ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Relations dans les triangles

7.1 Théorème du cosinus

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Search MOOC

Video

EPFL

Introduction

Les fonctions trigonométriques donnent des relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle.

Quelles sont alors les relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque ?

Bonjour. Je vous souhaite la bienvenue à mon cours "fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles". Aujourd'hui nous entamons le chapitre sept, un chapitre qui est dédié aux relations dans le triangle ou à ce que l'on appelle aussi la résolution de triangles. Nous avons déjà vu que les fonctions trigonométriques, le sinus, le cosinus, tangente et cotangente, donnent des relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle. Aujourd'hui, et les prochaines fois, nous nous intéresserons de nouveau aux relations entre côtés et angles, mais cette fois-ci dans un triangle quelconque, donc pas forcément rectangle.

Notes

Summary

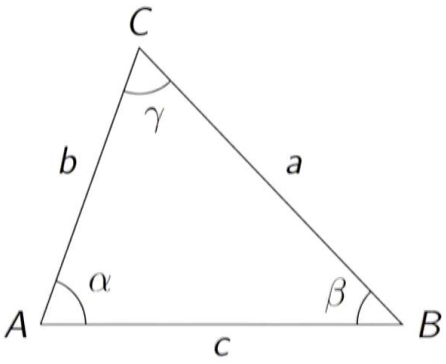
0m 04s

Notations standard dans un triangle

Trois points non alignés A, B et C définissent un triangle : ce sont ses sommets.

Le côté opposé à A est noté a, tout comme sa longueur.
De même pour les côtés b et c, associés aux sommets B et C.

L'angle intérieur en A est noté α, tout comme sa mesure.
De même pour les angles β et γ, associés aux sommets B et C.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pour formuler les résultats sous une forme compacte, agréable à retenir, nous allons introduire ce que l'on appelle des notations standard dans un triangle. Vous retrouvez ces notations ici, dans cette figure. Un triangle est donné par trois sommets : on va les appeler A, B et C. Ensuite nous avons les trois côtés. Nous allons dénommer "a" celui qui est opposé au sommet A, "b" celui qui est opposé à B, et "c" et celui qui est opposé à C. Quant aux angles intérieurs du triangle, ceux que l'on utilise usuellement, on va les dénommer de la façon suivante : l'angle dont le sommet est au point A va être α; l'angle au point B, β; et l'angle au sommet C, γ (gamma). On retrouve donc toujours 3 fois une même lettre, si l'on veut. On a ici le sommet A avec l'angle α et le côté opposé a; ici, le B avec l'angle β et le côté opposé b, etc.

Notes

Summary

0m 47s

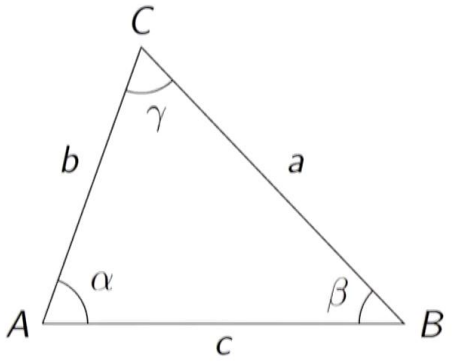
Relation d'ordre dans un triangle

Pour un triangle ABC quelconque,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi\,.$$

De plus, α, β et γ ont la même relation d'ordre que les côtés opposés respectifs :

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad a \geq b \geq c\,.$$



Nous aurons besoin de quelques relations, je dirais, basiques, bien connues, dans un triangle quelconque. La première de ces relations est très bien connue : si je fais la somme des angles j'obtiens π ou 180° si nous calculons les angles en degrés, ce qui est usuel. Le deuxième résultat est parfois moins connu mais il est tout à fait standard. Il dit qu'on a la même relation d'ordre entre les angles α, β, γ et les côtés a, b, c. C'est-à-dire que si α est le plus grand et γ le plus petit des angles, a va être le plus grand, et c le plus petit des côtés. Ce fait, on peut essayer de le voir dans un triangle quelconque. On peut se demander, quel est l'angle le plus grand ? Est-il est opposé au côté le plus grand ? Ici le côté le plus long semble être a et l'angle le plus grand α, par exemple. J'aimerais motiver un peu cette relation d'ordre.

Notes

Summary

1m 59s

Relation d'ordre dans un triangle

Il suffit de le montrer pour deux côtés :

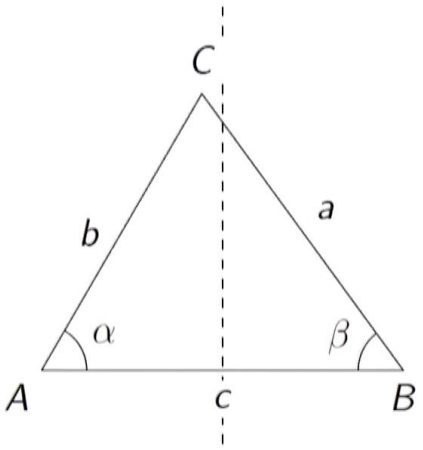
$$\alpha \geq \beta \iff a \geq b\,.$$

Fixons le côté c et traçons sa médiatrice.

