ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Equations trigonométriques

6.3 Règle de Bioche : examples

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Exemple 1

Exemple

Résoudre l'équation

$$3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0\,.$$

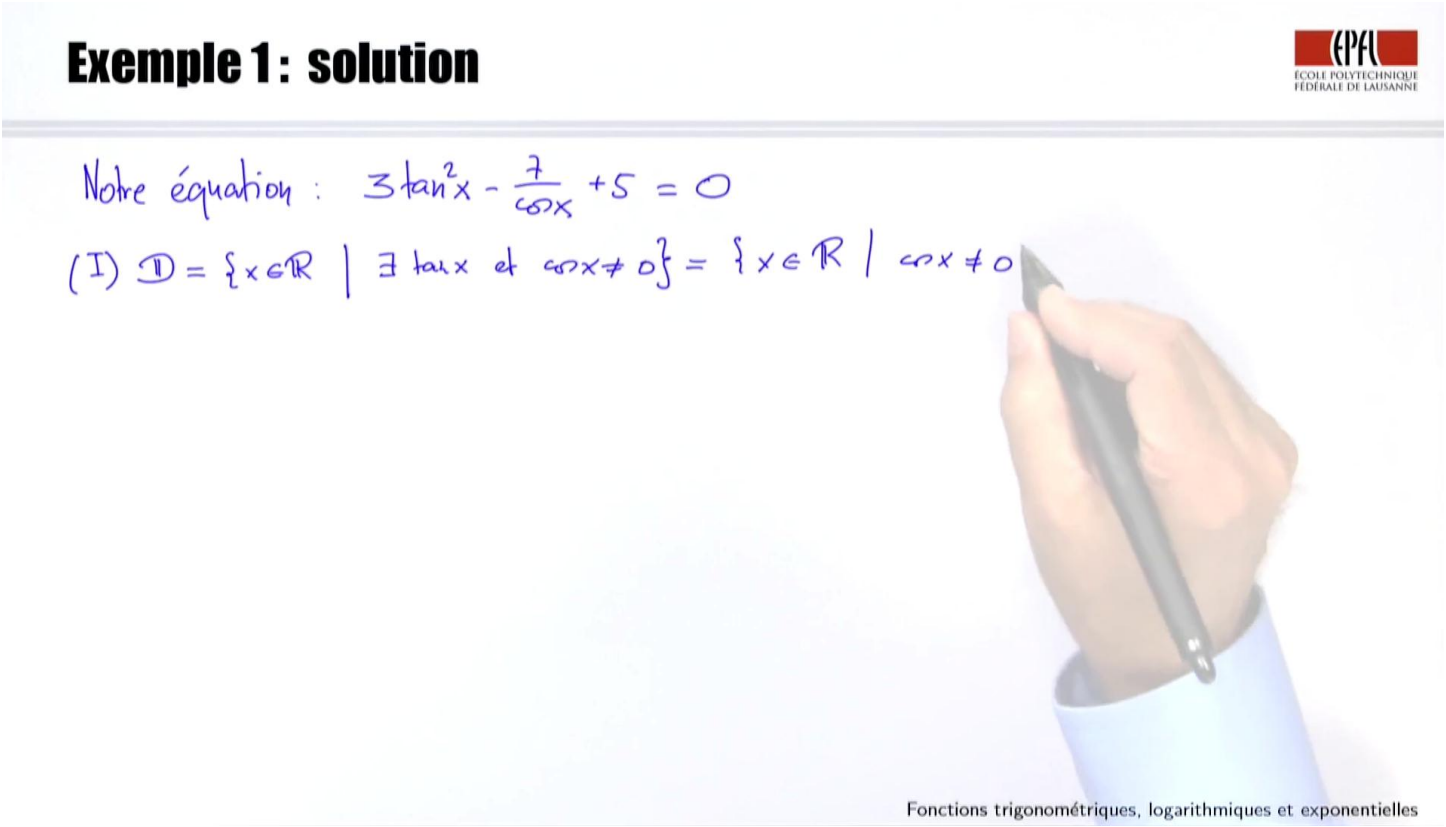
Guten Tag. Wie beim letzten Mal versprochen, werde ich Ihnen heute einige Beispiele vorstellen von rationalen trigonometrischen Gleichungen, die ich mithilfe der Bioche-Regel lösen werde, und Sie werden sehen, dass die Anwendung dieser Bioche-Regel in der Tag bestimmt viel einfacher ist, als man es glauben könnte, wenn man einfach der Präsentation des letzten Mals folgt, in Bezug auf den theoretischen Aspekt dieser Regel. Sie werden sehen, dass man diese rationale trigonometrischen Gleichungen ganz einfach lösen kann. Natürlich nur unter der Bedingung, dass man auf die algebraischen Gleichungen kommt, die man beherrschen kann. Hier mein erstes Beispiel, eine rationale trigonometrische Gleichung; Wir haben *3.tan²(x) - 7/cos(x) + 5 = 0* Das ist genau die Art Gleichung, von der wir beim letzten Mal gesprochen haben.

Notes

Summary

0m 03s

Exemple 1 : solution



Schreiben wir unsere Gleichung auf: Sie ist gegeben durch *3.tan²(x) - 7/cos(x) + 5 = 0* Ich erinnere Sie daran, dass man diese Gleichungen immer so behandeln muss, dass alle Elemente einer gleichen Seite gleich Null genommen werden. Im ersten Schritt muss man die gesamte Gleichung auf den Punkt hin betrachten, für welchen Wert von *x* die Gleichung einen sinn macht, das heißt, das linke Element kann mit welchem Wert von *x* kalkuliert werden. Das ist die erste Etappe, und ich stelle fest, dass die *x*, für die ich hoffe, eine Lösung zu finden, die Gesamtheit der *x*, unter denen ich eine Lösung suchen werde, alles die Realen sind, aber ich muss hier die Realen ausschließen, die durch Null teilen würden, das heißt, die Punkte, wo Kosinus sich auflöst, wo Tangens nicht definiert wäre. Hier ist es also die Gesamtheit der *x* in ℝ, für die *tan(x)* existieren, und *cos(x)* ungleich Null sein muss. Diese beiden Bedingungen sind eigentlich die gleichen, man muss lediglich sagen, dass es alles ($x \in \mathbb{R}$) sind, für die der *cos(x)* ungleich Null ist. Das hatten wir den Definitionsbereich (D) von *tan(x)* genannt.

Notes

Summary

1m 01s

Exemple 1 : solution

Notre équation : $3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$

(I) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \tan x \text{ et } \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \mathbb{D}_{\tan}$

(II) Test : $x \leftrightarrow -x$

$3[\underbrace{\tan(-x)}_{-\tan x}]^2 - \frac{7}{\underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x}} + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$

Substitution selon Bioche : $z := \cos x$ $\quad \sin^2 x = 1 - z^2$ $\quad \sin x = \sqrt{1-z^2}$

Ich werde lediglich in diesem Bereich die Lösungen suchen. Suchen wir anschließend Lösungen: Wir beginnen mit den Tests nach Bioche. Der erste Test ist der Ersatz von *x* durch *-x*. Machen wir das formal: Wir haben drei Mal den Term Tangens, ich ersetze *x* durch *-x* und ich erhöhe es zum ² minus sieben mal *1 / cos x*, wo ich *x* durch *-x* ersetze und ich addiere 5, was gleich Null ist. Schauen wir uns das ein wenig genauer an: Tangens ist eine ungerade Funtion, also ist eigentlich das hier *-tan(x)*, und Kosinus, der an sich eine gerade Funktion ist, ist in Wahrheit hier *cos(x)*; Nun erhöhe ich *-tan(x)* zum Quadrat, und wenn ich das alles tue, kann ich hier schreiben, da *3.tan²(x) - 7/cos(x) + 5 = 0* ist es also unveränderlich, und ich falle wieder auf genau die gleiche Art von Gleichung, das heißt, dass die Bioche-Regel mir jetzt sagt: Diese Regel sagt mir jetzt, "man nimmt *z = cos(x)"*, und wenn ich diese Substitution mache, kann ich einfach ein *sin²(x)* ausdrücken; ich kann es ausdrücken wie ein *1 - z²*, zur Not, wenn ich Sinus habe, nehme ich *1 - z²* und ziehe die Wurzel mit dem Vorzeichen +. Was ergibt das also?

Notes

Summary

2m 38s

Exemple 1 : solution (suite)

Cela donne :

$$3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$3\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]^2 - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right] - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

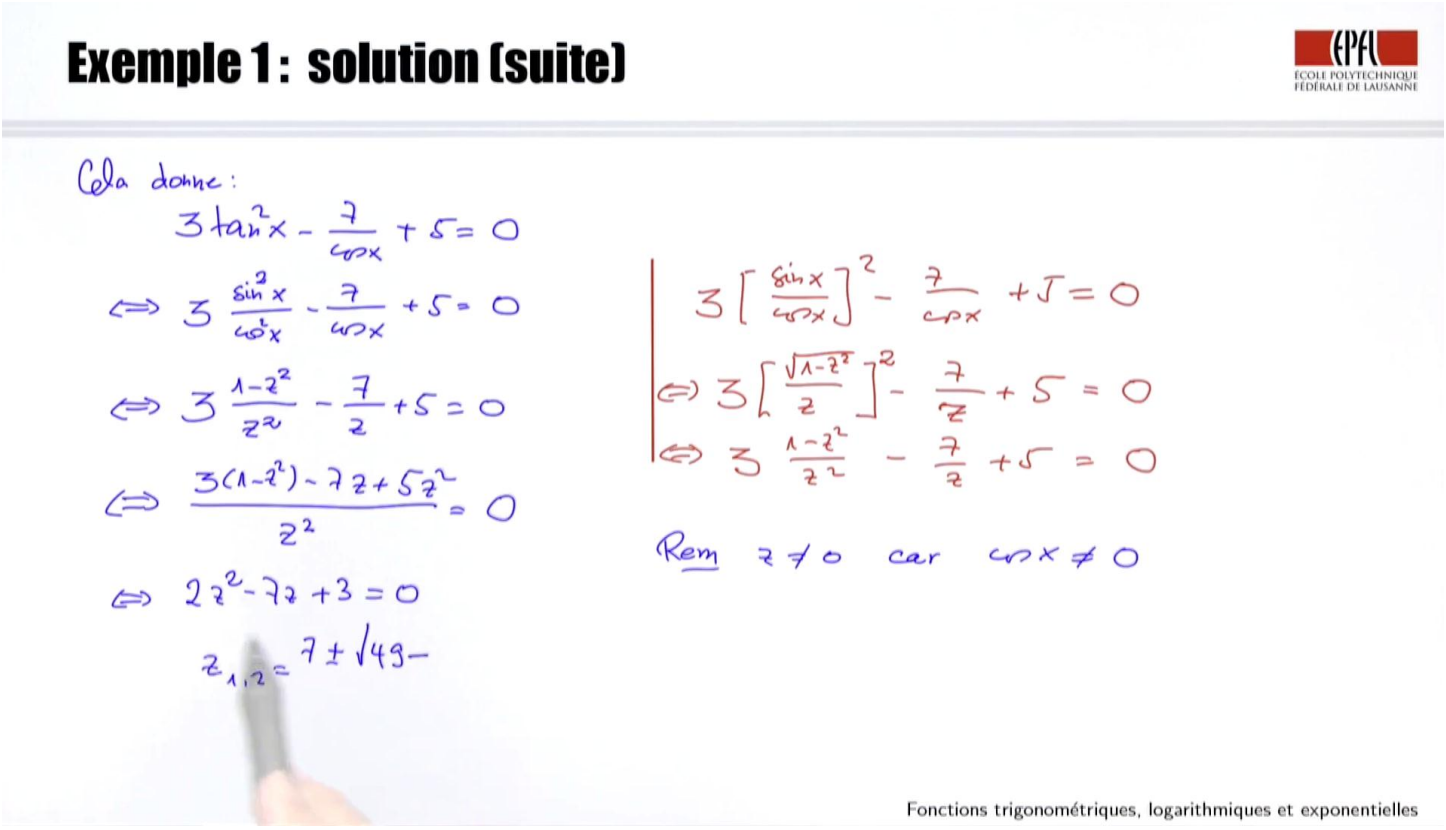
Ich habe die Ausgangsgleichung: *3.tan²(x) - 7/cos(x) + 5 = 0* und ich kenne einen Term für Sinus, Kosinus, mir fehlt der für Tangens, als schreiben wir Tangens mithilfe von Sinus und Kosinus: ich werde das dreimal haben; ich habe Tangens als Quotienten von Sinus und Kosinus und wenn ich zum Quadrat erhöhe, *3. [sin²(x)/cos²(x)] - 7/cos(x) + 5 = 0*. Ich führe die gewünschten Substitutionen durch und ich habe hier 3, das ist *z*, also habe ich hier *z²*; Sinus² ist *1 - z²*; ich substrahiere *7 / cos x* und addiere 5, was gleich Null ist. Trotzdem sei Folgendes angemerkt: Wir hätten hier drei Mal schreiben können *sin(x)/cos(x)* zum Quadrat, von dem man *7/cos(x)* substrahiert und dann 5 addiert, was gleich Null ist, und in diesem Fall hätten wir geschrieben drei Mal und für Kosinus schreibe ich *z*, bis sich nichts mehr ändert. Für Sinus schreibe ich *1 - z²* mit dem + als Vorzeichen vor der Wurzel, was wir in der Theorie von Bioche gesehen haben, denn das kann man einfach so auf diese Art und Weise tun, und somit habe ich da *7/x + 5 = 0*. Wenn Sie genau hinschauen, finden Sie genau - Entschuldigung, hier, fehlt noch das Quadrat...

