ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Relations dans les triangles

## 7.1 Théorème du cosinus

**Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles**

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

# Introduction

Les fonctions trigonométriques donnent des relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle.

Quelles sont alors les relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque ?



Guten Tag. Ich sage herzlich willkommen zu meinem Kurs „Trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen“ Heute beginnen wir das Kapitel sieben, ein Kapitel, welches den Beziehungen im Dreieck gewidmet ist, oder dem, was man auch als Dreieckssätze bezeichnet. Wir haben bereits gesehen, dass die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im rechtwinkligen Dreieck wiedergeben. Heute und bei den nächsten Malen werden wir uns erneut für die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln interessieren, aber diesmal in einem beliebigen Dreieck, welches also nicht zwangsläufig rechtwinklig ist.

Notes

Summary

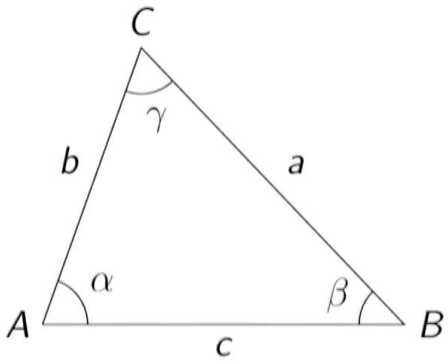
0m 04s

# Notations standard dans un triangle

Trois points non alignés $A$, $B$ et $C$ définissent un triangle : ce sont ses sommets.

Le côté opposé à $A$ est noté $a$, tout comme sa longueur.
De même pour les côtés $b$ et $c$, associés aux sommets $B$ et $C$.

L'angle intérieur en $A$ est noté $\alpha$, tout comme sa mesure.
De même pour les angles $\beta$ et $\gamma$, associés aux sommets $B$ et $C$.






Um Resultate in einer kompakten, gut zu merkenden Form zu erhalten, werden wir einführen, was als Standardnotation in einem Dreieck bezeichnet wird. Sie finden diese Notationen hier in dieser Figur. Ein Dreieck wird durch drei Eckpunkte definiert: Wir nennen diese A, B und C. Und wir haben drei Seiten. Als „a“ bezeichnen wir diejenige, die gegenüber Eckpunkt A liegt. „b“ liegt gegenüber von B, „c“ gegenüber von C. Was die üblicherweise verwendeten inneren Winkel des Dreiecks betrifft, werden wir diese wie folgt bezeichnen: Der Winkel unter dem Eckpunkt A soll α sein; der Winkel am Eckpunkt B, β und der Winkel am Eckpunkt C γ (Gamma). Man findet daher also dreimal einen gleichen Buchstaben, wenn man so will. Hier den Eckpunkt A mit dem Winkel α und der gegenüberliegenden Seite a; Hier B mit dem Winkel β und der gegenüberliegenden Seite b etc.

Notes

Summary

0m 47s

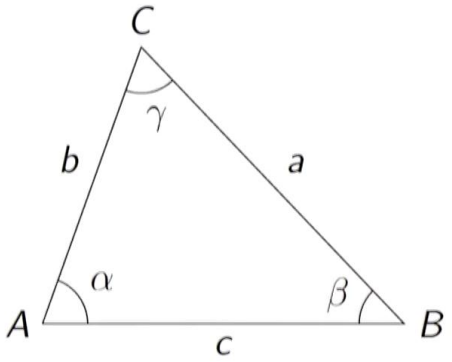
# Relation d'ordre dans un triangle

Pour un triangle $ABC$ quelconque,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi\,.$$

De plus, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ ont la même relation d'ordre que les côtés opposés respectifs :

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad a \geq b \geq c\,.$$






Wir benötigen einige, würde ich sagen, wohlbekannte Basisbeziehungen in einem beliebigen Dreieck. Die erste dieser Beziehungen ist sehr gut bekannt: Wenn ich die Summe der Winkel bilde, erhalte ich π oder 180°, wenn wir die Winkel in Grad berechnen, was üblich ist. Das zweite Resultat ist oft weniger bekannt, es ist aber dennoch Standard. Es besagt, dass man zwischen den Winkeln α, β, γ die gleiche Ordnungsrelation wie zwischen den Seiten a, b, und c hat. Das heißt, wenn α der größte und γ der kleinste der Winkel ist, wird a die größte und c die kleinste der Seiten sein. Man kann versuchen, diese Tatsache in einem beliebigen Dreieck zu sehen. Man kann sich fragen, welches der größte Winkel ist. Liegt er gegenüber der größten Seite? Hier scheint die längste Seite a zu sein und der größte Winkel beispielsweise α. Ich möchte diese Ordnungsrelation etwas näher erläutern.

Notes

Summary

1m 59s

# Relation d'ordre dans un triangle

Il suffit de le montrer pour deux côtés :

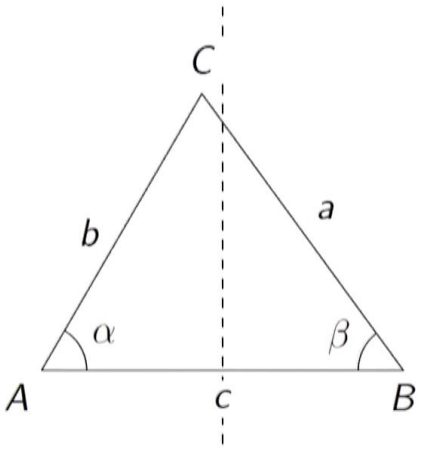
$$\alpha \geq \beta \iff a \geq b\,.$$

Fixons le côté $c$ et traçons sa médiatrice.