Si le sommet C se trouve sur la médiatrice, $a = b$ et $\alpha = \beta$.

Si C se déplace vers la gauche,

- α augmente et β diminue : $\alpha > \beta$
- a reste plus grand que b : $a > b$.



REPLAY

Il suffit de justifier cette relation pour deux angles et deux côtés. Il suffit de montrer que si α≥β alors a≥b, parce que si on a fait cela, on peut itérer : si β est plus grand que γ, on peut dire que b est plus grand que c, puis en réunissant le tout on obtient bien la bonne relation entre les 3 côtés. Essayons de motiver ces relations, on va simplement montrer que si α≥β, a≥b. Ici, nous fixons le côté c. Nous prenons la médiatrice, ici en pointillés, et nous plaçons le sommet C sur la médiatrice. On retrouve alors un triangle isocèle, c'est-à-dire que les côtés a et b ont la même longueur, et les angles α et β sont égaux également, donc on a : a=b et α=β. Nous allons à présent procéder comme suit. Nous allons déplacer le point C vers la gauche. Qu'est-ce qui arrive si je déplace le point C sur la gauche ? L'angle α correspondant va augmenter et a restera plus grand que b. Si bien qu'on aura α>β et a>b. Regardons cela si je fais bouger ce point C sur la gauche.

Notes

Summary

3m 08s

Relation d'ordre dans un triangle

Il suffit de le montrer pour deux côtés :

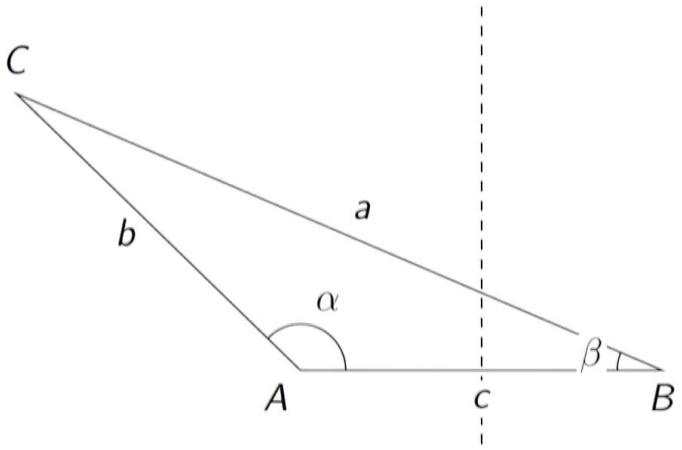
$$\alpha \geq \beta \iff a \geq b\,.$$

Fixons le côté c et traçons sa médiatrice.

Si le sommet C se trouve sur la médiatrice, $a = b$ et $\alpha = \beta$.

Si C se déplace vers la gauche,

- α augmente et β diminue : $\alpha > \beta$
- a reste plus grand que b : $a > b$.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Voilà, là on le voit très bien : l'angle α devient de plus en plus grand, et la longueur a reste strictement plus grande que b. On a donc bien montré que si α > β, a > b. C'est une relation que nous allons utiliser très fréquemment. Fixons encore une autre notation qui va être très utile pour la suite, surtout pour formuler de façon compacte des résultats.

Notes

Summary

4m 44s

Permutation cyclique dans les notations

En notations standard, une permutation cyclique et définie par

$$a \to b \to c \to a \qquad \text{et} \qquad \alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha\,.$$

On dit qu'une relation $R(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ est invariante par permutation cyclique si les trois relations suivantes sont vraies :

$$R(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)\,, \qquad R(b, c, a, \beta, \gamma, \alpha) \qquad \text{et} \qquad R(c, a, b, \gamma, \alpha, \beta)\,.$$

On écrit alors

$$R(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \quad \circlearrowleft\,.$$

On va introduire ce que l'on appelle "permutation cyclique" dans les notations. Une permutation cyclique dans les notations signifie que l'on va remplacer a par b, b par c, et c par a; et en même temps α par β, β par γ et γ par α. Et on va le faire dans une relation, donc dans une expression algébrique qui contient les grandeurs a, b, c ainsi que α, β, γ. Et on va dire qu'une telle relation est invariante par permutation cyclique si, dès qu'on a la première relation on a aussi les deux autres ici, c'est-à-dire qu'on peut remplacer formellement le a par b, le b par c, le c par a, le α par β, le β par γ, et le γ par α, exactement ce qu'on a là-haut, et on obtient une nouvelle notation. Et on peut refaire la même chose, c'est-à-dire que le b est remplacé par c, le c, remplacé par a, le a, rempacé par b; β par γ, γ par α, α par β; et on obtient une troisième relation qui est encore vraie. Et si on fait encore une fois une permutation cyclique, on va retomber sur la première relation. Pour ne pas écrire les trois relations séparément, on ne va écrire cette relation qu'une seule fois, et on va la munir de ce petit symbole ici, ce petit cercle pas tout à fait fermé avec une flèche. Cela indique que dans cette formule vous pouvez procéder une ou plusieurs fois à cette permutation cyclique, et vous obtenez alors toujours un résultat qui est correct.