Notes

Summary

4m 57s

Exemple 1 : solution (suite)



Hier, jetzt führen Sie die Berechnungen durch, Sie haben drei Mal diese zum Quadrat erhöhte Wurzel, und Sie sehen wohl, dass Sie auf das Gleiche Ergebnis zurückfallen. Hier befindet ich mich vor einer Gleichung, die noch rational ist, ich kann alles unter den gleichen Nenner stellen, was ich tun werde: Der gemeinsame Nenner ist *z²*, mir bleibt also *3.(1 - z²) - 7.z + 5.z² = 0*, und wenn dieser Bruch gleich Null ist, muss der Nenner Null sein, dann ist das alles nur dann gültig, wenn der Zähler, den ich berechnen kann: ich habe hier - *3.z² + 5.z² = 2.z²*;, ich habe anschließend *-7.z* und ich habe ein +3, was gleich Null ist. Bitte beachten Sie, dass *z* ungleich Null sein muss, was daher kommt, dass Kosinus im Nenner steht, und wir gesagt haben, das Kosinus ungleich Null ist; unsere Berechnungen erfolgen also in diesem Bereich. Hier können wir eine quadratische Gleichung lösen: Der Diskriminant wird positiv sein, also erhalten wir für *Z1* et *Z2* zwei Lösungen. Wir haben *-B*, das ist 7 ± die Wurzel, mit *7²*, was *49* ergibt, minus *4AC*, *4. 2.*

Notes

Summary

6m 59s

Exemple 1 : solution (suite)

Cela donne :

$$3\tan^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-z^2) - 7z + 5z^2}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 - 7z + 3 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 & \notin [-1,1] \\ 1/2 & = \cos x \end{cases}$$

$$3\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]^2 - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right]^2 - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1-z^2}{z^2} - \frac{7}{z} + 5 = 0$$

Rem $z \neq 0$ car $\cos x \neq 0$

3, woraus ich *24* erhalte, das ist unter der Wurzel, das Ganze geteilt durch *2A*, was 4 macht, also erhalte ich *7 ± 5/4*, woraus mir zwei Möglichkeiten entstehen. Die erste 3, die zweite *1/2*. Beachten Sie, dass ich die 3 sofort verwerfen werden, weil *z* wie *cos x* gegeben ist, und dieser Kosinus nicht außerhalb der Werte zwischen -1 und 1 liegen kann. Kosinus kann also nicht den Wert 3 annehmen. Ich behalte lediglich dieses 1/2, welches der Kosinus von *x* sein wird.

Notes

Summary

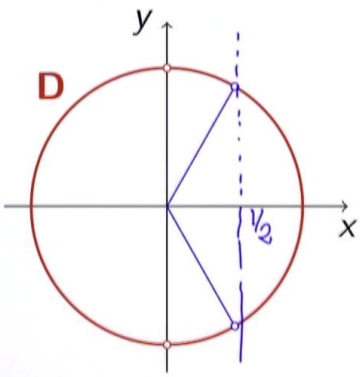
8m 41s

Exemple 1 : solution (suite et fin)

Mais
$\cos x = \frac{1}{2}$

donne
$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + k2\pi$

c.à.d
$x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Daraus kann nun geschlossen werden: Wenn ich diese Gleichung *cos(x) = 1/2* nehme, das haben wir hier getan, das heißt, dass wir Kosinus gesucht haben, hier am Wert *1/2*. Für Kosinus haben wir zwei Möglichkeiten, wir haben einmal Arkuskosinus, *arccos(1/2)* + *modulo* 2π, und wir setzen vor dies alles ein ±, was Folgendes ergibt: ± *arccos(1/2)* + $k.2\pi$, und dass die Lösungen durch ± gegeben sind. *1/2* ist ein bemerkenswerter Wert, Kosinus nimmt den Wert *1/2* an für den Winkel von $\pi/3$ erhalte ich also hier $\pi/3 + k.2\pi$. Das ist die Gesamtheit aller Lösungen. Wir erwähnen trotzdem, dass ($k \in \mathbb{Z}$), was eine gewöhnliche Bedingung ist, und hier, das sind meine Lösungen. Sie finden hier in der Zeichnung diese Lösungen wieder und achten Sie darauf, dass wir hier mit dem roten Kreis, die Tatsache andeuten, dass die Ursprungsgleichung nicht definiert war. Hier, mit den zwei blauen Punkten geben wir die Positionen auf dem trigonometrischen Kreis an, die diesen Lösungen entsprechen.

Notes

Summary

9m 21s

Exemple 2

Exemple

Résoudre l'équation

$$\sin 2x + \cos x + 3\tan x = 0.$$

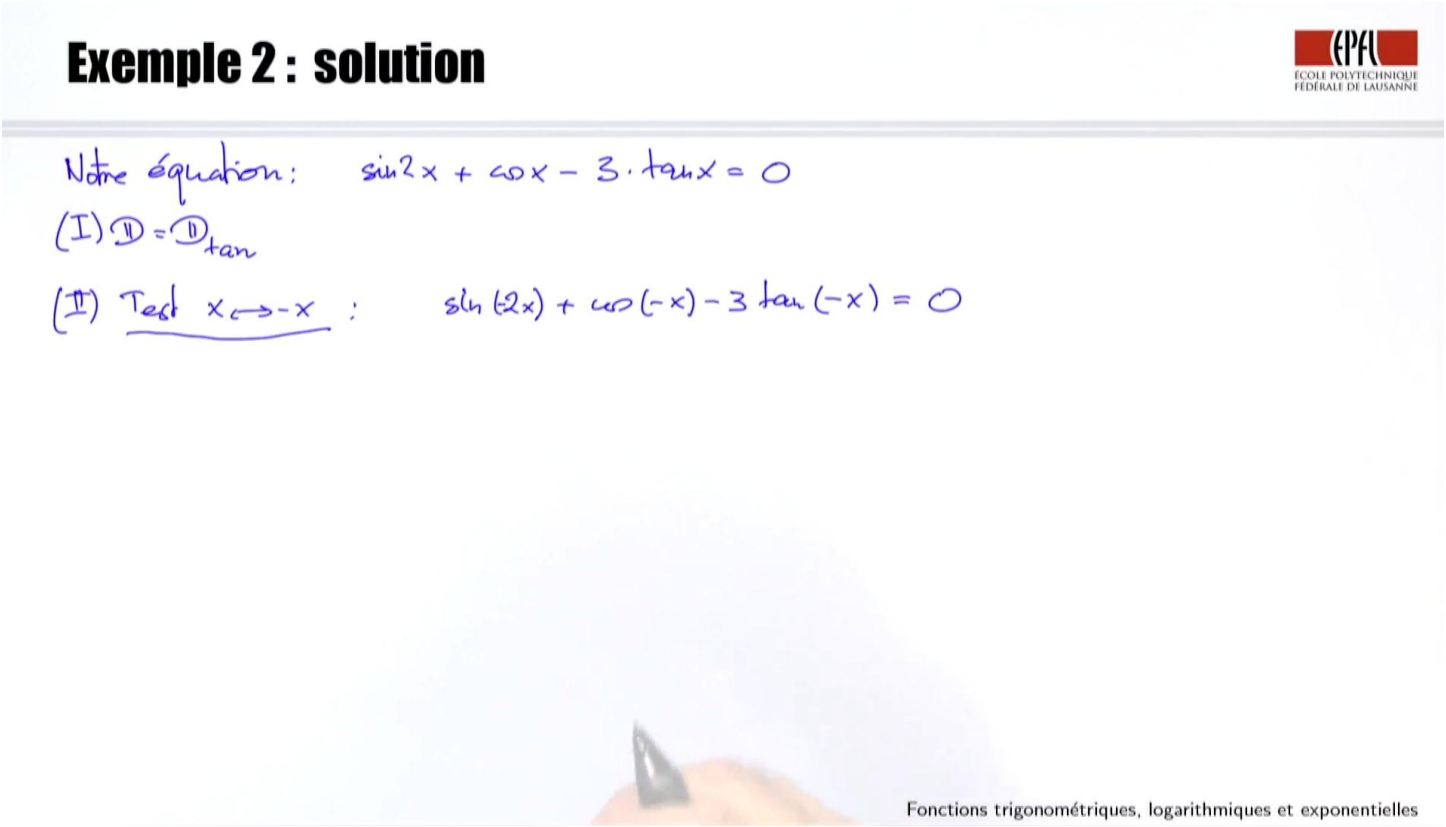
Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Und noch ein zweites Beispiel: Es ist eine rationale trigonometrische Gleichung. Es gibt keinen Quotienten, die Schwierigkeit bei dieser Gleichung kommt also aus dem ersten Element. Dort haben sie ein *sin(2x) + cos x + 3.tan x*. In Wirklichkeit wird *tan(x)* erneut *sin/cos* werden, wir haben also anwesende Brüche, was in der Tat zu den rationalen trigonometrischen Gleichungen passt, und wir werden diese Gleichung erneut mit der Bioche-Regel lösen.

