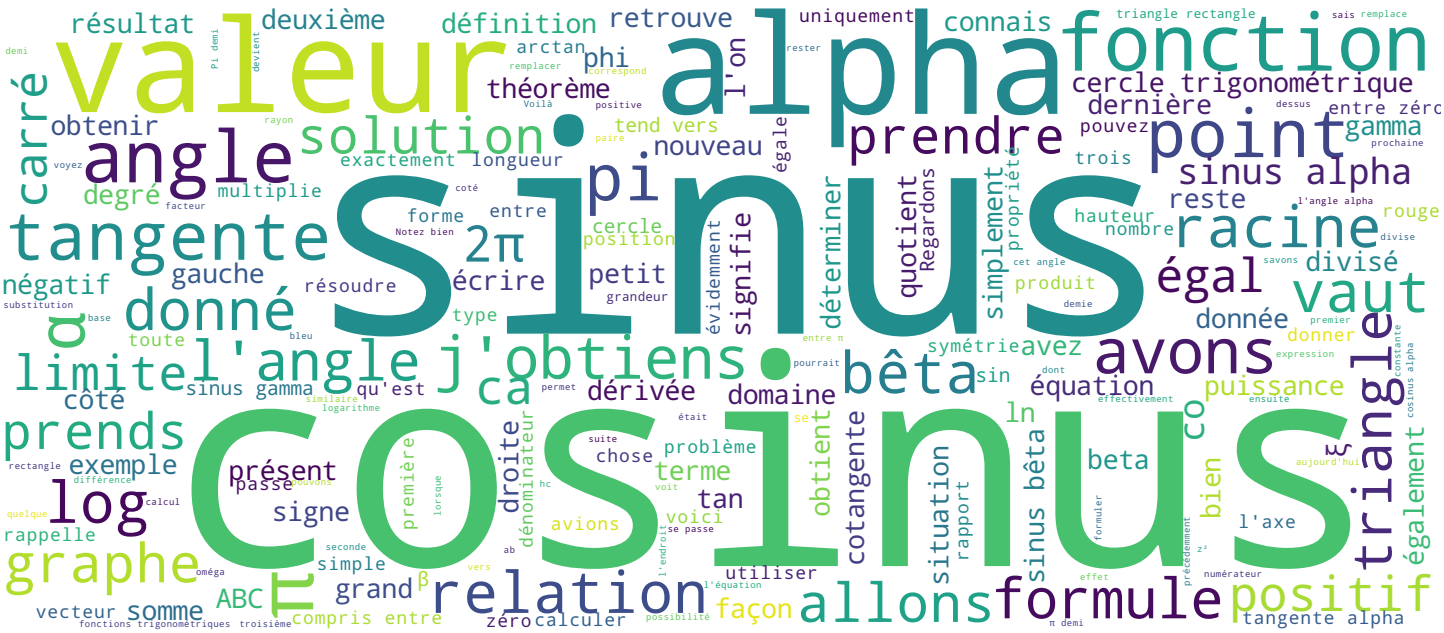
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Relations dans les triangles

7.2 Théorème du sinus, cercle circonscrit

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

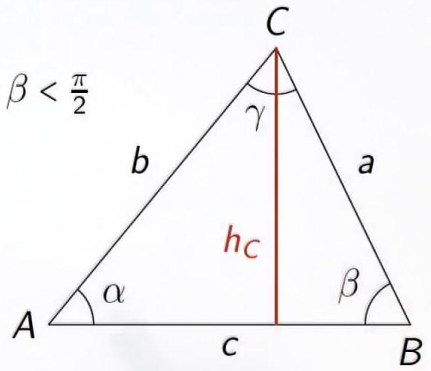
Video

EPFL

Aire du triangle

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C :

$$h_C = b \sin \alpha .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour. Soyez les bienvenus au cours : fonctions trigonométriques logarithmiques et exponentielles au chapitre 7, intitulé relations dans les triangles. La dernière fois j'ai présenté un premier pilier important intitulé le théorème du cosinus. Aujourd'hui je veux présenter l'autre pilier qui est le théorème du sinus. Pour présenter ce résultat nous considérons à nouveau le triangle *ABC* quelconque, le voici. C'est le même triangle que nous avions vu la dernière fois. Nous avons également inscrit cette hauteur *hc* que nous avons utilisée la dernière fois, je vous rappelle que la dernière fois j'ai utilisé Pythagore sur ce triangle rectangle sur la droite pour obtenir une relation qui était le théorème du cosinus. Dans ce cadre nous avions donné une formule pour *hc* à l'aide de l'angle alpha et du coté *b*. En effet le sinus de alpha est le coté opposé sur *b*, donc *hc* peut s'écrire comme *b* fois le sinus de alpha.