Notes

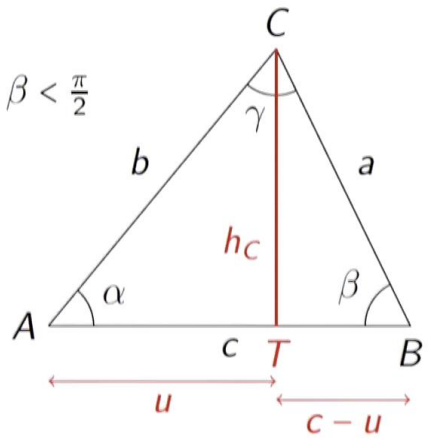
Summary

5m 10s

Théorème du cosinus

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C et son pied T :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$



Aujourd'hui, je vais me concentrer sur un des piliers qui permet de déterminer des éléments inconnus dans un triangle quelconque, c'est ce qu'on appelle le théorème du cosinus. L'autre pilier, peut-être que vous le devinez, va s'appeler le théorème du sinus. Aujourd'hui donc on fait le premier, le théorème du cosinus. Et pour le faire, on va se placer dans un triangle quelconque ABC, et pour pouvoir utiliser nos connaissances du triangle rectangle, on va inscrire plusieurs triangles rectangles dans un tel triangle quelconque en se servant de la hauteur. Ici je me sers de la hauteur qui passe à travers le sommet C, c'est une hauteur qu'on dénomme usuellement h(c). Elle descend perpendiculairement sur le côté c. Le pied de cette hauteur, je l'appelle T. Afin d'avoir quelques notations, j'ai ici une longueur u, c'est la longueur qui va de A à T. L'autre bout, de T à B, c'est simplement la longueur totale c moins le u. Pour obtenir les relations qu'on appelle, justement, "théorème du cosinus", on peut procéder de la façon suivante : nous allons nous concentrer sur le triangle rectangle qui est ici sur la droite, le triangle rectangle CTB, et nous allons appliquer une relation sur les longueurs : c'est évidemment le théorème de Pythagore.

Notes

Summary

6m 43s

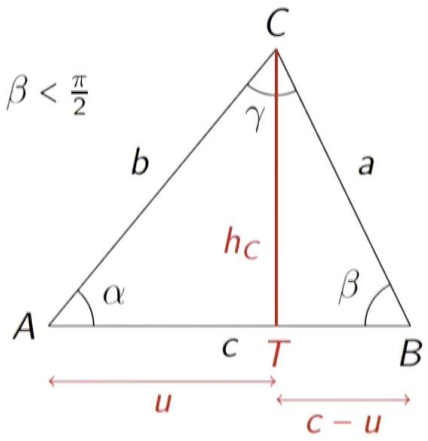
Théorème du cosinus

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C et son pied T :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$

Par le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle BCT, nous avons

$$\begin{aligned} a^2 &= h_C^2 + (c-u)^2 \\ &= (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \end{aligned}$$



Le côté a nous l'avons, il ne manque que les deux autres côtés. Nous exprimerons les deux autres côtés, c'est peut-être ce qui est surprenant, avec l'autre triangle rectangle qui est ici sur la gauche, c'est-à-dire nous allons exprimer la hauteur et le côté TB ici à l'aide des éléments α et b. Pour la hauteur, cela est facile, nous avons des résultats dans le triangle rectangle, donc nous savons par exemple que le sinus de α - le voilà, ce α - c'est l'opposé sur l'hypoténuse, soit h(c)/b. Ceci me permet de dire que la hauteur est donnée par bsinα. L'autre cathète, l'adjacente par rapport à α, est donnée par bcosα, simplement parce que le cosinus de α c'est le côté adjacent u divisé par b. Donc j'ai ces deux relations qui me donnent la hauteur h(c) et le côté u. Et évidemment si j'ai u, j'ai également c-u. Alors, appliquons à présent ce théorème de Pythagore sur ce triangle rectangle qui est sur la droite. Je sais que l'hypoténuse, a², la voici, est égale à la cathète h(c)² + l'autre cathète (c-u)². Là-dedans le h(c) je viens de le déterminer avec b et α, et le u avec b et α également. Donc introduisons ces grandeurs dans cette relation. Ici j'ai le bsinα que j'élève au carré, le (c-u)² c'est (c-bcosα)².