Si le sommet $C$ se trouve sur la médiatrice, $a = b$ et $\alpha = \beta$.

Si $C$ se déplace vers la gauche,

- $\alpha$ augmente et $\beta$ diminue : $\alpha > \beta$
- $a$ reste plus grand que $b$ : $a > b$.




REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Es reicht, diese Relation zwischen zwei Winkeln und zwei Seiten zu begründen. Es reicht zu zeigen, dass, wenn α≥β ist, dann ist a≥b, denn wenn man dies gemacht hat, kann man iterieren: Wenn β größer ist als γ, kann man sagen, dass b größer als c ist. Wenn man alles zusammenführt, erhält man eine gute Relation zwischen den 3 Seiten. Beim Versuch, diese Beziehungen zu erläutern, kann man einfach zeigen, dass α≥β und a≥b Hier setzen wir die Seite c fest. Wir nehmen die Mittelsenkrechte, hier in Punkten, und platzieren den Eckpunkt C auf der Mittelsenkrechten. Man findet dann ein gleichschenkliges Dreieck wieder, das heißt, dass die Seiten a und b die gleiche Länge haben und die Winkel α und β ebenfalls gleich sind, so hat man a : a=b und α=β. Wir gehen dann weiter so vor. Wir verlegen den Eckpunkt C nach links. Was passiert, wenn ich den Eckpunkt C nach links verlege? Der korrespondierende Winkel α wird größer und a wird größer als b. Daraus ergibt sich α>β und a>b. Betrachten wir dies, wenn ich den Eckpunkt C nach links bewege.

Notes

Summary

3m 08s

# Relation d'ordre dans un triangle

Il suffit de le montrer pour deux côtés :

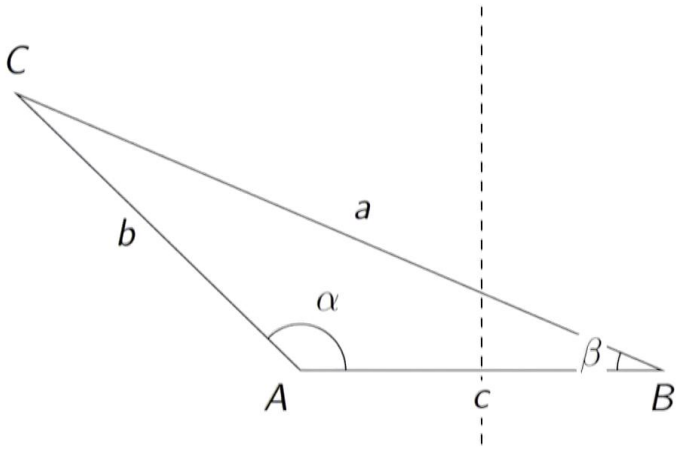
$$\alpha \geq \beta \iff a \geq b\,.$$

Fixons le côté $c$ et traçons sa médiatrice.

Si le sommet $C$ se trouve sur la médiatrice, $a = b$ et $\alpha = \beta$.

Si $C$ se déplace vers la gauche,

- $\alpha$ augmente et $\beta$ diminue : $\alpha > \beta$
- $a$ reste plus grand que $b$ : $a > b$.




Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier sieht man dann sehr gut: Der Winkel α wird immer größer, und die Seitenlänge a bleibt strikt größer als b. So konnte gut gezeigt werden, dass wenn α > β, a > b. Dies ist eine Beziehung, die wir häufig benutzen werden. Bestimmen wir noch eine weitere Notation, die in der Folge nützlich sein wird, besonders, um Resultate kompakt zu formulieren.

Notes

Summary

4m 44s

# Permutation cyclique dans les notations

En notations standard, une permutation cyclique et définie par

$$a \to b \to c \to a \qquad \text{et} \qquad \alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha\,.$$

On dit qu'une relation $R(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ est invariante par permutation cyclique si les trois relations suivantes sont vraies :

$$R(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)\,, \qquad R(b, c, a, \beta, \gamma, \alpha) \qquad \text{et} \qquad R(c, a, b, \gamma, \alpha, \beta)\,.$$

On écrit alors

$$R(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \quad \circlearrowleft\,.$$