Notes

Summary

11m 07s



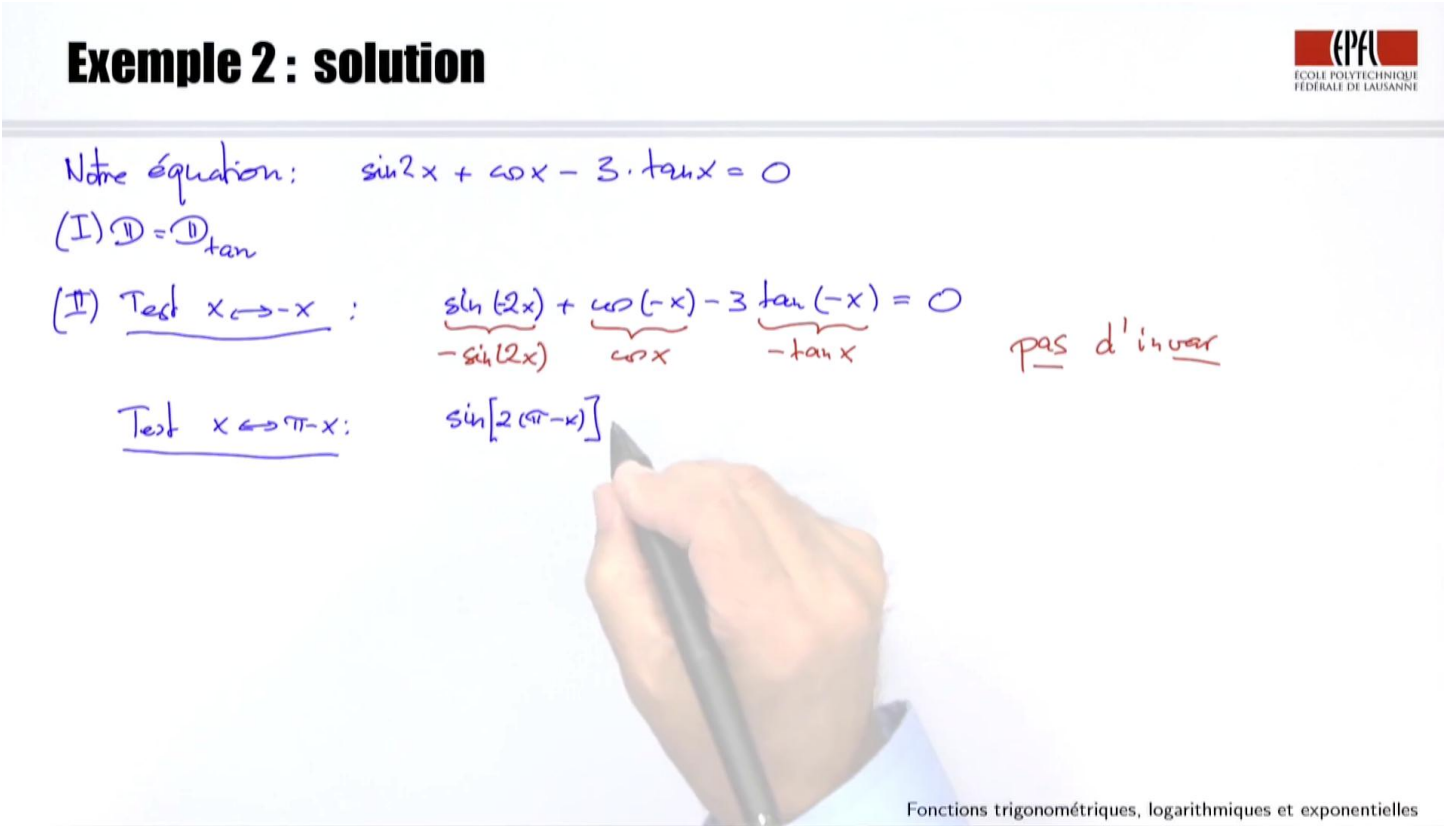
Nehmen wir unsere Gleichung. Sie ist gegeben durch *sin(2x) + cos(x) - 3.tan(x) = 0*. Wir beginnen uns zu fragen, für welchen Wert von *x* diese Gleichung, vor allem das linke Element, einen Sinn hat; wir sehen sofort, dass nur die *x* genommen werden müssen im Definitionsbereich von Tangens und dann macht das linke Element durchaus Sinn, und man kann entscheiden, ob für ein gegebenes *x* in diesem Bereich *Dtan*, ob ein Wert von *x* eine Lösung ist oder nicht, wenn man ihn in die Gleichung einbringt. Dann suchen wir diese Lösungen und führen die Tests weiter. Wir beginnen mit dem ersten Bioche-Test, der Test, er *x* durch *-x* ersetzt. Was wird das wohl ergeben? Ich nehme das erste Element, ich nehme Sinus und da ersetze ich *x* durch *-x*, also erhalte ich *sin(-2x)*. Dann habe ich *cos(x)*, das ich auch durch *-x* ersetze, minus 3 Mal Tangens, wo ich auch *x* durch *-x* ersetze, und ich stelle mir die Frage: Ist diese Gleichung, die ich gerade geschrieben habe, wo ich *x* durch *-x* ersetze, unveränderlich? Entspricht sie der Ausgangsgleichung, vom formalen Standpunkt her gesehen?

Notes

Summary

11m 40s

Exemple 2 : solution

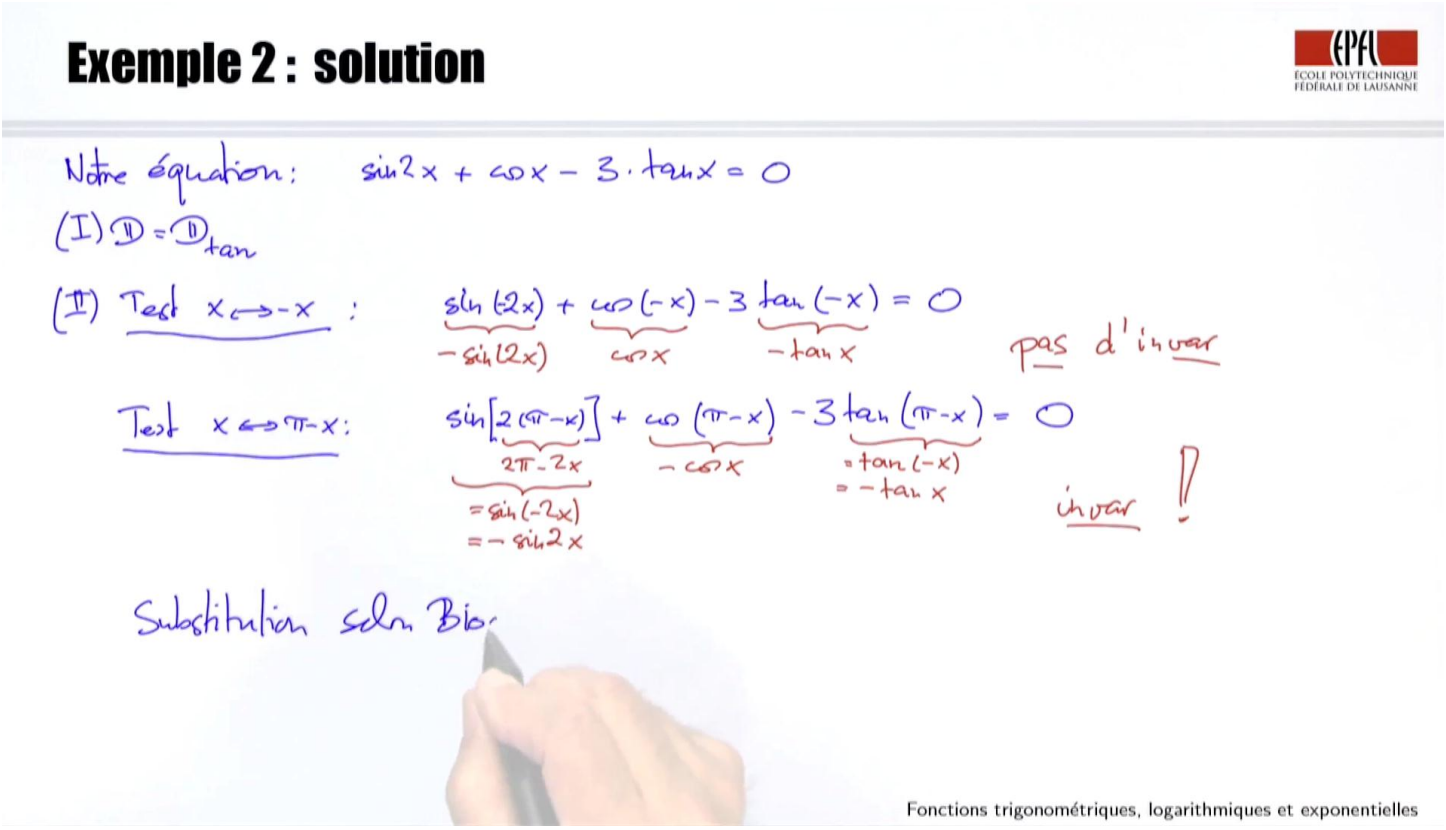


Man muss sich die Elemente einzeln ansehen: Wenn ich mir dieses Element hier anschaue, ist Sinus ungerade, und ich erhalte *-sin(2x)*, das heißt, dass das erste Element das Vorzeichen wechselt; beim zweiten Element hier jedoch ist Kosinus gerade: das zweite Element wechselt nicht das Vorzeichen, was bereits reichlich beunruhigend ist, wenn man sagen will, dass es keine Unveränderlichkeit gibt; das dritte Element wechselt wieder das Vorzeichen. Es ist also klar, dass man keine Unveränderlichkeit hat. Es gibt einen zweiten Test. Ich nutze die Tests in der Reihenfolge, in der ich sie vorgestellt habe bei meiner Presentation des Theorems, dieses Vorschlags der Bioche-Regeln. Beim zweiten Test sollte *x* durch *π - x* ersetzt werden. Ich werde dies formell tun: Ich nehme diesen Sinus, und den *sin(2x)*, diesmal werde ich ihn zwei Mal nehmen, und den *x* ersetze ich durch *π - x*. Plus *cos(x)* mit *x*, den ich durch *π - x* ersetze, minus *3.tan(x)*; Und das hier ersetze ich durch *π - x*, das Ganze ist gleich Null, und ich stelle mir dei Frage: Ist das eine unveränderliche Schreibweise im Vergleich zur Ausgangsgleichung?

Notes

Summary

13m 26s



Schauen wir uns die Elemente einzeln an, beginnen wir beim Element Kosinus: Wenn ich hier *x* durch*π* - *x* ersetze, wechselt Kosinus das Vorzeichen; ich erhalte also *-cos(x)*. Was ist mit Tangens? Ich kann dieses *π* ignorieren, also kann ich sagen, dass das *tan(-x)* ist, aber ich kann auch sagen, dass es *-tan(x)* ist, also ändert dieses Element da auch sein Vorzeichen. Für das erste Element, schauen Sie genau hin, wie der Winkel hier ist: eigentlich ist der Winkel *2π - 2x*, also kann ich dieses *2π* ignorieren, Sinus ist *2π* periodisch, es bleibt mir ein Sinus von *-2x* oder, wenn Sie mögen, ein *-sin(2x)*. In dieser Gleichung findet man die Ausgangsgleichung wieder, lediglich mit einem überall vorhandenen negativen Vorzeichen. Wir sprechen da also von Unveränderlichkeit, weil diese Gleichung in Wirklichkeit absolut der Ausgangsleichung entspricht, weil es ausreicht, die Gleichung mit *-1* zu multiplizieren, also handelt es sich hier um Unveränderlichkeit. Ich kann die Substitution gemäß Bioche nutzen. Ich nutze die gelben Kästen vom letzten Mal.