Notes

Summary

8m 14s

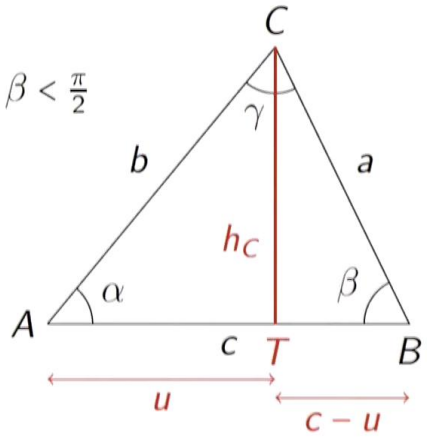
Théorème du cosinus

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C et son pied T :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$

Par le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle BCT, nous avons

$$\begin{aligned} a^2 &= h_C^2 + (c-u)^2 \\ &= (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,. \end{aligned}$$



Le premier terme au carré il ne me pose pas beaucoup de problèmes. J'élève au carré chacun des facteurs. Derrière j'ai une différence au carré, cela fait le premier terme c², le dernier terme b²cos²α ici, et un dernier terme mixte, -2bc·cosα. Ici on s'aperçoit, et c'est réjouissant pour la suite, que si on regarde ce b²sin² et ce b²cos², je peux mettre b² en évidence, et si je le fais, je m'aperçois que ce sin² + cos² est uniquement un "fois un", donc il disparaît en tant que facteur, et il va me rester la relation que a² est donné par b² + c² moins un terme mixte, qui est du type 2bc·cosα, α est l'angle intermédiaire entre les côtés b et c. Évidemment on peut s'interroger : à quel point mon raisonnement dépend-il de la situation particulière dans laquelle j'ai dessiné ce triangle ? Pourquoi serait-il particulier ? Par exemple, parce que l'angle β est aigu et non pas obtus. Alors voyons ce qu'il se passe si cet angle devient obtus.

Notes

Summary

10m 10s

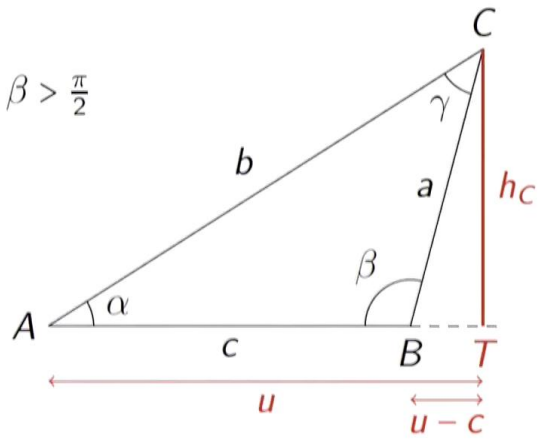
Théorème du cosinus

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C et son pied T :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$

Par le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle BCT, nous avons

$$\begin{aligned} a^2 &= h_C^2 + (c-u)^2 \\ &= (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,. \end{aligned}$$



Voici la figure correspondante avec les mêmes éléments : la hauteur h(c), on a ici le côté c. Le côté u va être donné par bcosα. Ici j'ai α, le cosinus de α va être la cathète adjacente par b, donc u est cette fois-ci toute la longueur, de A jusqu'à T, et pour avoir ce triangle rectangle sur la droite, ici j'ai cette fois-ci non pas c-u, mais u-c, car u est plus longue que c. C'est-à-dire que ici je n'ai pas c-u mais je devrais écrire u-c, mais avec les mêmes formules pour h(c) et u. Vu que j'élève au carré, ce changement de signe, ou d'ordre dans la soustraction, ne joue aucun rôle et tous les calculs restent valables.

