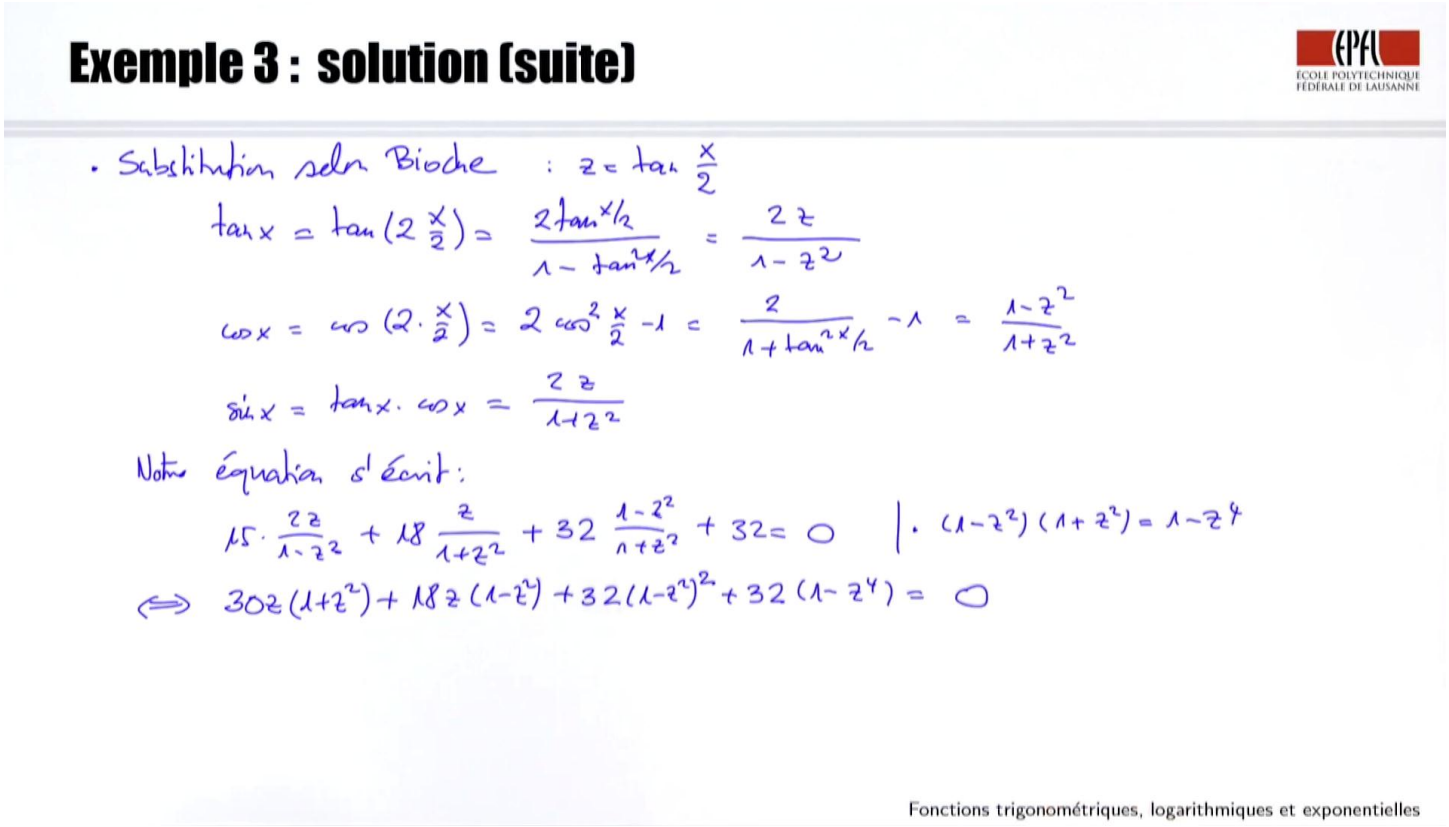
Ensuite, dans une deuxième étape, nous procédons à la substitution selon Bioche : La substitution selon Bioche, c'est $z = tan(x/2)$, il faut alors calculer les valeurs de tangente, cosinus et sinus. On peut les retrouver assez facilement. Donc pour $tan(x)$, on dit simplement que c'est $tan(2.x/2)$ et on utilise les formules de double angle. Dans le cas présent cela donne $2.tan(x/2) / [1 - tan^2(x/2)]$ ce qui fait $2.z/(1 - z^2)$. Pour le cosinus, vous argumentez exactement de la même façon et vous dites que c'est $cos(2.x/2)$ comme angle; on prend la variante avec cos^2, ça je vous le rappelle, car nous avons un bon lien entre cosinus et tangente, ce qui donne $2.cos^2(x/2) - 1$, et là, je peux remplacer le cos^2 par un $1 / [1 + tan^2(x/2)]$, et là on substitut pour $tan^2(x/2)$ le z, et si vous effectuez tous ces produits, en mettant le tout sous le même dénominateur, et quelques simplifications élémentaires, vous allez trouver cette formule pour le cosinus. Pour le sinus, je vous rappelle qu'il faut passer par tangente, il faut dire que c'est $tan(x). cos(x)$ et multiplier ces deux lignes, le $1 - z^2$ va se simplifier et il va rester $(2.z) / (1 + z^2)$.