Notes

Summary

15m 02s

Exemple 2 : solution

Notre équation : $\sin 2x + \cos x - 3 \cdot \tan x = 0$

(I) ① = ①$_{\tan}$

(II) Test $x \mapsto -x$: $\underbrace{\sin(-2x)}_{-\sin(2x)} + \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} - 3\underbrace{\tan(-x)}_{-\tan x} = 0$ pas d'invar

Test $x \mapsto \pi - x$: $\sin\underbrace{[2(\pi - x)]}_{2\pi - 2x} + \underbrace{\cos(\pi - x)}_{-\cos x} - 3\underbrace{\tan(\pi - x)}_{= \tan(-x) = -\tan x} = 0$

$= \sin(-2x) = -\sin 2x$

invar !

Substitution selon Bioche : $z := \sin x$, $\cos x = 1 - z^2$

$\cos x = \sqrt{1 - z^2}$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

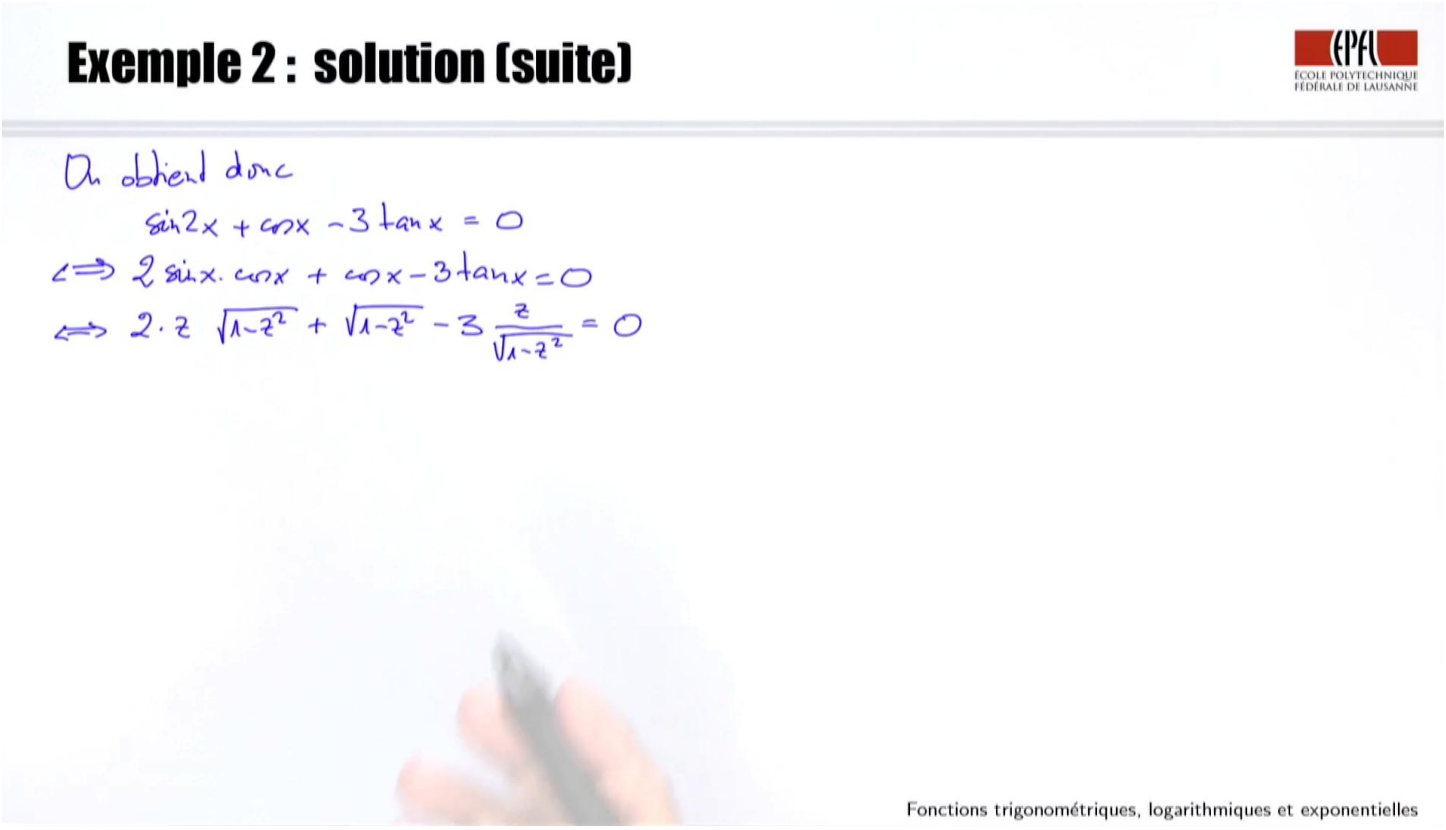
Die Substitution, die gemacht werden muss, ist *z* ist definiert als *sin(x)*, das heißt, dass überall, wo ich ein *sin(x)* habe, ich *z* schreiben werde; Dann ist *cos(x)* immer *1 - z²*. Hier sehe ich die Kästen nicht so sehr, und ich kann also Kosinus als *√1 - z²* nutzen, wir hatten über die Tatsache gesprochen, dass man hier nicht die beiden Fälle nehmen sollte, durch Symmetrie werden wir die Fälle wiederfinden, wo Kosinus negativ ist.

Notes

Summary

16m 49s

Exemple 2 : solution (suite)



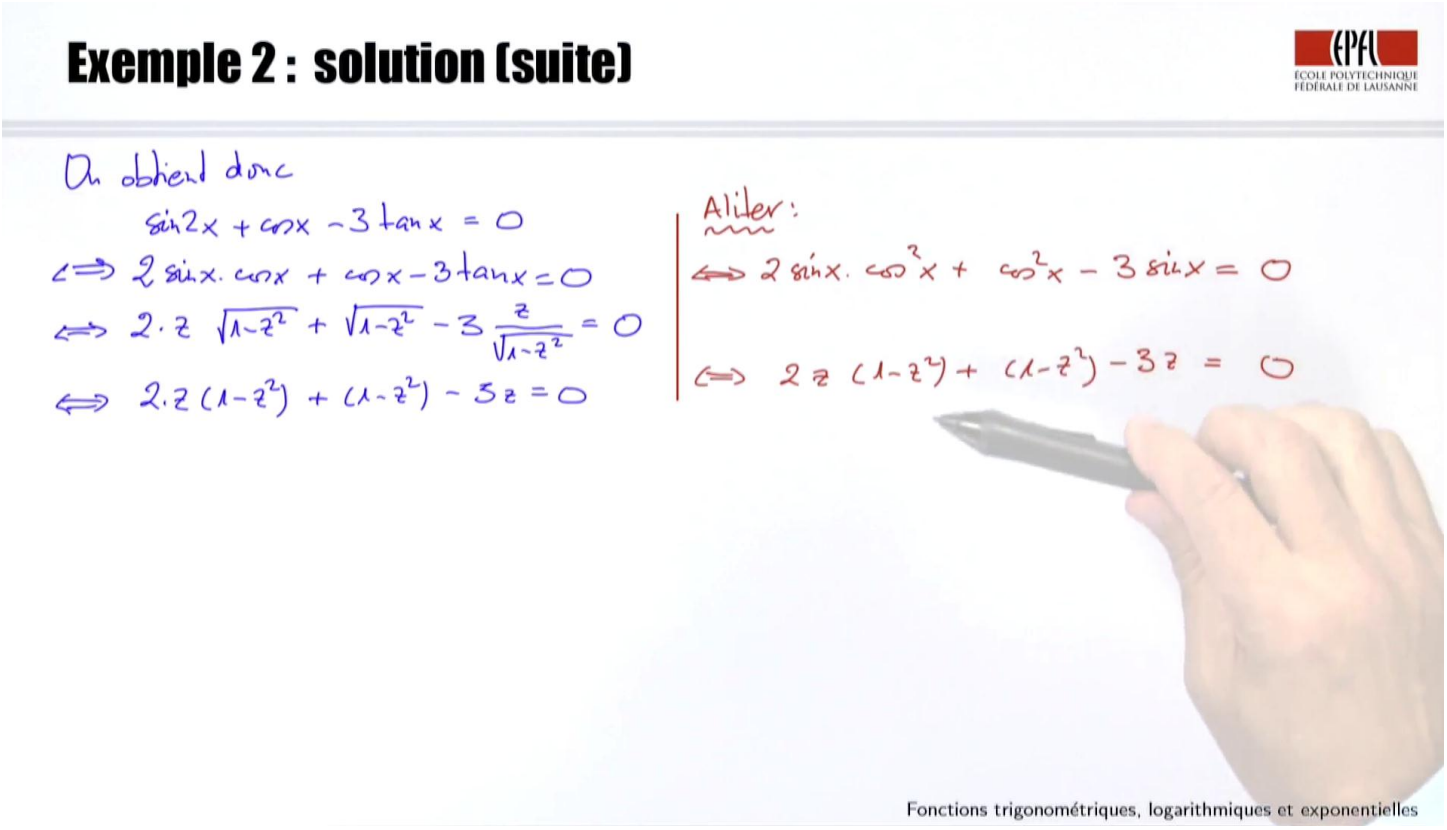
Wir haben die Ausgangsgleichung *sin(2x) + cos(x) - 3.tan(x) = 0*. Hier die Ausgangsgleichung und, um korrekt ersetzen zu können, habe ich ein Problem mit dem Element *sin(2x)*, welches dort nicht als Substitution ist, aber wir kennen trotzdem trigonometrische Formeln, Formeln mit doppeltem Winkel, ich ich also benutzen werde, und ich habe in Wirklichkeit hier ein *2 sin(x). cos(x) - 3.tan(x) = 0*. Das ist komplett equivalent. Und jetzt nutze ich die Substitutionen, von denen wir gerade gesprochen haben, das ist 2 Mal equivalent, wir haben gesagt, dass wir die Substitution *z* par *sin(x)* nutzen würden, also habe ich hier *z*; für Kosinus habe ich *√(1 - z²)*; das folgende Element, habe ich plus Kosinus, das ist *√(1 - z²)*; minus drei Mal und für Tangens haben wir noch nicht die Regel, aber das wird natürlich Sinus geteilt durch Kosinus sein, und ich nehme Sinus in den Zähler, wasz ist, und im Nenner nehme ich den Kosinus, der *√(1 - z²)* ist; gleich Null. Hier stelle ich alles unter den gleichen Nenner und ich löse nur den Zähler auf, das heißt, dass ich mit *√(1 - z²)* multiplizieren werde, was vollkommen legitim ist, da dieser Term nicht aufgelöst werden kann.

Notes

Summary

17m 20s

Exemple 2 : solution (suite)



z kann nicht gleich ±*1* sein, denn wenn *z* es wäre, wäre Tangens nicht definiert. Das stellt also kein Problem dar, und ich erhalte *2.z*, dann bleibt mir die Wurzel mal Wurzel, also lediglich *(1 - z²)*, plus Wurzel mal Wurzel, was *(1 - z²)* ergibt und auch hier *1 - 3.z = 0**. Es sei trotzdem angemerkt, dass man das anders angehen könnte: ich hätte sagen können, dass die Ausgangsgleichung, die zweite Linie, ein wenig anders hätte geschrieben werden können: Tangens ist *sin/cos*, Kosinus ist ungleich Null, wo ich nicht auf dem Existenzbereich dieser Gleichung bin, ich erhöhe durch *cos(x)*. Was bleibt ist *2.sin(x). cos²(x) + cos²(x) - 3.sin(x) = 0*. Dort erfolgt die Substitution sofort: wenn ich hier ersetze, erhalte ich *2.z*; für *cos²*, ist es Sinus *z*, *cos²* ist *1 - sin² x*, plus hier, *1 - sin²x*; und hier drei Mal Sinus. Wir finden genau die selbe Gleichung wieder. Der Grund, weshalb diese Bioche-Regel funktioniert, ist die Tatsache, dass die Beschränkung auf ein einziges Vorzeichen überhaupt keine Rolle spielt, man landet immer wieder auf seinen Füßen. Das ist weil der Kosinus...