Notes

Summary

11m 37s

Théorème du cosinus

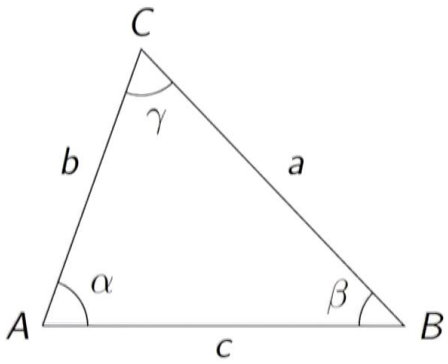
Proposition

Pour tout triangle ABC , on a en notations standard

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,. \end{aligned}$$

ou encore

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \circlearrowleft\,.$$



Ça, ça me permet de conclure en énonçant le théorème du cosinus. Pour tout triangle ABC on a, en notation standard (la notation que j'ai introduite au début), a² = b²+c²-2bc·cosα. C'est la première ligne, celle que nous avons développée. Alors évidemment, par symétrie, le sommet A n'est pas différent de B et C, c'est-à-dire que ici dans ces formules vous pouvez changer l'ordre, vous pouvez remplacer A par B, B par C, C par A, α par β, β par γ, γ par α, etc. Alors vous allez retrouver une deuxième ligne; donc ici le a je le remplace par b, b² = c²+a²–2ca·cosβ. Remarquons qu'ici dans le produit mixte on retrouve toujours les deux mêmes lettres que ici devant, donc sur la droite on retrouve toujours les deux mêmes côtés, et l'angle c'est celui qui est compris entre ces deux côtés, donc ici entre c et a, ici j'ai c, a, et l'angle compris est β. Et enfin, on obtient c², c'est celui-ci, alors il est donné par a²+b²–2ab·cosγ. Alors, au lieu de formuler ces trois lignes toujours, péniblement, on ne va les noter qu'une seule fois. Vous pouvez choisir la ligne qui vous convient le mieux. J'ai sélectionné la première, a² = b²+c²-2bc·cosα, Et je mets ce signe indiquant qu'on peut permuter de façon cyclique dans cette formule.

Notes

Summary

12m 30s

Remarque

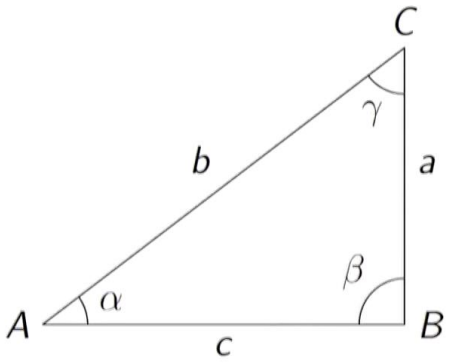
Si le triangle ABC est rectangle en B,

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos\beta = 0,$$

le théorème du cosinus devient

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta = c^2 + a^2.$$

Le théorème du cosinus est ainsi une généralisation du théorème de Pythagore.



Faisons quand même une remarque. Si le triangle est rectangle, disons ici en B, β vaut π/2 ou 90°, comme vous voulez, le cosinus de β vaut donc 0. Qu'est-ce que j'obtiens ? J'obtiens cette fois-ci que b², le voilà, c'est c²+a², les deux premiers termes, moins 2ca·cosβ, le cosinus de β est nul parce que β=90°, donc il va me rester c²+a². C'est le théorème de Pythagore bien connu. On voit donc que le théorème du cosinus généralise le théorème de Pythagore à des triangles qui ne sont pas forcément rectangles.

Notes

Summary

14m 17s

Exemple 1

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 5 \qquad b = 3 \qquad \gamma = 37°.$$

Déterminons le côté c et les angles α et β manquants.

Nous allons appliquer à présent cette relation pour faire un premier exemple de résolution de triangle. Nous allons considérer un triangle dont on connaît certains éléments, et on utilisera les notations standard que j'ai introduites au début, nous avons un côté a qui vaut 5, un côté b qui vaut 3, et un angle γ donné par 37°. Et on aimerait déterminer les éléments manquants, c'est-à-dire que j'aimerais connaître la longueur du troisième côté c, et j'aimerais connaître la grandeur des angles α et β.

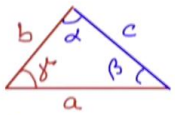
Notes

Summary

15m 01s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$
$b = 3$
$\gamma = 37°$



1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Dans ce triangle sont donnés, rappelons-le : la longueur du côté a=5, la longueur du côté b=3, et l'angle γ avec ses 37°. On peut esquisser, en quelque sorte, la situation devant laquelle nous nous trouvons : nous connaissons un côté b, nous connaissons un côté a un peu plus long, et nous ne connaissons pas le troisième côté c qui serait ici. Inscrivons quand même les noms. Ici j'ai un côté a, 5, c'est un côté qui est long par rapport à b qui vaut 3; quant au côté c, là je n'ai aucune information sur la grandeur de ce côté. Je connais également l'angle γ. Donc ici, regardez le code couleur, j'ai simplement utilisé le rouge pour les grandeurs connues, et je vais utiliser le bleu pour les éléments manquants qui sont ici α et β. Alors on va procéder en trois étapes pour α, β et c. Alors on peut d'abord calculer c. Nous savons exactement que si je regarde ici en rouge j'ai les deux côtés et l'angle intermédiaire, cela correspond exactement au théorème du cosinus. Première étape, déterminons c avec le théorème du cosinus. Ce théorème me donne le résultat suivant. Il me dit c^2 = quelque chose. Encore une fois, $c^2 = a^2+b^2–2ab\cdot\cos\gamma$. Ça, ça serait le c^2.