Wir werden die „zyklische Permutation“ in die Notationen einführen. Eine zyklische Permutation in den Notationen bedeutet, dass man a durch b, b durch c, und c durch a ersetzt und gleichzeitig α durch β, β durch γ und γ durch α. Und dies macht man in einer Relation, also in einem algebraischen Ausdruck, der die Größen a, b, c ebenso wie α, β, γ enthält. Man kann sagen, dass eine derartige Relation durch die zyklische Permutation invariant ist, denn, wenn man die erste Relation hat, hat man hier auch die beiden anderen, das heißt, man kann formal a durch b ersetzen b durch c, c durch a, α durch β, β durch γ und γ durch α, exakt so, wie man es hier oben hat, und erhält dann eine neue Notation. Und das Gleiche kann man erneut tun, das heißt b wird durch c ersetzt, c wird durch a ersetzt, a wird durch b ersetzt; β durch γ, γ durch α, α durch β; und man erhält eine dritte Relation, die ebenfalls wahr ist. Und wenn man dann erneut eine zyklische Permutation vornimmt, kommt man auf die erste Relation zurück. Um diese drei Relationen nicht separat aufzuschreiben, schreibt man diese Relation nur einmal auf und wird sie mit diesem kleinen Symbol hier, dem kleinen, nicht ganz geschlossenen Kreis mit einem Pfeil versehen. Das bedeutet in dieser Formel, dass Sie einmal oder mehrmals in der zyklischen Permutation so vorgehen können und dabei erhalten Sie immer ein Resultat, das korrekt ist.

Notes

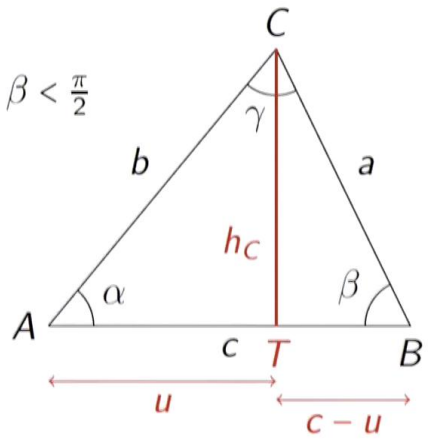
Summary

5m 10s

# Théorème du cosinus

Dans un triangle $ABC$, considérons la hauteur $h_C$ issue de $C$ et son pied $T$ :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$






Heute werde ich mich auf eine dieser Säulen konzentrieren die es erlaubt, unbekannte Elemente in einem beliebigen Dreieck zu bestimmen, was man dann als Kosinussatz bezeichnet. Die andere Säule wird, wie Sie vielleicht schon vermuten werden, Sinussatz genannt. Heute wenden wir uns dem ersten, dem Kosinussatz zu. Und um das zu tun, nehmen wir ein beliebiges Dreieck ABC und um es nutzen zu können, wenden wir unsere Kenntnisse des rechtwinkligen Dreiecks an. Man wird mehrere rechtwinklige Dreiecke in dieses beliebige Dreieck eintragen, indem man sich der Höhe bedient. Hier bediene ich mich der Höhe, die gegenüber dem Eckpunkt C liegt. Das ist eine Höhe, die man üblicherweise als h(c) bezeichnet. Diese steht senkrecht auf der Seite c. Den Fuß dieser Höhe bezeichne ich als T. Um einige Notationen zu verwenden, habe ich hier eine Länge u, das ist die Länge, die von A nach T verläuft. Das andere Ende von T nach B, das ist einfach die Gesamtlänge c minus u. Um die Beziehungen, die man korrekt als "Kosinussatz" bezeichnet, zu erhalten, kann man wie folgt fortfahren: Wir werden uns auf das rechtwinklige Dreieck konzentrieren, welches hier rechts das rechtwinklige Dreieck CTB ist und wir werden dann eine Beziehung zwischen den Längen anwenden: Das ist ganz eindeutig der Satz des Pythagoras.

Notes

Summary

6m 43s

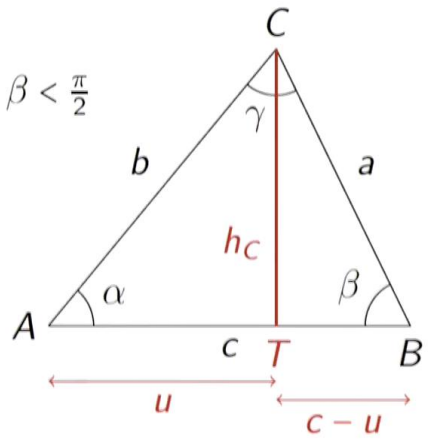
# Théorème du cosinus

Dans un triangle $ABC$, considérons la hauteur $h_C$ issue de $C$ et son pied $T$ :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$

Par le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle $BCT$, nous avons

$$a^2 = h_C^2 + (c-u)^2$$






Zu der Seite a, die wir haben, gehören zwei weitere Seiten. Wir bezeichnen diese zwei anderen Seiten, das ist vielleicht überraschend, mit einem anderen rechtwinkligen Dreieck, welches hier links ist, das heißt, wir bezeichnen die Höhe und die Seite TB hier mit Hilfe der Elemente α und b. Für die Höhe ist das einfach. Wir haben Resultate im rechtwinkligen Dreieck, von denen wir beispielsweise wissen, dass der Sinus von α - dieser hier, dieses α - die Gegenkathete zur Hypotenuse ist, also h(c)/b. Das erlaubt mir zu sagen, dass die Höhe durch bsinα gegeben ist. Die andere Kathete, die Ankathete im Verhältnis zu α wird gegeben durch bcosα, einfach weil der Kosinus von α, die Ankathete u geteilt durch b ist. Also habe ich diese beiden Beziehungen, die mir die Höhe h(c) und die Seite u geben. Und ganz eindeutig ist, wenn ich u habe, habe ich auch c-u. Also wenden wir hierzu jetzt den Satz des Pythagoras auf dieses rechtwinklige Dreieck an, welches hier rechts liegt. Ich weiß, dass die Hypotenuse a², diese hier, gleich ist der Kathete h(c)² + der anderen Kathete (c-u)². Das h(c) dort drinnen werde ich mit b und α bestimmen und das u mit b und auch α. Also führen wir diese Größen in diese Beziehung ein.