Notes

Summary

19m 08s

Exemple 2 : solution (suite)

On obtient donc

$$\sin 2x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot z\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-z^2} - 3\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{2z^3 + z + z - 1}_{=: f(z)} = 0$$

Mais $\cdot f(0) = -1$, $f(1)$

Aliter :

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - 3\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$

da diese Gleichung diese Symmetrie hat, müsste Kosinus gerade auftauchen. Sie können diesen Teil komplett ignorieren, wo ich gesagt habe, dass ich das anders angehen würden, und wir haben hier eine Gleichung, die polynomisch sein wird: man erstellt die Produkte, und was bleibt ist *2.z^3 + z² + z - 1 = 0*. Wir kommen auf eine polynomische Gleichung dritten Grades. Ich werde Ihnen die Situation ein wenig erklären, diesen Term hier *f(z)* nennen, also habe ich eine Funktion, die von einer realen Zahl *z* abhängt, und ich analysieren ein wenig *f(z)*. Ich schreibe "aber"; was weiß ich? Ich kann zum Beispiel, sobald *f(z)* an der Stelle Null berechnet ist, wenn ich *z = 0* nehme, erhalte ich *-1*. Ich erinnere Sie daran, dass *z* nur zwischen *-1* und *1* variiert; die anderen Werte *z* interessieren mich nicht, also habe ich hier das Beste daraus gemacht. Ich kann zum Beispiel noch schauen, was am Rand passiert, auf dem größten Wert von *z*, der uns interessiert und *z = 1* ist. Wenn ich 1 nehme, erhalte ich hier *2*, *3*, *4 - 1*, was insgesamt 3 ergibt.

Notes

Summary

21m 00s

Exemple 2 : solution (suite)

On obtient donc

$$\sin 2x + \cos x - 3\tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + \cos x - 3\tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot z\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-z^2} - 3\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2z^3 + z^2 + z - 1}_{=: f(z)} = 0$$

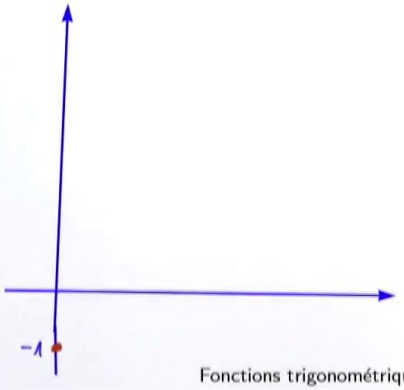
Mais
- $f(0) = -1$, $f(1) = 3$
- $f'(z) = \underbrace{6z^2 + 2z + 1}_{\Delta < 0}$

$\Rightarrow f'(z) > 0$ pour $z \in \mathbb{R}$

Aliter :

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - 3\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$



Wenn Sie einige Analyse- Lehrsätze kennen, sehen Sie, dass ich hier eine bekannte Funktion habe; bei Null ist sie negativ, bei 1 ist sie positiv, also gibt es mindestens ein z, wo *f(z)* sich auflösen wird. Man kann hier noch präziser sein, wenn Sie die Verschiebung nehmen: Mit der Verschiebung erhalten Sie $6.z^2 + 2.z + 1$. Wenn Sie diesen quadratischen Term analysieren, wenn Sie dessen Diskriminanten anschauen, wird dieser negativ sein, das heißt, dass diese Verschiebung niemals das Vorzeichen wechselt: Wenn Sie $z = 0$ nehmen, sieht man, dass die Verschiebung positiv ist, also kann ich sagen, dass die Verschiebung immer positiv ist für jeden Wert *z*. Ich habe eine strikt zunehmende Funktion Wenn man das Ganze in einem Graphen festhält: Ich nehme eine vertikale Achse, eine horizontale Achse dort, ich stelle mich an einen Punkt, für Null erhalte ich -1. Vielleicht verlängere ich noch ein wenig hierher nach unten. Für 0 erhalte ich -1. Und da bin ich auf Höhe von -1. Wenn ich an die Stelle 1 gehe, erhalte ich einen Wert von +3, und die Funktion *f(z)* ist monoton ansteigend, sie macht sicherlich so etwas wie das hier, und ich kann daraus schließen dass an dieser Stelle dort irgendwo genau ein Wert *z* existiert, sagen wir *Z1*, mit der Verschiebung, die an der Stelle *Z1* gleich Null ist.

Notes

Summary

22m 32s

Exemple 2 : solution (suite)

On obtient donc

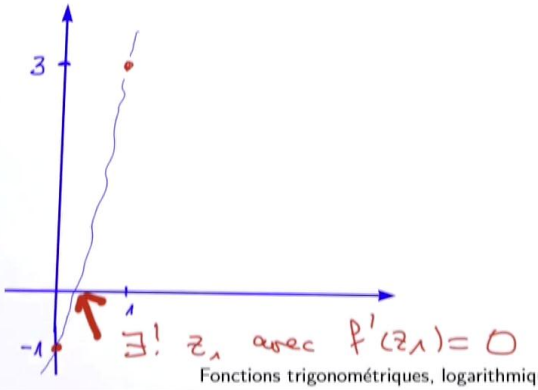
$$\sin 2x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + \cos x - 3\tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot z\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-z^2} - 3\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{2z^3 + z^2 + z - 1}_{=:f(z)} = 0$$

Mais
- $f(0) = -1$, $f(1) = 3$
- $f'(z) = \underbrace{6z^2 + 2z + 1}_{\Delta < 0}$

$\Rightarrow f'(z) > 0$ pour $z \in \mathbb{R}$

Aliter :

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - 3\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2z(1-z^2) + (1-z^2) - 3z = 0$$



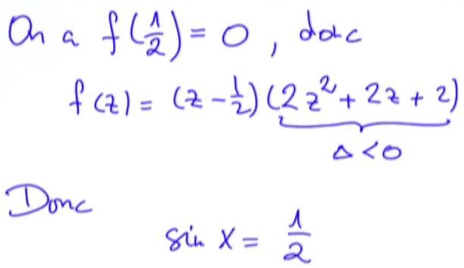
Im Allgemeinen bräuchte es zur Beendigung den Start einer numerischen Methode, die es erlaubt, diesen Wert zwischen 0 und 1 zu finden; wir haben schon eine Menge Informationen, aber hier läuft das Beispiel vielleicht ein wenig besser, als man sich das hätte denken können.

Notes

Summary

25m 09s

Exemple 2 : solution (suite et fin)



Man kann natürlich immer bemerkenswerte Werte ausprobieren. Ein bemerkenswerter Wert ist der Wert *1/2*, und in der Tat, wenn Sie *1/2* einführen, erhalten Sie Null. Da kann man sich letztendlich diese Lösung der Gleichung *f(z) = 0* denken. Bitte bemerken Sie, dass wenn Sie nicht die komplette Analyse dieser Funktion *f(z)* machen, sondern wenn Sie nur diese Lösung für die Gleichung *z = 1/2* finden, können Sie in diesem Fall das Polynom durch *z - 1/2* teilen, und dann erhalten Sie einen Quotienten, der sich wie $2.z^2 + 2.\ z + 2$ schreibt, und das quadratische Element hier, wird immer eine negative Diskriminante haben, das heißt, dass man herausfindet, dass man eine exakte Lösung hat. Ich kann also zusammenfassen, dass *sin(x)* durch *1/2* gegeben ist; es ist dieser Wert, *1/2*, der *f(z)* aufhebt. Ich nehme alle möglichen Lösungen für *x* mit *x* ist gegeben durch: Eine erste Möglichkeit wäre *arcsin(1/2) modulo 2π*.

Notes

Summary

25m 29s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

On a $f(\frac{1}{2}) = 0$, donc

$f(z) = (z - \frac{1}{2})(2z^2 + 2z + 2)$

$\Delta < 0$

Donc

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{2} + k2\pi = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \pi - \arcsin\frac{1}{2} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Sinus nimmt den Wert von *1/2* für *π/6* an; Also habe ich hier *π/6 + k.2π*, und die andere Möglichkeit durch Symmetrie für Sinus wäre, *π - arcsinus* zu nehmen: Ich habe hier *π - arcsin(1/2) + k.2π*, das heißt, das ich diesmal *π - π/6*, also *5π/6 + k.2π* habe, in beiden Fällen *(k ∈ ℤ)*, und das löst mein Problem, da ich dort alle Lösungen meiner rationalen trigonometrischen Gleichung habe.

Notes

Summary

26m 55s

Exemple 3

Exemple

Résoudre l'équation

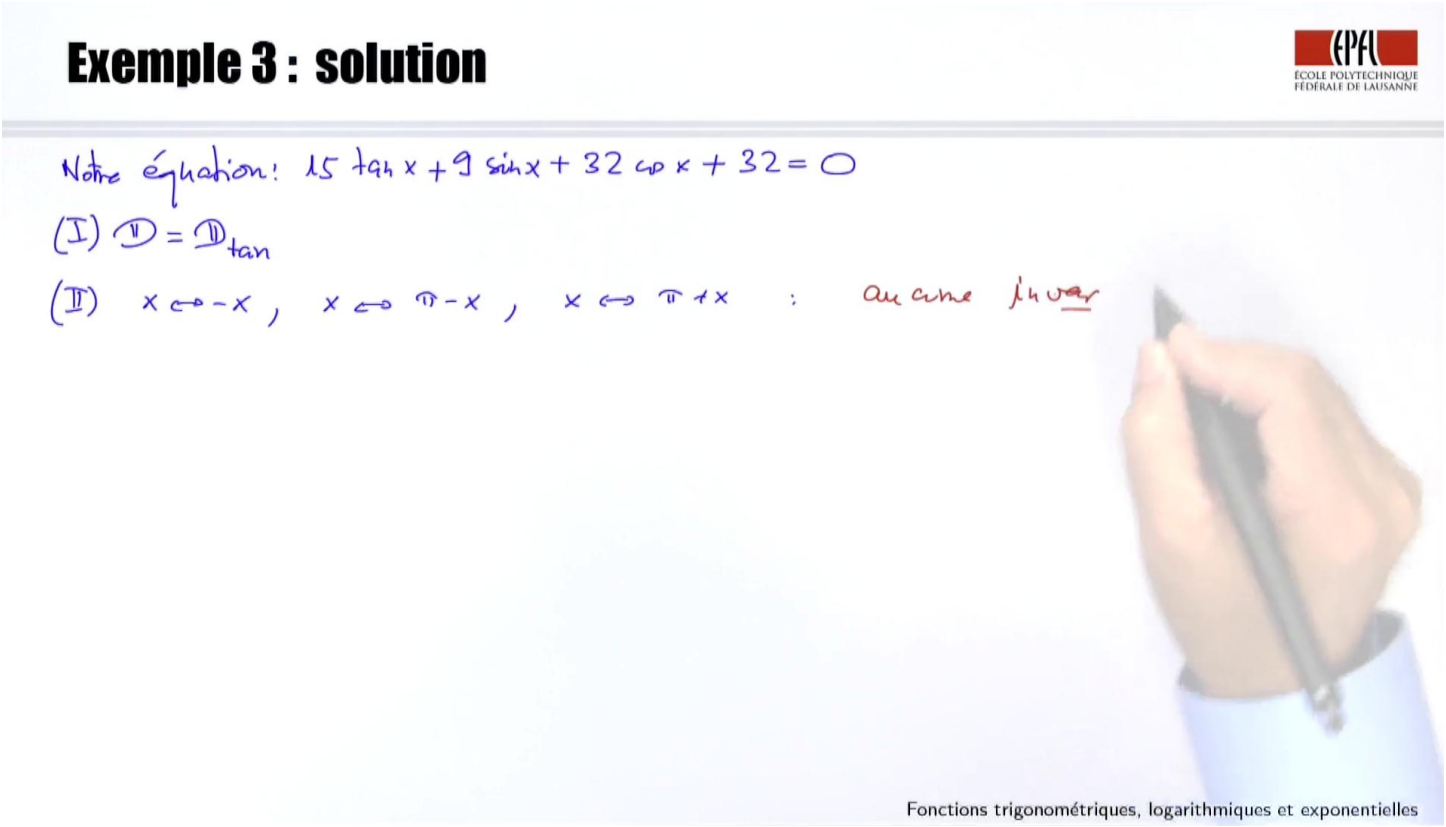
$$15 \tan x + 9 \sin x + 32 \cos x + 32 = 0 .$$