Notes

Summary

31m 52s

Exemple 3 : solution (suite)



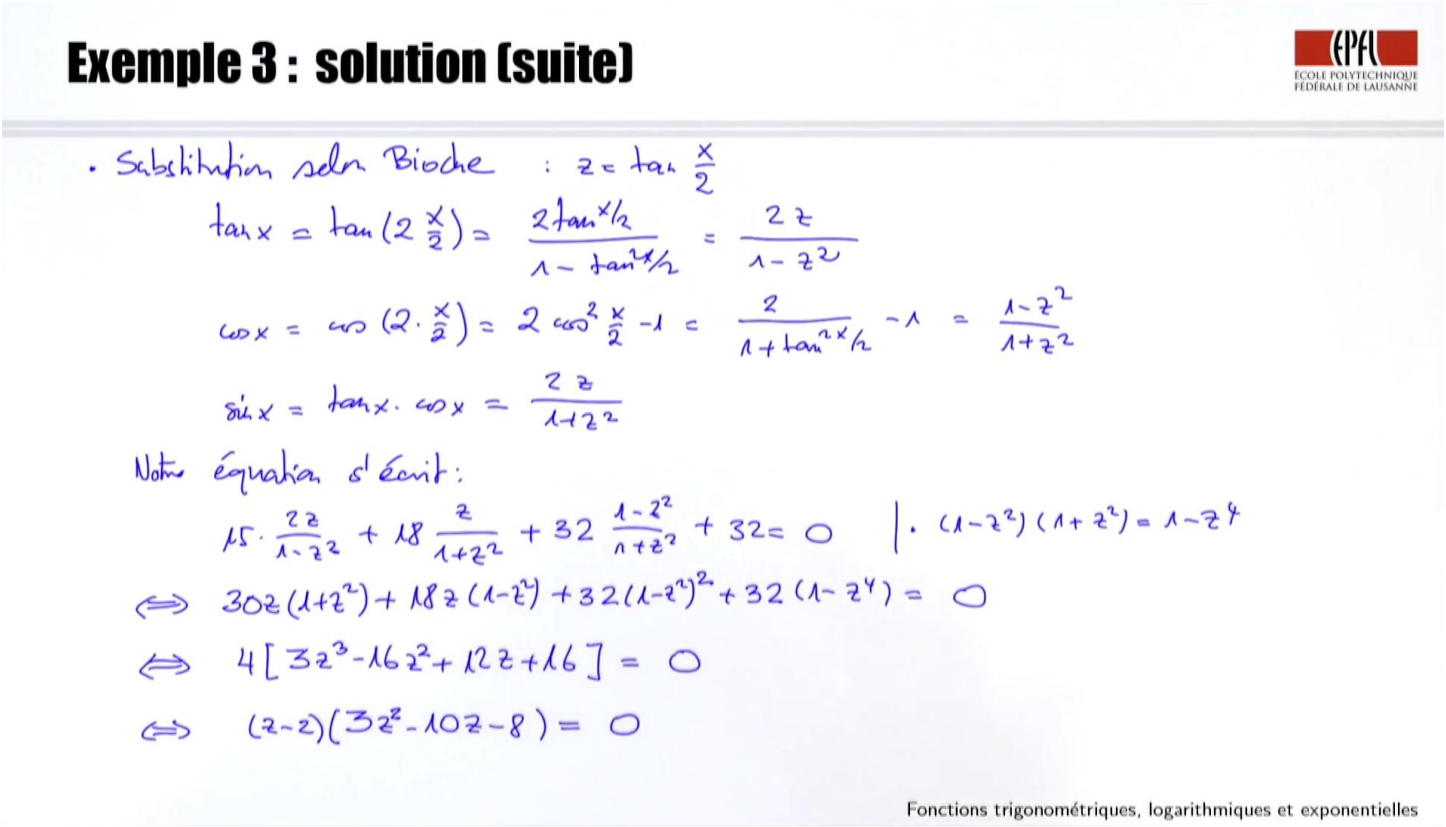
Si je fais cela, je peux réécrire mon équation. Alors notre équation s'écrit : j'ai quinze fois, le premier terme était tangente, *(2.z) / (1 - z²)*, Ensuite j'ai dix-huit fois le sinus, alors enfin, neuf fois le sinus, qui va me donner *18.z / (1 + z²)* et j'ai trente-deux fois un cosinus, et je remplace, plus trente-deux, égal à zéro. Là, nous transformons de façon équivalente ici, il est clair que je peux multiplier par le dénominateur commun, qui en fait est le produit de *(1 - z²). (1 + z²), donc 1 - z^4* et là je peux multiplier par ce dénominateur qui est non-nul, sinon je ne suis pas dans le domaine de définition. Notez bien que si le *1 - z²*, s'il s'annule, nous sommes exactement hors du domaine d'existence de l'équation. Si j'effectue cette amplification, il va me rester ici *30.z*, qui multiplie *1 + z²*; il va me rester un *18.z* qui multiplie *1 - z²*; il va me rester un 32 qui multiplie *1 - z²* et cette différence élevée encore au carré et derrière, il me reste 32 fois le dénominateur commun soit *1 - z^4*; égal à zéro. On effectue tous ces produits; je vous laisse faire cela et vous donne ici la réponse : je vais obtenir *4*.