Notes

Summary

8m 14s

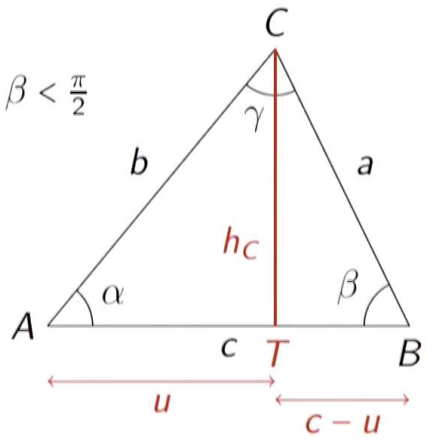
# Théorème du cosinus

Dans un triangle $ABC$, considérons la hauteur $h_C$ issue de $C$ et son pied $T$ :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$

Par le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle $BCT$, nous avons

$$\begin{aligned} a^2 &= h_C^2 + (c-u)^2 \\ &= (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,. \end{aligned}$$






Hier habe ich bsinα, welches ich ins Quadrat erhebe, (c-u)² das ist (c-bcosα)². Der erste Term zum Quadrat bereitet mir kaum Probleme. Ich erhebe jeden der Faktoren ins Quadrat. Danach habe ich eine Differenz im Quadrat, die den ersten Term c² bildet, den letzten Term b²cos²α ici und einen letzten gemischten Term -2bc·cosα. Hier bemerkt man, und das ist für das Folgende erfreulich, dass bei Betrachtung dieses b²sin² ich dieses b²cos² klar herausstellen kann, und wenn ich das tue, bemerke ich, dass dieses sin² + cos² eindeutig ein "mal eins" ist, welches also als Faktor verschwindet. So bleibt für mich die Beziehung, dass a² gegeben ist durch b² + c² minus des gemischten Terms, der vom Typ 2bc·cosα ist, und dass α der mittlere Winkel zwischen den Seiten b und c ist. Natürlich kann man sich hier fragen: An welchem Punkt meiner Argumentation hängt es von dieser speziellen Position ab, in der ich dieses Dreieck gezeichnet habe? Warum wäre diese speziell? Zum Beispiel, weil der Winkel β spitz und nicht stumpf ist. Also betrachten wir jetzt, was passiert, wenn dieser Winkel stumpf wird.

Notes

Summary

10m 02s

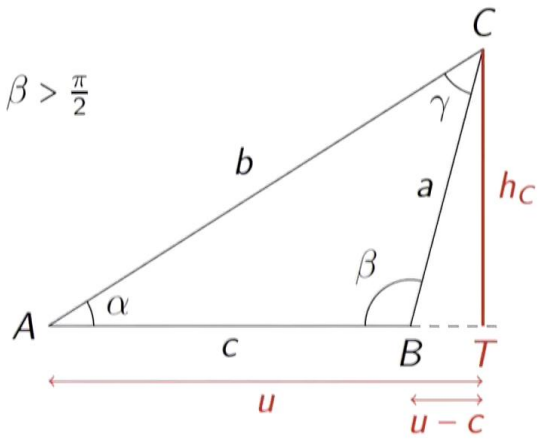
# Théorème du cosinus

Dans un triangle $ABC$, considérons la hauteur $h_C$ issue de $C$ et son pied $T$ :

$$h_C = b\sin\alpha \qquad u = b\cos\alpha\,.$$

Par le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle $BCT$, nous avons

$$\begin{aligned} a^2 &= h_C^2 + (c-u)^2 \\ &= (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,. \end{aligned}$$






Hier die entsprechende Figur mit den gleichen Elementen: der Höhe h(c) und hier hat man die Seite c. Die Seite u wird durch bcosα gegeben. Hier habe ich α, der Kosinus von α wird die Ankathete durch b, wobei u in diesem Fall die gesamte Länge von A nach T ist. Und um dieses rechtwinklige Dreieck auf der rechten Seite zu erhalten, habe ich hier dieses Mal nicht c-u. sonder u-c, weil u länger ist als c. Das heißt, wenn ich hier nicht c-u habe, müsste ich hier u-c schreiben, aber mit denselben Formeln für h(c) und u. Wenn ich betrachte, dass ich quadriere, spielt dieser Wechsel des Vorzeichens oder der Ordnung der Subtraktion keine Rolle und sämtliche Berechnungen bleiben gültig.