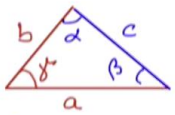
Notes

Summary

15m 38s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$
$b = 3$
$\gamma = 37°$



1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°} \approx 3,16874$$

2)

Si je veux avoir le c il suffit de prendre la racine de cette expression. Alors qu'est-ce que je connais là-dedans ? Je connais a=5, au carré 25; le b qui vaut 3, 9 pour le carré; 25+9=34; moins 2ab, 2·5·3 qui donnent 30; fois le cosinus de 37°. Là, tous les éléments sont connus, prenons une calculatrice et introduisons cela, on vérifie bien que la calculatrice est réglée pour prendre des angles en degrés et pas en radians, et nous allons obtenir le résultat suivant : c ≈ 3,16874. Voilà, ça c'est un premier résultat. Deuxième étape. Si l'on regarde le théorème du cosinus on a l'impression que a priori on peut uniquement déterminer un côté à partir de deux côtés et d'un angle intermédiaire. Mais en fait cette relation donnée par ce théorème du cosinus, ces trois relations, en fait, peuvent être manipulées de façon algébrique. Essayons une fois de déterminer l'angle α à l'aide du théorème du cosinus. Je vais écrire que l'on peut déterminer un angle, et je vais choisir l'angle α. Il y a peut-être une raison un peu profonde à ce choix, il est bon de s'habituer à utiliser le théorème du cosinus pour un angle dont on peut dire "il est plutôt grand". Ça c'est un réflexe qui vaut la peine d'être pris.

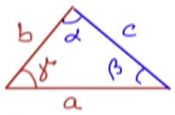
Notes

Summary

17m 43s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 37°$



1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34 - 30\cdot\cos 37°} \approx 3.16874$$

2) Déterminons α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 - 30\cdot\cos 37°}{6\sqrt{34 - 30\cdot\cos 37°}}$$

$\alpha =$

Voyez ici, j'ai un côté a qui est grand et b qui est petit, donc α est plutôt l'angle le plus grand. Vous allez voir par la suite que cela vaut la peine d'utiliser le théorème du cosinus pour un angle qui est plutôt grand. Ici ça ne joue aucun rôle, mais je vais le faire. Déterminons α. Comment puis-je faire ? Il faut prendre le théorème du cosinus sous une forme qui contient α. Là je sais qu'il faut prendre $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$. Ça c'est une relation qui contient cosinus α. Je peux la résoudre algébriquement par rapport à α. J'obtiens donc que le cosinus de α est donné par : $b^2 + c^2 - a^2$ le tout divisé par 2bc. Là les éléments sont connus à nouveau : pour le b^2 c'est 9; pour le c^2 nous avons ici une expression que nous avons trouvée; pour le a^2 j'ai 5^2, pour 2bc j'ai également le tout, donc ce qui va me rester, si vous faites les calculs, il va me rester ici : $18 - 30\cdot\cos 37°$ divisé par 2bc, et le 2bc va me donner : 6 fois ce que nous avions trouvé, c'est-à-dire racine de $34 - 30\cdot\cos 37°$. Il est clair que ici, au dénominateur, vous pouvez reprendre la valeur que nous avons obtenue pour c. Alors pour α on va prendre la fonction arccosinus. Je rappeller que arccosinus donne un angle entre zéro et π.

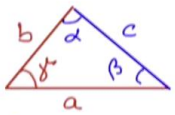
Notes

Summary

19m 42s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 37°$



1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°} \approx 3.16874$$

2) Déterminons α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 - 30 \cdot \cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}}$$

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \arccos \frac{18 - 30\cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}} \approx 108.266°$$

Or aucun angle dans un triangle ne peut être plus grand que π, donc connaître le cosinus c'est connaître l'angle, vraiment. Donc il suffit de prendre pour α : arccosinus de cette expression que l'on vient d'avoir. Notez bien que arccosinus va nous rendre un angle en radians, si je veux l'avoir en degrés, je le convertis de la façon suivante : je divise par π, je multiplie par 180°. Et ce qui reste dans le arccosinus c'est l'expression que nous avions en haut : Alors, à nouveau, nous pouvons prendre une calculatrice, nous mettons le tout dedans, et si vous faites le calcul, vous verrez que le cosinus d'alpha est négatif cette fois-ci, ce qui va me donner un angle, évidemment, obtus. Et j'obtiens 108,266°. Voilà, ça c'est le résultat pour α. Donc ce triangle va être un triangle contenant un angle obtus. Notez bien que l'angle β, que je vais déterminer maintenant, lui ne peut pas être obtus, parce que b est plus petit que a, donc ça signifierait, si β était obtus, que les deux angles β et α seraient obtus, et ça ça ne va pas dans un triangle. Donc j'ai déterminé le plus grand des deux angles, et le troisième angle, l'angle qui me manque, c'est β, je vais simplement utiliser le fait que la somme des angles est 180°.