Notes

Summary

33m 53s

Exemple 3 : solution (suite)



[3.z^3 - 16.z² + 12.z + 1] = 0. Il suffit d'annuler le crochet. On retombe alors sur une équation qui est ici de degré trois. On peut toujours essayer de trouver des solutions en devinant -notez bien qu'ici, *z = tan(x/2)*, donc *z* cette fois-ci peut prendre toutes les valeurs entre -∞ et +∞. Nous sommes pas dans la situation de l'exemple précédent, où *z* était un cosinus entre -1 et 1. Ici, ce sont toutes les valeurs de *z*, et on peut essayer -moi j'essaye toujours de trouver une solution évidente en prenant plus ou moins les diviseurs de cette constante, donc les diviseurs de 16, *±1*, *±2*, *±4*, etc. Ici, si vous le faites, vous allez trouver que *z = 2* donne effectivement zéro dans le crochet, crochet que je peux écrire comme un facteur, un produit. Je peux mettre en évidence le *z - 2* qui correspond à la solution *z = 2*, et après division, ce qui va rester c'est *3.z² - 10.z - 8 = 0*. Les autres solutions de cette équation sont données à partir des zéro de l'équation quadratique : *3.z² - 10.z - 8*, et cela est une équation quadratique dont le discriminant est positif donc là on retrouverait en tout pour finir 3 solutions.

Notes

Summary

36m 14s

Exemple 3 : solution (suite)

Donc $z_1 = 2$, $z_{2,3} = \frac{5 \pm 7}{3} = \begin{cases} 4 \\ -2/3 \end{cases}$

Cela nous donne

(i) $z_1 = 2$: $\tan \frac{x}{2} = 2$ c.à.d. $x = 2 \cdot \arctan 2 + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(ii) $z_1 = 4$: $\tan \frac{x}{2} = 4$ c.à.d. $x = 2 \arctan 4 + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(iii) $z_1 = -\frac{2}{3}$: $x = 2 \arctan(-2/3) + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

La première solution, c'était la solution évidente: *Z1 = 2*, et pour les deux autres, *Z2* et *Z3*, nous allons résoudre cette équation quadratique et cela nous conduit à *(5 ± 7)/3*, c'est-à-dire que nous allons trouver une fois avec le + : *(5 + 7)/3 = 4* et la deuxième fois, nous trouvons *(5 - 7)/3 = -2/3*. Chacune de ces trois valeurs est une valeur admissible. Cela va nous donner plusieurs solutions. Dans un premier temps, nous prenons *Z1 = 2* et nous allons alors dire que *tan(x/2) = 2*. Là, je peux trouver *x/2*; comme *arctan(2) modulo π*, et *x* va être le double donc je vais avoir *2.arctan(2)*, et au lieu d'avoir *+k π* -j'avais pour *x/2.k π*- le fois deux va agir sur ce *k.π* et j'obtiens *k.2π*, avec ($k \in \mathbb{Z}$). Je procède exactement de la même façon avec *Z1 = 4* : j'ai *tan(x/2) = 4*, et je peux donc écrire que *x/2* est donné par *arctan(4) + k.π*, ça c'est le *x/2* et je multiplie par deux, j'obtiens pour *x = 2.arctan(4) + k.2π* avec *k* un entier. Enfin pour la troisième possibilité *Z1 = -2/3*, on procède de la même façon : ce que vous trouvez ici c'est simplement *2.arctan(-2/3) + k.2π*.