Notes

Summary

11m 37s

# Théorème du cosinus

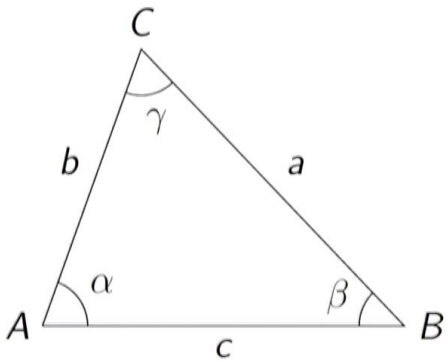
## Proposition

*Pour tout triangle ABC , on a en notations standard*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,. \end{aligned}$$

*ou encore*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \circlearrowleft\,.$$






Das erlaubt mir die Schlussfolgerung, die der Kosinussatz zum Ausdruck bringt, Für jedes Dreieck ABC hat man eine Standardnotation (die Notation, welche ich am Anfang eingeführt habe) $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$. Das ist die erste Zeile, die ich entwickelt habe. Aufgrund der Symmetrie ist klar, dass der Eckpunkt A sich nicht von B und C unterscheidet, das heißt, dass Sie in diesen Formeln die Reihenfolge ändern können. Sie können A durch B, B durch C, C durch A, α durch β, β durch γ, γ durch α etc. ersetzen. Also werden Sie hier eine zweite Zeile wiederfinden; in der ich also das a durch b ersetze, $b^2 = c^2+a^2-2ca\cdot\cos\beta$. Hier ist anzumerken, dass man in dem gemischten Produkt immer die beiden gleichen Buchstaben wie vorher wiederfindet, also rechts findet man immer die beiden gleichen Seiten und der Winkel ist der zwischen den beiden Seiten enthaltene, also hier zwischen c und a, hier habe ich c, a, hier ist der Winkel β enthalten. Und schließlich erhält man $c^2$, das ist derjenige, der demnach gegeben ist durch $a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$. Also, anstatt diese drei Linien immer penibel zu formulieren, braucht man sie nur ein einziges Mal zu notieren. Sie können die Linie wählen, die Ihnen am besten gefällt. Ich habe die erste gewählt, $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ und ich nehme dieses Zeichen, welches anzeigt, dass man permutieren kann, in Kreisform in diese Formel auf.

Notes

Summary

12m 30s

# Remarque

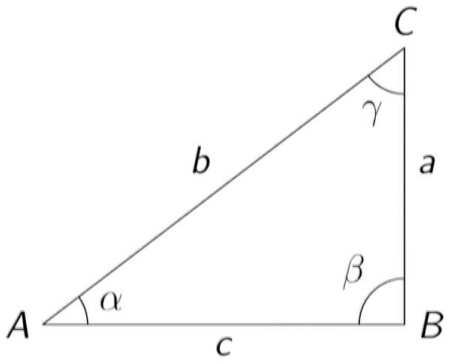
Si le triangle $ABC$ est rectangle en $B$,

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos\beta = 0,$$

le théorème du cosinus devient

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta = c^2 + a^2.$$

Le théorème du cosinus est ainsi une généralisation du théorème de Pythagore.






Eine Anmerkung ist jedoch zu machen. Wenn das Dreieck ein rechtwinkliges ist, sagen wir hier in B, wo β den Wert π/2 oder 90° hat, wie Sie möchten, hat der Kosinus von β also den Wert 0. Was erhalte ich? Ich erhalte in diesem Fall $b^2$, welches $c^2+a^2$ ist, die beiden ersten Terme minus $2ca\cdot\cos\beta$, der Kosinus von β ist Null, weil β=90° ist, also bleiben $c^2+a^2$. Das ist der wohlbekannte Satz des Pythagoras. Man sieht also, dass der Kosinussatz den Satz des Pythagoras für die Dreiecke verallgemeinert, die nicht unbedingt rechtwinklig sein müssen.

Notes

Summary

14m 17s

# Exemple 1

## Exemple

Considérons un triangle $ABC$ (en notations standard) dont on connaît

$$a = 5 \qquad b = 3 \qquad \gamma = 37°.$$

Déterminons le côté $c$ et les angles $\alpha$ et $\beta$ manquants.



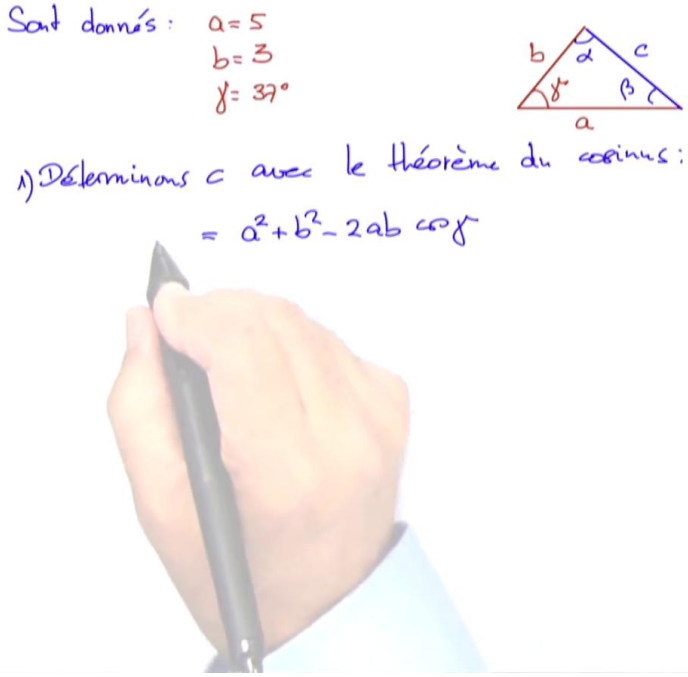
Wir werden diese Beziehung jetzt anwenden, um ein erstes Beispiel für den Dreieckssatz zu geben. Wir betrachten ein Dreieck, von dem bestimmte Elemente bekannt sind, und benutzen die Standardnotationen, die ich am Anfang eingeführt habe. Wir haben eine Seite a mit dem Wert 5, eine Seite b mit dem Wert 3, und einen Winkel γ mit 37°. Und jetzt möchte man die fehlenden Elemente bestimmen, das heißt, ich möchte die Länge der dritten Seite c und die Größe der Winkel α und β wissen.