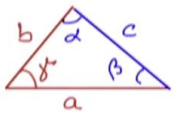
Notes

Summary

21m 49s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$
$b = 3$
$\gamma = 37°$



1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°} \approx 3.16874$$

2) Déterminons α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 - 30 \cdot \cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}}$$

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \arccos \frac{18 - 30\cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}} \approx 108.266°$$

3) $\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 34.734°$

Donc je vais déduire de 180° les valeurs de α, je viens de le calculer, et de γ, qui est là-haut, et il va me rester un angle de 34,734°. Ça c'est l'élément qui me manquait, maintenant le triangle est déterminé complètement, je connais tous les éléments qui étaient en bleu, je connais α, β et c.

Notes

Summary

23m 32s

Exemple 2

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 3 \qquad b = 6 \qquad c = 4.$$

Déterminons les angles α, β et γ.

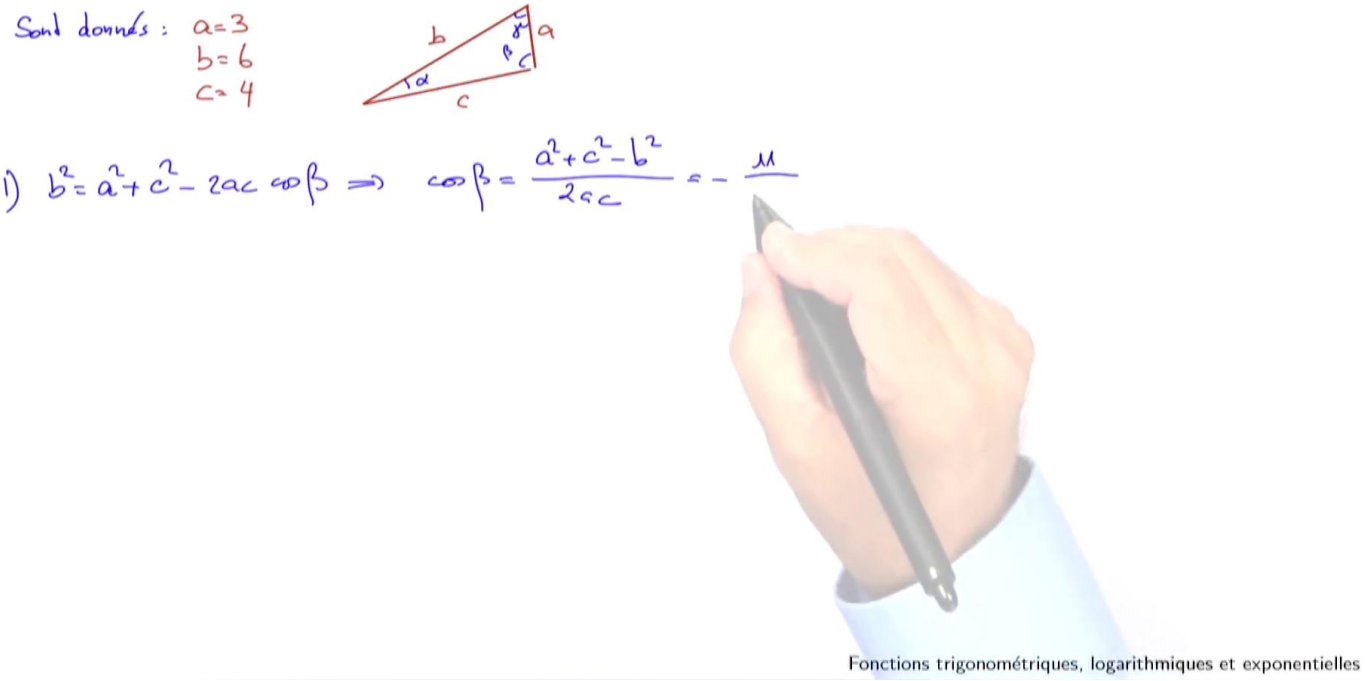
Considérons un deuxième exemple. Cette fois-ci, partons du fait que nous connaissons a, b et c. Donc nous connaissons les trois côtés, et nous aimerions déterminer les trois angles α, β et γ. Alors, je viens de montrer que l'on peut utiliser le théorème du cosinus pour déterminer des angles, et que usuellement il faut essayer de déterminer un angle dont on sait qu'il est grand. Si on peut choisir on essaie de prendre un angle qui est grand. Donc ici a priori je vais essayer de déterminer la valeur de β, à tout casser de γ, j'éviterai de commencer par la détermination de l'angle α. Pour le moment cela ne joue aucun rôle, avec le théorème du cosinus, mais nous verrons dans le chapitre suivant qu'en introduisant la deuxième notion, celle du théorème du sinus, il va falloir jouer entre les deux, et là cette remarque devient capitale.