Gehen wir zu einem dritten Beispiel über. Die Gleichung, die ich berücksichtigen werde, ist durch *15.tan(x)* gegeben, eigentlich ein Quotient, *sin/cos + 9. sin(x) + 32.cos(x) + 32 = 0.*

Notes

Summary

27m 40s



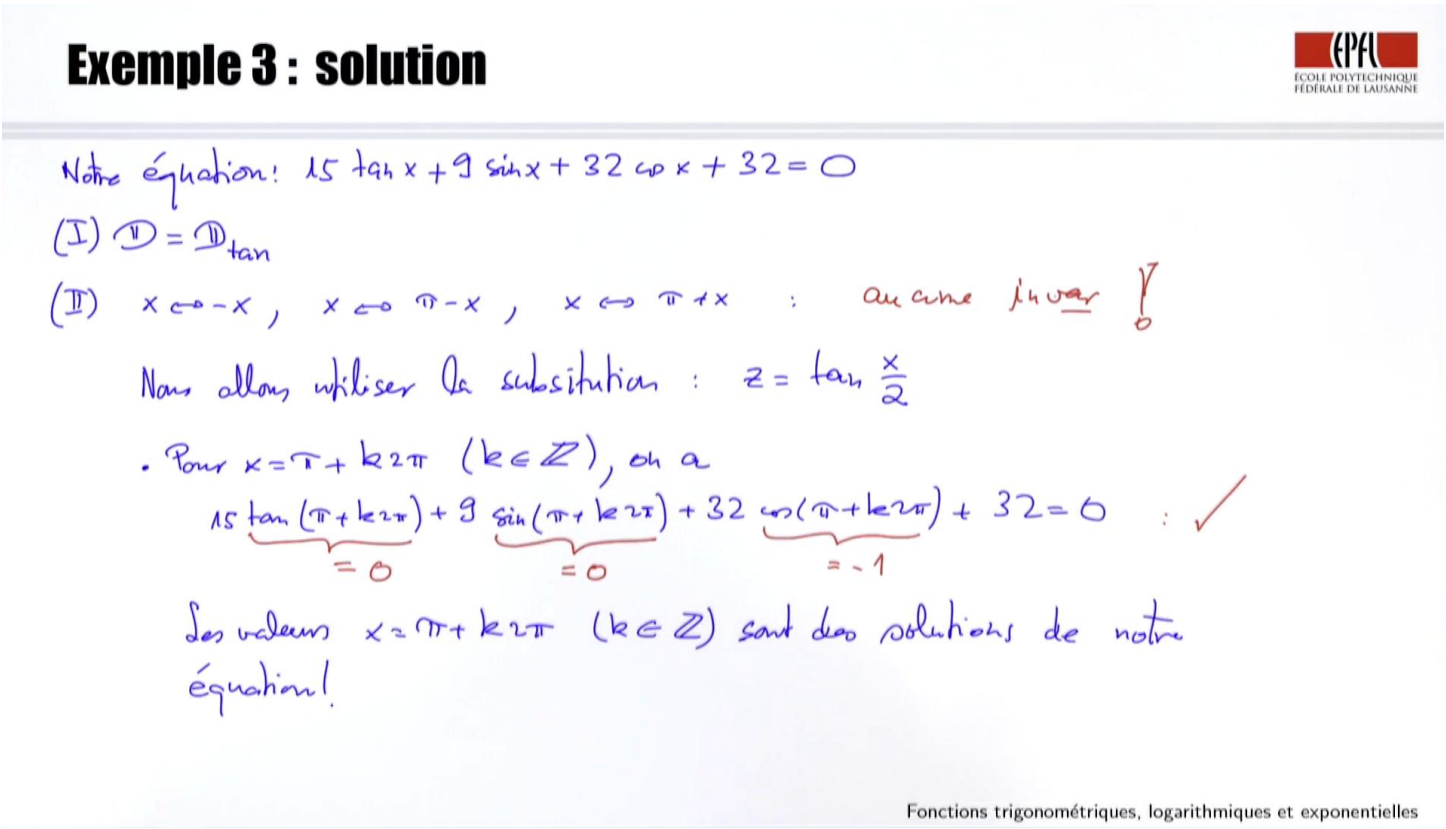
Unsere Gleichung lautet also *15.tan(x) + 9.sin(x) + 32.cos(x) + 32 = 0* Der Bereich dieser Gleichung - das einzige Problem ist, dass ich *tan(x)* habe, also muss man ein *x*, wo sich Kosinus aufhebt, vermeiden - ich werde mich also auf den Definitionsbereich von Tangens beschränken. Anschließend wende ich die Bioche-Regeln an. Sie können die Unveränderlichkeit im Vergleich zu diesen Regeln prüfen, sie werden niemals funktionieren: Schauen Sie, wenn zum Beispiel nur Sinus das Vorzeichen ändert, haben Sie ein Problem an diesen zwei Elementen, und wenn Kosinuns sich verändert, an diesen beiden Elementen. Aber auch wenn Sie die dritte Substitution nehmen, wo Sinus und Kosinus sich verändern, dann ändern diese beiden Elemente hier das Vorzeichen, aber nicht die 32 und auch nicht *15.tan(x)*. Also sind Sie immer in der Falle; diese Gleichung hat überhaupt keine Unveränderlichkeiten: *x* ersetzt durch *-x*, *x* ersetzt durch *π - x* und *x* ersetzt durch *π + x*, da habe ich in keinem der drei Fälle eine Unveränderlichkeit. Man kann das wieder schnell erkennen, indem man einfach die Vorzeichen analysiert, wie ich es gerade getan haben.

Notes

Summary

27m 56s

Exemple 3 : solution

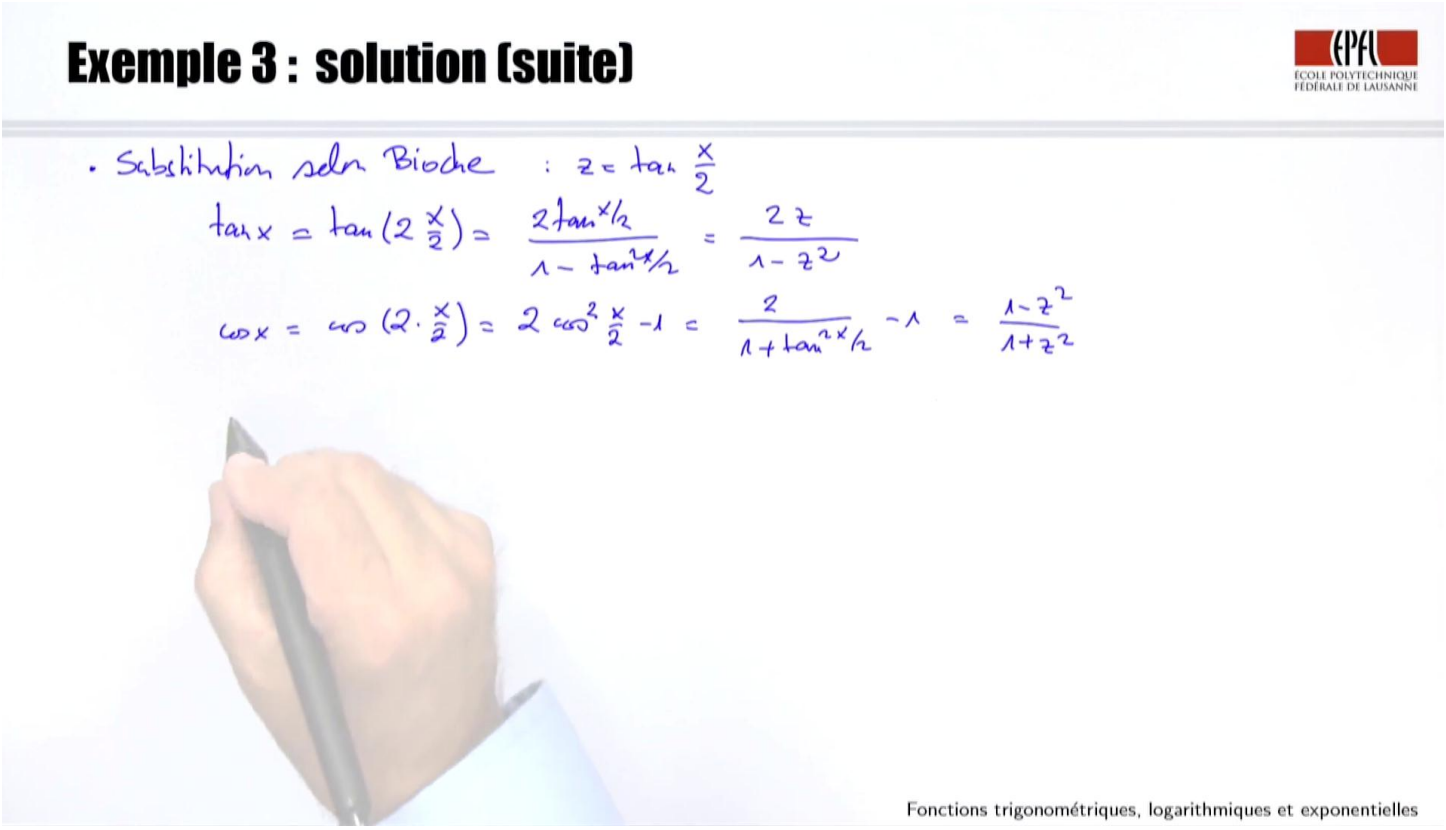


Es bleibt also die Substitution, die man als universell qualifiziert: gemäß Bioche, werden wir die Substitution *z = tan(x/2)* verwenden. Zuerst muss geprüft werden, dass sich die *x* nicht im Definitionsbereich dieser Transformation befinden, das heißt, dass *tan(x/2)* nicht definiert ist. Für diese Werte, für *x* ist gleich sind die Werte, wo *tan(x/2)* nicht definiert ist, *π + k.2π*avec (*k* ∈ ℤ), und diese Werte werden wir einfach in die Gleichung einfügen und schauen, was passiert. Wir fügen sie vor allem links ein, ich habe dann also *15.tan(π + k.2π) + 9.sin(π + k.2π) + 32.cos(π + k.2π) + 32 = 0*. Für Tangens spielt *k.2π* überhaupt keine Rolle, es ist nur *tan(π)* und *tan(π)* ist Null. Sinus ist *2π* periodisch, *k.2π* spielt überhaupt keine Rolle, also habe ich nur *sin(π)*, und *sin(π)* ist Null. Kosinus ist *2π* periodisch, also spielt *k.2π* überhaupt keine Rolle. Ich habe lediglich *cos(π)*, der -1 wert ist; insgesamt bleibt *-32 + 32 = 0*, also das ist geprüft, und ich kann daraus schließen, dass die Werte *x = π + k.2π* et (*k* ∈ ℤ) Lösungen sind, und wir werden sie beibehalten.