Notes

Summary

15m 01s

# Exemple 1 : solution






In diesem Dreieck sind gegeben, erinnern wir uns: die Seitenlänge a=5, die Seitenlänge b=3, und der Winkel γ mit seinen 37°. Man könnte die Situation, in der wir uns befinden, also so beschreiben: Wir kennen eine Seite b und wir kennen eine Seite a, die etwas länger ist, und die dritte Seite, die hier wäre, kennen wir nicht. Tragen wir trotzdem die Namen ein. Hier habe ich eine Seite a, 5, das ist eine lange Seite, im Verhältnis zu b mit dem Wert 3; was die Seite c betrifft, so habe ich keine Information zur Größe der Seite. Ich kenne außerdem den Winkel γ. Betrachten Sie also hier den Farbcode, ich habe einfach Rot für bekannte Größen benutzt und werde Blau für fehlende Elemente verwenden, die hier α und β sind. Also werden wir in drei Schritten für α, β und c fortfahren. Also kann zunächst c berechnet werden. Wir wissen genau, dass wenn ich hier das Rote betrachte, habe ich zwei Seiten mit dem Winkel dazwischen, was exakt dem Kosinussatz entspricht. Im ersten Schritt bestimmen wir c mit dem Kosinussatz. Dieser Satz liefert mir das folgende Ergebnis. Es sagt mir, dass $c^2$ = irgendetwas. Noch einmal, $c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$. Das wäre das $c^2$. Wenn ich c haben möchte, muss ich nur die Wurzel dieses Ausdrucks ziehen.

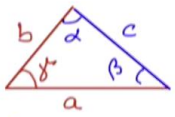
Notes

Summary

15m 38s

# Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$
$b = 3$
$\gamma = 37°$




1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°} \approx 3,16874$$

2)



Was kenne ich darin? Ich weiß, dass a=5, quadriert 25 ist; dass b gleich 3 ist, 9 ins Quadrat erhoben; 25+9=34; minus 2ab, 2·5·3 ergibt 30; multipliziert mit dem Kosinus von 37°. Da alle Elemente bekannt sind, nehmen wir einen Taschenrechner und geben dies ein. Dabei stellen wir fest, dass der Rechner vorsieht, Winkel in Grad und nicht in Radiant zu verwenden. Wir erhalten dann folgendes Ergebnis: c ≈ 3,16874. Das ist ein erstes Ergebnis. Zweiter Schritt. Wenn man sich den Kosinussatz ansieht, hat man a priori den Eindruck, dass man eine Seite nur dann bestimmen kann, wenn zwei Seiten und ein dazwischen liegender Winkel bekannt sind. Aber diese durch den Kosinussatz gegebene Beziehung, diese faktisch drei Beziehungen können durch eine algebraische Vorgehensweise manipuliert werden. Versuchen wir einmal, den Winkel α mit Hilfe des Kosinussatzes zu bestimmen. Ich werde schreiben, dass man einen Winkel bestimmen kann, und wähle den Winkel α. Es gibt vielleicht einen tieferen Grund für diese Wahl, denn es ist gut, sich anzugewöhnen, den Kosinussatz für einen Winkel zu verwenden, von dem man sagen kann „er ist eher größer“. Das ist ein Überlegung, die es wert ist, gemacht zu werden.

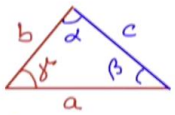
Notes

Summary

17m 49s

# Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 37°$




1) Déterminons $c$ avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \sqrt{34-30\cdot\cos 37°} \approx 3.16874$$

2) Déterminons $\alpha$ :

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{18-30\cdot\cos 37°}{6\sqrt{34-30\cdot\cos 37°}}$$



Hier sehen Sie, dass ich eine Seite a habe, die groß ist, und eine Seite b, die klein ist, also ist α eher der größte Winkel. Sie werden in der Folge sehen, dass es sich lohnt, den Kosinussatz für einen Winkel, der eher groß ist, zu verwenden. Hier spielt dies keine Rolle, aber ich mache es. Bestimmen wir α. Wie kann ich das tun? Ich muss den Kosinussatz für eine Form anwenden, die α enthält. Hier weiß ich, dass ich $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ nehmen muss Das ist eine Beziehung, die Kosinus α enthält. Ich kann diese algebraisch durch das Verhältnis zu α auflösen. Ich erhalte dann den Kosinus von α, der gegeben ist durch: $b^2+c^2-a^2$ das Ganze geteilt durch 2bc. Hier sind erneut folgende Elemente bekannt: für $b^2$ ist es 9; für $c^2$ haben wir hier einen Ausdruck, den wir gefunden haben; für $a^2$ habe ich $5^2$, für 2bc habe ich auch alles, also bleibt für mich, wenn Sie die Berechnungen vornehmen, bleibt hier für mich: $18-30\cdot\cos37°$ dividiert durch 2bc, und 2bc ergibt: 6 Mal, was wir gefunden haben, das heißt die Wurzel aus $34-30\cdot\cos37°$. Es ist klar, dass Sie hier im Nenner den Wert wiederverwenden können, den wir für c erhalten haben. Also verwenden wir für α die Arkuskosinus-Funktion.