Notes

Summary

24m 00s

Exemple 2 : solution



Alors, rappelons ce qui est donné. Je le remets en rouge comme la dernière fois. a=3, b=6 et c=4. De nouveau, nous pouvons esquisser le triangle. Donc je vais commencer par le côté qui me semble être le plus long, c'est le côté b. Et nous allons ensuite dessiner le plus petit qui est le côté a, et un côté intermédiaire qui serait peut-être ici. Inscrivons les noms : ici nous avons dit b, qui est très long, ici le a qui est court, ici nous avons le c. Et nous ne connaissons aucun angle. Il nous manque l'angle α ici, l'angle β ici, l'angle γ ici. Et nous aimerions déterminer la valeur de ces trois angles. Alors, je commence. Et comme indiqué, je vais utiliser ce principe d'essayer de déterminer d'abord un angle qui est grand, et donc je vais déterminer β. Donc je vais partir avec : $b^2 = a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$, Que je peux résoudre par rapport à cosβ : pour cosβ j'obtiens $(a^2+c^2-b^2)/2ac$. Tous les éléments sont connus, $a^2+b^2-c^2$ ça va me donner 9+16=25, moins 36 qui font -11. Et 2ac va me donner 24. Donc j'obtiens -11/24.

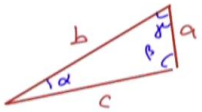
Notes

Summary

24m 53s

Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$



1) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24}$

$\Rightarrow \beta = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \approx 117.28°$

2) $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{29}{36}$

$\gamma = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(\frac{29}{36}\right) \approx 36.3361°$

Là à nouveau le cosinus est négatif, cela signifie que l'angle β que je vais obtenir va être obtus, et je peux écrire que β est donné par, à nouveau, arccosinus; de nouveau je multiplie par ce 180°/π pour obtenir des degrés; sur une calculatrice, du reste, vous n'avez pas besoin de ce facteur, vous pouvez régler votre calculatrice pour que la fonction arccosinus rende tout de suite des degrés; et nous prenons arccos(-11/24) et une calculatrice va vous donner pour cet angle : 117,28°. Dans une deuxième étape je vais déterminer un deuxième angle. Je vais prendre γ. Je pars depuis $c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$. Et je résouds cela par rapport à cos γ, qui vaut alors $(a^2+b^2-c^2)/2ab$. Nous introduisons les valeurs, et nous retrouvons cette fois-ci 29/36. Et pour γ nous procédons de nouveau à un arccosinus de ces 29/36, et une calculatrice va me livrer cette fois-ci 36,3361°. Peut-être une petite remarque : il est clair que la précision avec quatre décimales pour des degrés est certainement exagérée; si je mets autant de décimales c'est pour vous permettre de comparer mieux les résultats que vous obtenez sur une calculatrice, ça permet de comparer de façon plus sûre les résultats.

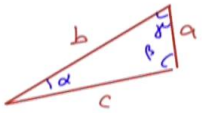
Notes

Summary

26m 53s

Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$



1) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24}$

$\Rightarrow \beta = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \approx 117.28°$

2) $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{29}{36}$

$\gamma = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(\frac{29}{36}\right) \approx 36.3361°$

3) $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 26.3843°$

Et pour le troisième angle, α, là je pourrais certes utiliser encore une fois le théorème du cosinus, on peut sans problème l'utiliser pour un petit angle; mais connaissant deux angles, je vais évidemment cette fois-ci obtenir la valeur du troisième angle en disant que la somme des trois angles vaut 180°, donc je vais soustraire de 180° le β et le γ que j'ai trouvés, et cela va me donner pour α 26,3843°. De nouveau, je pense qu'on pourrait tout à fait dire que c'est 26,4°, cela suffirait largement. Voilà, à présent j'ai la valeur des trois angles, je connaissais les trois côtés, donc je vais pouvoir dire que le triangle est entièrement déterminé.

Notes

Summary

28m 49s

Remarque

Dans un triangle ABC, chaque angle α, β, γ est compris entre 0 et π.
La connaissance du cosinus est donc équivalente à la connaissance de l'angle, qui est alors donné par la fonction arccos.

Encore une fois, si vous utilisez le théorème du cosinus pour déterminer un angle, puisque chaque angle ne peut être compris qu'entre 0 et π, donc entre 0 et 180°, cela signifie que si vous avez le cosinus vous connaissez l'angle. Donc le théorème du cosinus est très bien adapté au calcul d'angles, nous verrons que le théorème du sinus l'est beaucoup moins.

Notes

Summary

29m 35s

Théorème du cosinus

Ce que nous avons appris :

- le théorème du cosinus.

Prochaine étape :

- le théorème du sinus ;
- le cercle circonscrit.

Qu avons-nous appris aujourd'hui ? Nous avons rencontré le premier pilier pour le calcul d'un triangle, c'est le théorème du cosinus. Et la prochaine fois je vais vous présenter le deuxième pilier qui est le théorème du sinus. Je vous remercie, et à la prochaine !

Notes

Summary

29m 54s