Notes

Summary

29m 38s



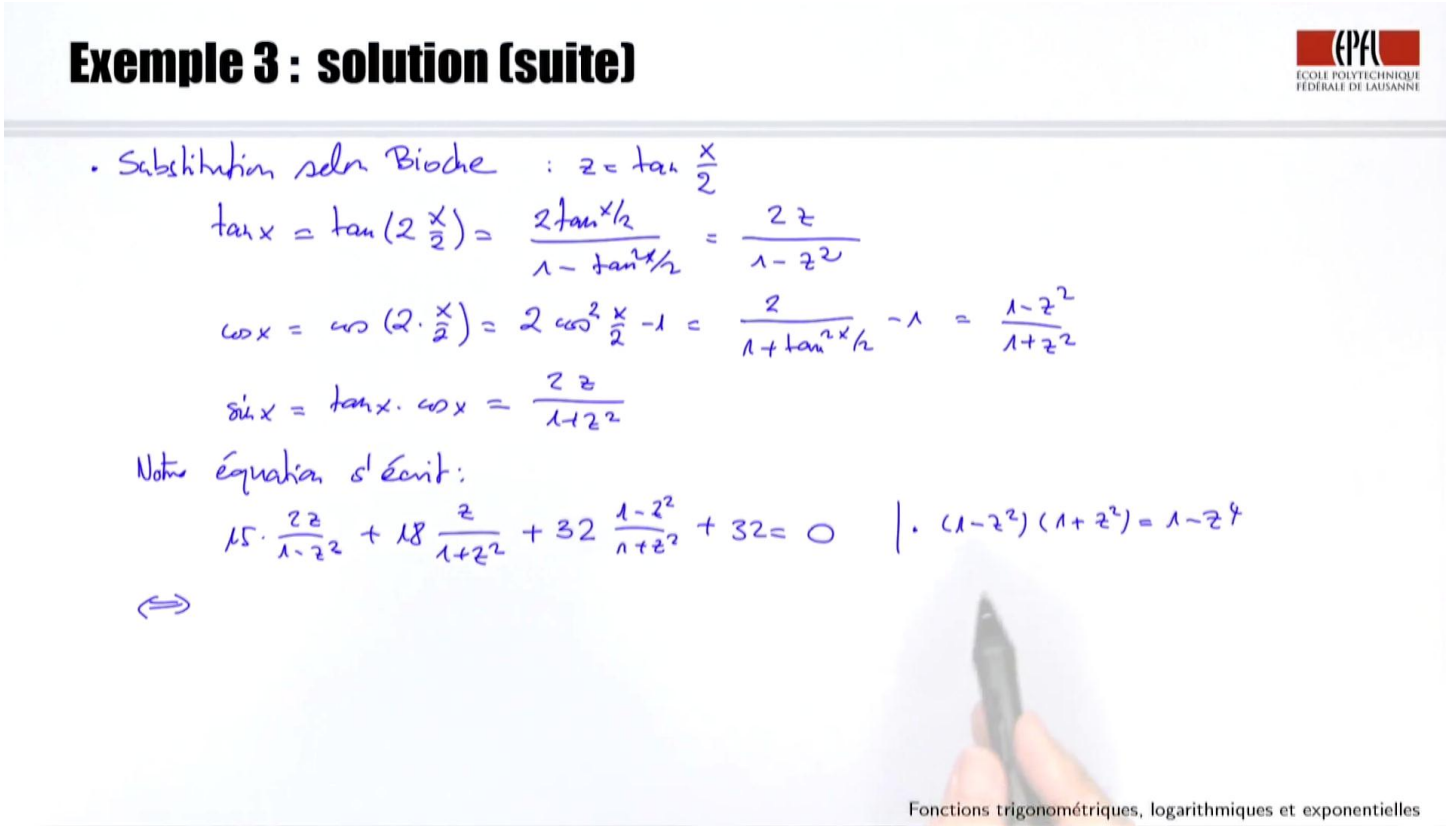
Dann, im zweiten Schritt, führen wir die Substitution gemäß Bioche durch: Die Substitution gemäß Bioche ist *z = tan(x/2)*, es müssen also die Werte von Tangens, Kosinus und Sinus berechnet werden. Man kann sie recht einfach finden. Also sagen wir einfach, dass *tan(x) tan(2.x/2)* ist, und wir nutzen die Formeln für doppelten Winkel. Im vorliegenden Fall ergibt das *2.tan(x/2) / [1 - tan²(x/2)]*, was *2.z/(1 - z²)* wird. Für Kosinus argumentieren Sie in der gleichen Art und Weise, und Sie sagen, dass *cos(2.x/2)* der Winkel ist; man nimmt die Variante mit *cos²*, das, darauf weise ich Sie hin, da wir eine gute Verbindung haben zwischen Kosinus und Tangens, woraus *2.cos²(x/2) - 1* wird, und da kann ich *cos²* durch *1 / [1 + tan²(x/2)]* ersetzen, und da ersetzen wir *tan²(x/2)* durch *z*, und wenn Sie alle diese Produkte ausführen, indem Sie das Ganze unter den gleichen Nennen stellen, und einige elementare Vereinfachungen, werden Sie diese Formel für Kosinus finden. Für Sinus, ich erinnere Sie daran, muss man über Tangens gehen, man muss sagen, dass es *tan(x)*.

Notes

Summary

31m 52s

Exemple 3 : solution (suite)



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

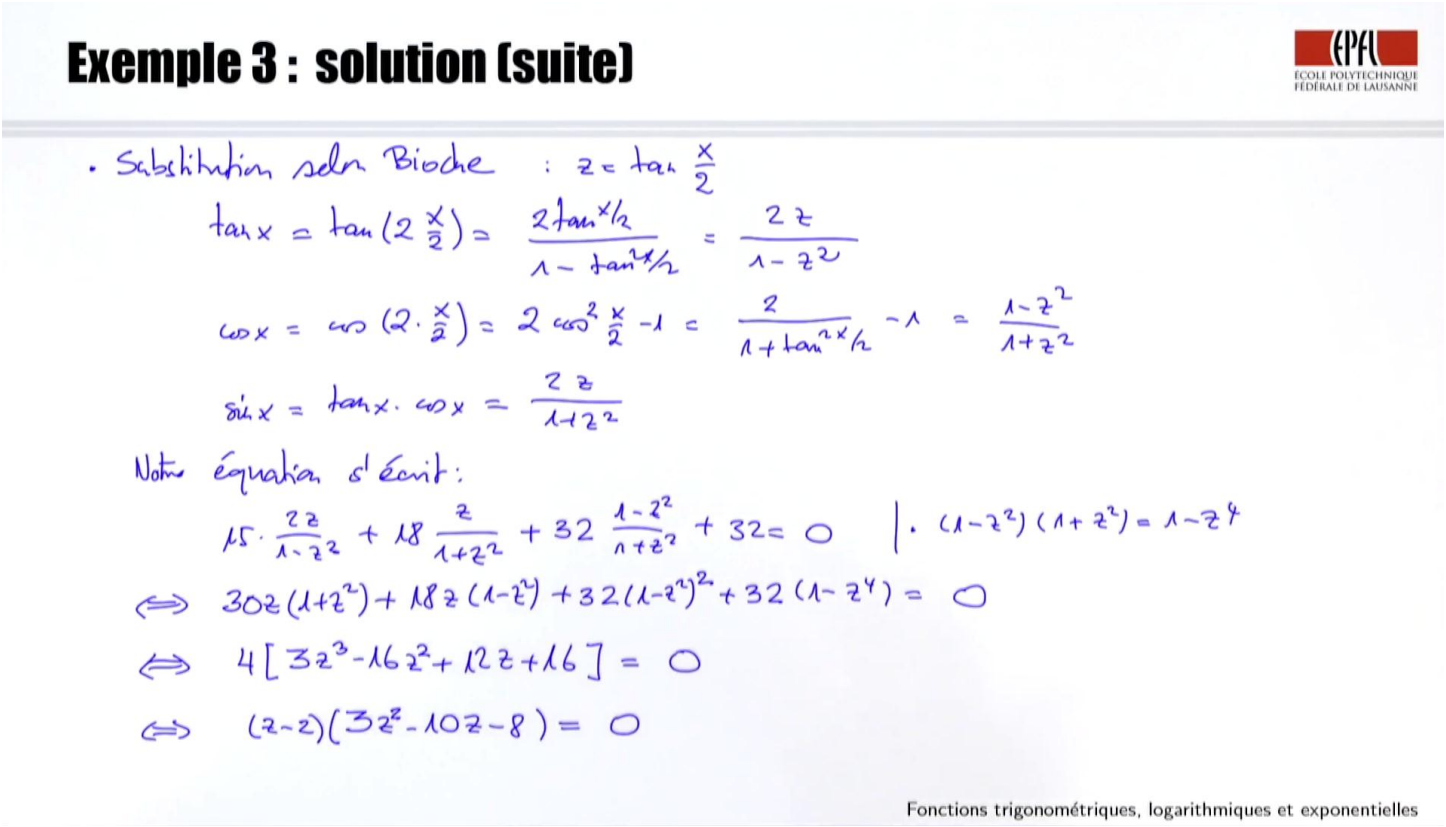
cos(x) ist und diese beiden Linien multiplizieren, *1 - z²* wird sich vereinfachen und wird zu *(2.z) / (1 + z²)*. Wenn ich das tue, kann ich meine Gleichung neu schreiben. Also schreibt sich unsere Gleichung: Ich habe 15 Mal, das erste Element war Tangens, *(2.z) / (1 - z²)*, Dann habe ich achtzehn mal Sinus, also neun mal Sinus, woraus resultiert *18.z / (1 + z²)* und ich habe zweiunddreißig mal Kosinus, und ich ersetze, plus zweiunddreißig, gleich Null. Hier transformieren wir in gleicher Art und Weise hier ist es klar, dass ich mit dem gemeinsamen Nenner multiplizieren kann, der eigentlich das Produkt ist von *(1 - z²). (1 + z²)*, *also 1 - z^4* und da kann ich mit diesem Nenner multiplizieren, der ungleich Null ist, sonst bin ich nicht im Definitionsbereich. Merken Sie sich, dass wenn sich *1 - z²* auflöst, sind wir genau außerhalb des Existenzbereichs der Gleichung. Wenn ich diese Erhöhung durchführe, bleibt mir *30.z*, was *1 + z²* multipliziert; mir bleibt *18.z*, das *1 - z²* multipliziert; mir bleiben 32, die *1 - z²* multiplizieren, und diese Differenz noch zum Quadrat erhöht und dahinter bleiben 32 mal der gemeinsame Nenner, also *1 - z^4*; gleich Null.