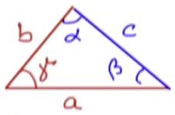
Notes

Summary

19m 42s

# Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$
$b = 3$
$\gamma = 37°$




1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°} \approx 3.16874$$

2) Déterminons $\alpha$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 - 30 \cdot \cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}}$$

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \arccos \frac{18 - 30\cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}} \approx 108.266°$$



Ich erinnere daran, dass Arkuskosinus einen Winkel zwischen Null und π ergibt. Da nun aber in einem Dreieck kein Winkel größer sein kann als π, bedeutet den Kosinus zu kennen, tatsächlich den Winkel zu kennen. Es reicht also, für α zu verwenden: Arkuskosinus dieses Ausdrucks, den man erhalten wird. Beachten Sie bitte, dass Arkuskosinus uns einen Winkel in Radiant liefert. Wenn Sie diesen in Grad haben wollen, wandle ich ihn wie folgt um: Ich teile durch π, ich multipliziere mit 180°. Übrig bleibt dann der Arkuskosinus, das ist der Ausdruck, den wir oben haben. Jetzt können wir also erneut einen Taschenrechner nehmen und alles eingeben. Wenn Sie dann die Berechnung durchführen, werden Sie sehen, dass der Kosinus von Alpha diesmal negativ ist, was mir eindeutig einen stumpfen Winkel gibt. Und ich erhalte 108,266°. Das ist also das Ergebnis für α. Dieses Dreieck wird also eines mit einem stumpfen Winkel sein. Bitte beachten Sie gut, dass der Winkel β, den ich jetzt bestimmen werde, nicht stumpf sein wird, weil b kleiner ist als a, was bedeuten würden, dass wenn β stumpf wäre, die beiden Winkel β und α stumpf wären, was in einem Dreieck nicht geht.

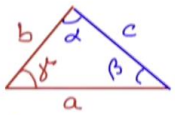
Notes

Summary

21m 44s

# Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 37°$




1) Déterminons c avec le théorème du cosinus :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°} \approx 3.16874$$

2) Déterminons $\alpha$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 - 30 \cdot \cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}}$$

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \arccos \frac{18 - 30\cos 37°}{6\sqrt{34 - 30 \cdot \cos 37°}} \approx 108.266°$$

3) $\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 34.734°$



Also habe ich den größten der beiden Winkel bestimmt und der dritte Winkel, der mir fehlt, das ist β. Ich nutze also einfach den Fakt, dass die Summe der Winkel 180° ist. Also werde ich von 180° die Werte von α abziehen und dann berechnen und von γ, der oben liegt, sodass ein Winkel von 34,734° übrig bleibt. Das ist das Element, welches fehlte. Jetzt ist das Dreieck komplett bestimmt, ich kenne alle Elemente, die Blau waren, und ich kenne α, β und c.

Notes

Summary

23m 17s

# Exemple 2

## Exemple

Considérons un triangle $ABC$ (en notations standard) dont on connaît

$$a = 3 \qquad b = 6 \qquad c = 4.$$

Déterminons les angles $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.



Betrachten wir ein zweites Beispiel. Diesmal gehen wir von dem Fakt aus, dass wir a, b, und c kennen. Also kennen wir die drei Seiten und möchten die drei Winkel α, β und γ bestimmen. Jetzt werde ich zeigen, dass man den Kosinussatz anwenden kann, um die Winkel zu bestimmen und dass man üblicherweise versuchen muss, einen Winkel zu bestimmen, von dem man sagen kann, dass er groß ist. Wenn man wählen kann, versucht man einen Winkel zu nehmen, der groß ist. Hier werde ich also a priori versuchen, den Wert von β zu bestimmen, wenn möglich auch von γ, ich werde vermeiden, mit der Bestimmung des Winkels α zu beginnen. Momentan mit dem Kosinussatz spielt dies keine Rolle, aber wir werden im folgenden Kapitel sehen, wenn ein zweiter Begriff, und zwar der Sinussatz eingeführt wird, muss es zwischen den beiden eine Rolle spielen und dann wird diese Anmerkung ausschlaggebend werden.