Notes

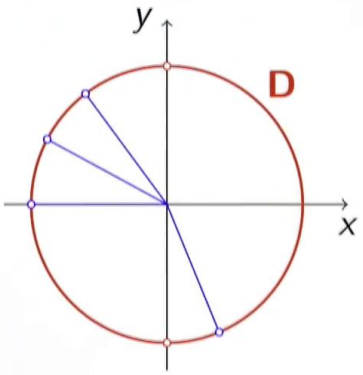
Summary

38m 03s

Exemple 3 : solution (suite et fin)

L'ensemble solution

$$S = \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup$$
$$\cup \{2\arctan 2 + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup$$
$$\cup \{2\arctan 4 + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup$$
$$\cup \{-2 \cdot \arctan \tfrac{2}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

En tout et pour tout je peux écrire l'ensemble solution. Je l'appelle $. $ est donné d'abord par $\pi + k.2\pi$. Ça, c'étaient les valeurs qui n'étaient pas transformées par la substitution de *tan(x/2)*. Nous avons vérifié ça par une introduction dans l'équation et cela avait marché pour tous ($k \in \mathbb{Z}$). Je les ai repéré ici, donc ces solutions sont là, sur le cercle trigonométrique à l'endroit π *modulo* 2π, on est toujours ici. La deuxième possibilité que avions trouvé était $2.\arctan(2) + k.2\pi$ avec $(k \in \mathbb{Z})$; la troisième possibilité était $2.\arctan(4) + k.2\pi$ avec ($k \in \mathbb{Z}$) et la dernière possibilité était $2.\arctan(-2/3)$ -arctan étant impaire, je peux écrire $-2.\arctan(2/3) + k.2\pi$ pour ($k \in \mathbb{Z}$). Nous avons repéré ici ces trois autres classes de solutions. De nouveau en rouge, ce sont les valeurs pour lesquelles l'équation ne donne pas de sens. Nous pouvons conclure que cela est la solution, car c'est l'ensemble de tous les x qui vérifient notre équation.

Notes

Summary

40m 32s

Equations trigonométrqiues

Ce que nous avons appris :

- Résolution d'équations trigonométriques par différentes méthodes . . .
- . . . et notamment par des substitutions "standard"

Prochain Chapitre :

- Relations dans le triangle quelconque

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Cela m'amène à la fin de ce chapitre intitulé équations trigonométriques. Donc, nous avons quand même fait deux volets très importants, puisque dans un premier volet nous avons résolu des équations trigonométriques par différentes méthodes, il y avait des équations dites "simples", avec le sinus de x une constante, où le sinus égal à un sinus, on avait des équations du type sinus = cosinus, on en avait qui étaient autour des oscillations harmoniques, ça c'était la première séquence de ce chapitre, ensuite nous avons utilisé des substitutions standards données par la règle de Bioche pour nous attaquer à des équations trigonométriques rationnelles qui étaient plus conséquentes. Dans le prochain chapitre, nous allons revenir sur des relations dans un triangle quelconque. On avait déjà parlé de relations dans un triangle rectangle et montré comment calculer des éléments manquant à partir de certains éléments donnés. Cette fois-ci, nous allons abordé le triangle rectangle quelconque.

Notes

Summary

42m 16s

Les oscillations harmoniques

Un grand merci d'avoir suivi ce cinquième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Je vous remercie. Nous terminons aujourd'hui un chapitre relativement lourd, lourd en calculs et qui, je pense, vous demande beaucoup d'énergie, beaucoup de discipline, beaucoup d'endurance et peut-être aussi de croire que l'on peut, c'est ce que je vous souhaite en tout cas. Je remercie également mes collaborateurs : Guido Burmeister, Roger Sauser et Olivier Woringer. Je vous remercier pour m'aidez quotidiennement, semaine après semaine, à réaliser ces séquences. A la prochaine !

Notes

Summary

43m 16s