Notes

Summary

33m 38s

Exemple 3 : solution (suite)



Wir errechnend diese Produkte; ich lasse Sie das tun und geben Ihnen hier die Antwort: ich erhalte *4. [3.z^3 - 16.z² + 12.z + 1] = 0*. Man muss lediglich diese eckige Klammer auflösen. Wir fallen dann auf eine Gleichung, die hier dritten Grades ist. Man kann immer versuchen, Lösungen durch raten zu finden - beachten sie, dass hier *z = tan(x/2)*, also kann *z* diesmal alle Werte zwischen -∞ und +∞ annehmen. Wir befinden uns in der Situation des vorherigen Beispiels, wo *z* Kosinus zwischen -1 und 1 war. Hier sind es alle Werte von *z*, und man kann versuchen - ich versuche immer, eine offensichtliche Lösung zu finden, indem ich mehr oder weniger die Teiler dieser Konstante nehme, also die Teiler von 16, *±1*, *±2*, *±4*, etc. Wenn Sie das hier machen, finden Sie heraus, dass *z = 2* tatsächlich Null ergibt in der eckigen Klammer, eckigen Klammer, die ich wie einen Faktor, ein Produkt schreiben kann. Hier kann ich *z - 2* hervorheben, was der Lösung *z = 2* entspricht, und nach der Division, ist das, was bleibt, *3.z² - 10.z - 8 = 0*. Die anderen Lösungen dieser Gleichung sind von den Nullen der quadratischen Gleichung aus gegeben: *3.z² - 10.z - 8*, und das ist eine quadratische Gleichung, dessen Diskriminante positiv ist, also findet man hier insgesamt schlussendlich 3 Lösungen.

Notes

Summary

36m 01s

Exemple 3 : solution (suite)

Donc $z_1 = 2$, $z_{2,3} = \frac{5 \pm 7}{3} = \begin{cases} 4 \\ -2/3 \end{cases}$

Cela nous donne

(i) $z_1 = 2$: $\tan \frac{x}{2} = 2$ c.à.d. $x = 2 \cdot \arctan 2 + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(ii) $z_1 = 4$: $\tan \frac{x}{2} = 4$ c.à.d. $x = 2 \arctan 4 + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(iii) $z_1 = -\frac{2}{3}$: $x = 2 \arctan(-2/3) + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Die erste Lösung war die offensichtliche Lösung: *Z1 = 2*, und für die beiden anderen, *Z2* et *Z3*, werden wir diese quadratische Gleichung auflösen, und das gibt *(5 ± 7)/3*, das heißt, dass wir einmal das + haben: *(5 + 7)/3 = 4*, und beim zweiten Mal haben wir *(5 - 7)/3 = -2/3*. Jeder einzelne dieser Werte ist ein zulässiger Wert. Das gibt uns mehrere Lösungen. Zuerst nehmen wir *Z1 = 2* und wir sagen also, dass *tan(x/2) = 2*. Da finde ich *x/2*; da *arctan(2) modulo π*, und *x* das Doppelte sein wird, habe ich dann *2.arctan(2)*, und anstelle von *+k π* - ich hatte für *x/2.k π* - wird das mal zwei auf das *k.π* wirken, und ich erhalte *k.2π*, mit (*k* ∈ ℤ). Ich verfahre genau gleich mit *Z1 = 4*: Ich habe *tan(x/2) = 4* und kann somit schreiben, dass *x/2* gegeben ist durch *arctan(4) + k.π*, das hier ist *x/2* und ich multipliziere mit zwei, ich erhalte für *x = 2.arctan(4) + k.2π* mit *k* ein Ganzes. Letztendlich verfährt man für die dritte Möglichkeit *Z1 = -2/3* genau gleich: Was Sie hier finden, ist einfach *2.arctan(-2/3) + k.2π*.

Notes

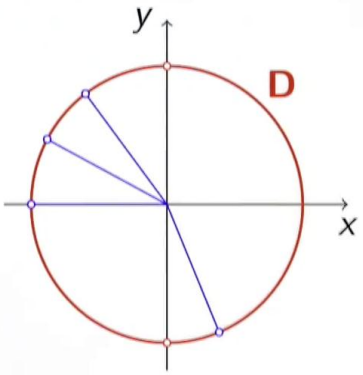
Summary

38m 03s

Exemple 3 : solution (suite et fin)

L'ensemble solution

$$S = \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup$$
$$\cup \{2\arctan 2 + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup$$
$$\cup \{2\arctan 4 + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup$$
$$\cup \{-2 \cdot \arctan \tfrac{2}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

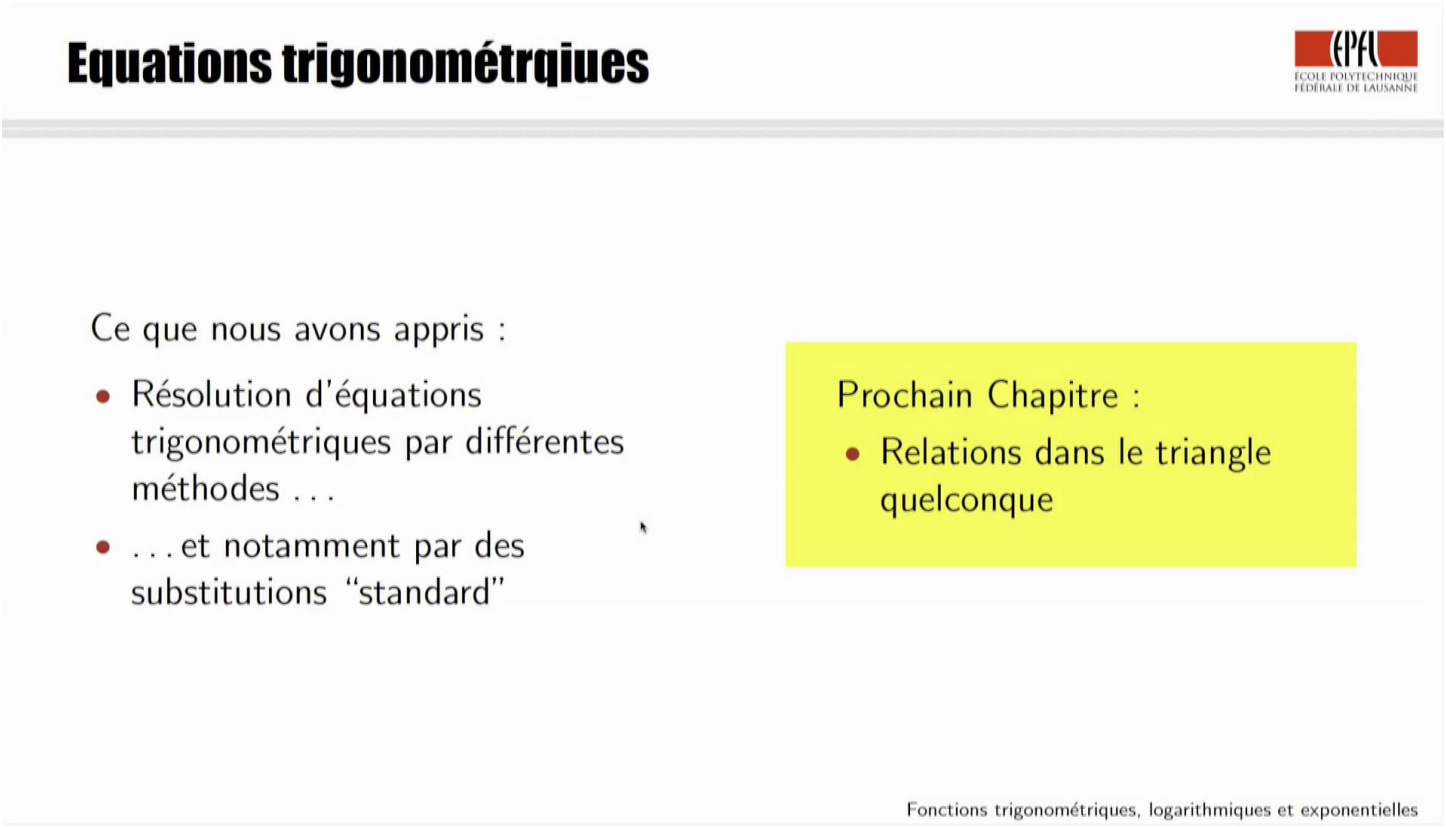


Insgesamt kann ich die gleiche Lösung schreiben. Ich nenne sie $. $ ist zuerst gegeben durch $\pi + k.2\pi$. Das hier waren die Werte, die nicht transformiert waren durch die Substitution von *tan(x/2)*. Wir haben dies mit einer Einführung in die Gleichung geprüft, und das hatte für alle ($k \in \mathbb{Z}$) funktioniert. Ich habe sie hier entdeckt, also sind die Lösungen da, auf dem trigonometrischen Kreis, an der Stelle π *modulo* 2π, wir sind noch immer hier. Die zweite Möglichkeit, die wir gefunden haben, war $2.arctan(2) + k.2\pi$ mit $(k \in \mathbb{Z})$; die dritte Möglichkeit war $2.arctan(4) + k.2\pi$ mit ($k \in \mathbb{Z}$), und die letzte Möglichkeit war $2.arctan(-2/3)$. Da -arctan ungerade ist, kann ich $-2.arctan(2/3) + k.2\pi$ für ($k \in \mathbb{Z}$) schreiben. Wir haben hier die anderen drei Lösungsklassen entdeckt. Auch hier sind die Werte in rot diejenigen, für die die Gleichung keinen Sinn macht. Wir können daraus schließen, dass das die Lösung ist, da es die Gesamtheit aller x ist, die unsere Gleichung prüfen.

Notes

Summary

40m 32s



Das führt mich zum Ende dieses Kapitels mit dem Titel trigonometrische Gleichungen. Wir haben trotz allem zwei sehr wichtige Abschnitte gemacht, da wir im ersten Abschnitt trigonometrische Lösungen mit unterschiedlichen Methoden gelöst haben, es gab die sogenannten "einfachen" Gleichungen, mit Sinus *x* eine Konstante, wo Sinus gleich Sinus war, wir hatten Gleichungen vom Typ Sinus = Kosinus, wir hatten Gleichungen, die um harmonische Schwankungen herum waren, das war die erste Sequenz dieses Kapitels, anschließend haben wir Standard-Substitutionen benutzt, die von der Bioche-Regel gegeben waren, um uns mit rationalen trigonometrischen Gleichungen zu beschäftigen, die schwieriger waren. Im kommenden Kapitel kommen wir auf Relationen in einem beliebigen Dreieck zurück. Wir hatten bereits über Relationen in einem rechtwinkligen Dreieck gesprochen und gezeigt, wie man die fehlenden Elemente ab bestimmten Daten errechnen kann. Diesmal erörtern wir das beliebige rechteckige Dreieck.

Notes

Summary

42m 16s

Les oscillations harmoniques

Un grand merci d'avoir suivi ce cinquième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Ich danke Ihnen. Wir beenden heute ein relativ schwieriges Kapitel, schwer an Berechnungen und welches, wie ich denke, Ihnen sehr viel Energie abverlangt, sehr viel Disziplin, sehr viel Ausdauer und vielleicht auch, dass man glaubt, dass man es kann, auf jeden Fall wünsche ich Ihnen das. Ich danke ebenfalls meinen Mitarbeitern: Guido Burmeister, Roger Sauser und Olivier Woringer. Ich danke euch für die tägliche Unterstützung, Woche für Woche, um diese Sequenzen zu realisieren. Bis zum nächsten Mal!

Notes

Summary

43m 16s