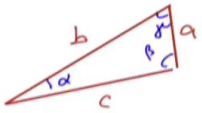
Notes

Summary

24m 00s

# Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$




1) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24}$



Also erinnern wir uns daran, was gegeben ist. Ich fange wieder mit Rot an, wie beim letzten Mal. a=3, b=6 und c=4. Und erneut können wir wieder das Dreieck zeichnen. Also fange ich an der Seite an, die mir die längste zu sein scheint. Das ist die Seite b. Und wir können dann die kleinste zeichnen, das ist a und eine Seite dazwischen, die vielleicht hier wäre. Tragen wir jetzt die Bezeichnungen ein: hier haben wir b, die sehr lang ist, hier a, die kurz ist und hier haben wir c. Und wir kennen jeden Winkel. Es fehlt uns also der Winkel α hier, der Winkel β hier und der Winkel γ hier. Und wir möchten den Wert dieser drei Winkel bestimmen. Also fange ich an. Und wie angemerkt, werde ich das Prinzip anwenden, zunächst zu versuchen einen großen Winkel zu bestimmen und werde also β bestimmen. Dann werde ich fortfahren mit: $b^2 = a^2+c^2–2ac\cdot\cos\beta$, welches ich auflösen kann durch das Verhältnis à $\cos\beta$: Für $\cos\beta$ erhalte ich $(a^2+c^2–b^2)/2ac$. Alle Elemente sind bekannt, $a^2+b^2–c^2$ ergibt 9+16=25, minus 36 ergibt -11. Und 2ac ergibt 24. Also erhalte ich -11/24. Hier ist der Kosinus erneut negativ, was bedeutet, dass der Winkel β, den ich erhalte, stumpf sein wird und ich kann schreiben, dass β gegeben ist, erneut, Arkusskosinus.

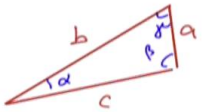
Notes

Summary

24m 53s

# Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$




1) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24}$

$\Rightarrow \beta = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \approx 117.28°$

2) $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{29}{36}$

$\gamma = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(\frac{29}{36}\right) \approx 36.3361°$

3)



Erneut multipliziere ich auf einem Rechner mit 180°/π, um Grad zu erhalten; vom Rest benötigen Sie den Faktor nicht. Sie können Ihren Taschenrechner so einstellen, dass die Funktion Arkussinus sofort zu Grad wechselt. Und dann nehmen wir arccos(-11/24) und ein Taschenrechner wird uns dann den Winkel 117,28° geben. In einem zweiten Schritt werde ich den zweiten Winkel bestimmen. Ich nehme γ. Ich fahre fort mit $c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$. Und ich löse dies auf durch das Verhältnis von cos γ, welches dann $(a^2+b^2-c^2)/2ab$ ist. Wir geben die Werte ein und finden dieses Mal wieder 29/36. Und für γ fahren wir erneut fort mit einem Arkussinus von 29/36, wofür mir ein Taschenrechner dieses Mal 36,3361° liefern wird. Vielleicht eine kleine Anmerkung: Es ist klar, dass die Präzision mit vier Dezimalstellen für Grad sicherlich übertrieben ist. Wenn ich so viele Dezimalstellen verwende, mache ich dies nur, damit Sie die Ergebnisse, die Sie auf einem Taschenrechner erhalten, vergleichen können und mehr Sicherheit bei den Ergebnissen haben. Und für den dritten Winkel α, kann ich ganz sicher erneut den Kosinussatz anwenden, den man ohne Probleme für einen kleinen Winkel anwenden kann.

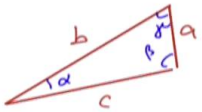
Notes

Summary

27m 05s

# Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$




1) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24}$

$\Rightarrow \beta = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \approx 117.28°$

2) $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{29}{36}$

$\gamma = \frac{180°}{\pi}\arccos\left(\frac{29}{36}\right) \approx 36.3361°$

3) $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 26.3843°$



Wenn man aber zwei Winkel kennt, werde ich diesmal sicherlich einen Wert für den dritten Winkel erhalten, indem ich sage, dass die Summe der drei Winkel 180° ist. Also werde ich von 180° β und γ, die ich gefunden habe, abziehen und das wird mir α 26,3843° geben. Erneut denke ich, dass man hier sagen könnte, dass dies 26,4° sind, das reicht im Großen und Ganzen. Jetzt habe ich also den Wert der drei Winkel, ich kenne die drei Seiten, also kann ich sagen, dass das Dreieck vollständig bestimmt ist.

Notes

Summary

28m 57s

# Remarque

Dans un triangle $ABC$, chaque angle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ est compris entre 0 et $\pi$.
La connaissance du cosinus est donc équivalente à la connaissance de l'angle, qui est alors donné par la fonction arccos.



Noch einmal: Wenn Sie den Kosinussatz benutzen, um einen Winkel zu bestimmen, dann kann jeder Winkel nur zwischen 0 und π, also zwischen 0 et 180° sein, was bedeutet, wenn Sie den Kosinus haben, kennen Sie den Winkel. Der Kosinussatz eignet sich also sehr gut für die Berechnung von Winkeln. Wir werden sehen, dass dies für den Sinussatz viel weniger zutrifft.

Notes

Summary

29m 35s

# Théorème du cosinus

Ce que nous avons appris :

- le théorème du cosinus.

Prochaine étape :

- le théorème du sinus ;
- le cercle circonscrit.



Was haben wir heute gelernt? Wir haben die erste Säule für die Berechnung eines Dreiecks, den Kosinussatz, kennengelernt. Und beim nächsten Mal werde ich Ihnen eine zweite Säule präsentieren, das ist der Sinussatz. Ich danke Ihnen, bis zum nächsten Mal!

Notes

Summary

29m 54s