Notes

Summary

0m 03s

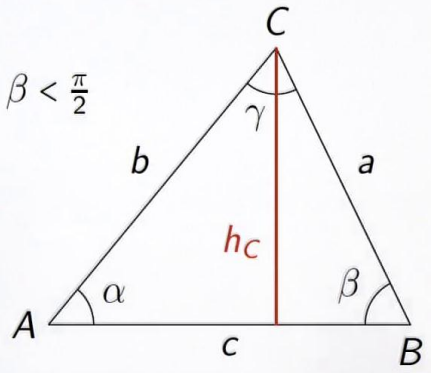
Aire du triangle

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C :

$$h_C = b \sin \alpha .$$

L'aire S du triangle ABC vaut donc

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_C = \frac{1}{2} b c \sin \alpha .$$



Cela me permet de déterminer l'aire du triangle *ABC* en calculant simplement base fois hauteur divisé par 2, c'est-à-dire que je vais avoir une demie fois *c* fois *hc*, donc le *hc* c'est *b* fois sinus alpha et j'obtiens donc cette formule : une demie *bc* sinus alpha (1/2 *b c* sinus α) Alors évidemment ici on peut de nouveau se poser la question est-ce que mon raisonnement dépend du choix du dessin, je dessine un triangle, je ne peux pas dessiner toutes les possibilités en même temps, l'élément central c'est que ici j'avais pris bêta angle aigu, qu'est ce qu'il arrive si bêta est un angle obtus ?

Notes

Summary

1m 05s

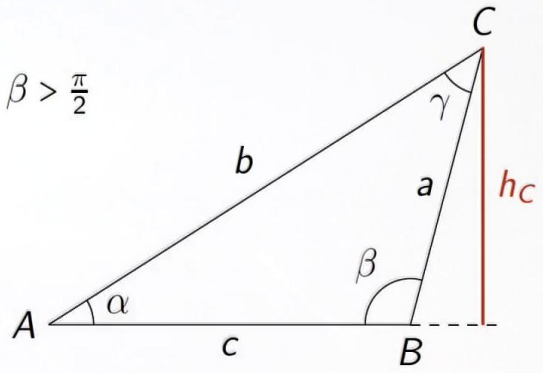
Aire du triangle

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C :

$$h_C = b \sin \alpha .$$

L'aire S du triangle ABC vaut donc

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_C = \frac{1}{2} b c \sin \alpha .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors le raisonnement reste tout à fait le même, nous avons toujours base *c* fois hauteur *hc* donc c'est exactement la même formule qui reste valable, cette formule est donc juste pour tous les triangles.

Notes

Summary

1m 42s

Aire du triangle

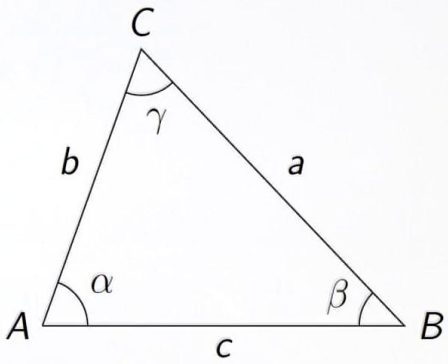
Proposition

Pour tout triangle ABC , on a en notations standard

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta\,,$$

ou encore

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad \circlearrowleft\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous pourrons formuler cela sous la forme d'une proposition, nous pourrons dire que dans un triangle *ABC* en notations standard toujours on a, que l'aire est donnée par une demie, alors nous avons plusieurs possibilités : c'est *ab* sin gamma ou *bc* sin alpha ou *ca* sin bêta. Donc on peut écrire simplement une seule formule *ab* fois sinus gamma divisé par 2 et de façon cyclique. De façon mnémotechnique, c'est simplement chaque élément est présent en quelque sorte une fois, le *a* est présent le *b* est présent le *c* est absent mais pour le *c* nous avons l'angle correspondant donc pour le *c* j'ai l'angle gamma correspondant qui est dans cette formule.

Notes

Summary

1m 52s

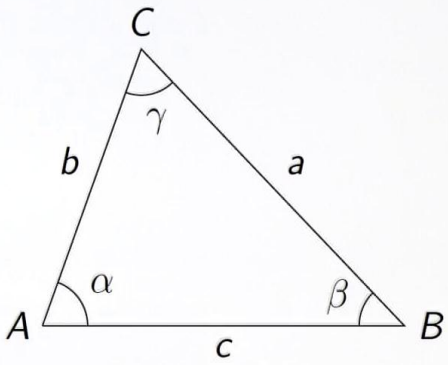
Théorème du sinus

A partir des relations

$$2S = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta\,,$$

on en déduit

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Il est intéressant de regarder d'un peu plus près cette formule, ou ces trois formules qui donnent l'aire *S*, je vais prendre la division par deux sur la gauche comme ça j'ai deux fois *S* qui est donné par *ab* sin gamma ou *bc* sin alpha ou *ca* sin bêta. On remarque tout de suite qu'il y a passablement de symétrie dans ces relations, les symétries deviennent particulièrement parlantes si on divise chaque terme par *a* fois *b* fois *c*. Donc je vais obtenir 2*S* divisé par *abc*, en effet vous voyez si la première formule est divisée par *abc*, les *ab* se simplifient, reste simplement sinus gamma sur *c*. Sur la deuxième : si je divise par *abc* il va rester simplement sinus alpha sur *a*. Pour le troisième : si je divise par *abc* il va rester simplement sinus bêta sur *b*. Donc j'obtiens ici un résultat qui cette fois-ci est vraiment remarquable, c'est que les quotients que je trouve ici c'est-à-dire sinus alpha sur *a* ou sinus bêta sur *b* ou sinus gamma sur *c*, les trois quotients dans un triangle quelconque donnent toujours la même valeur.

Notes

Summary

2m 32s

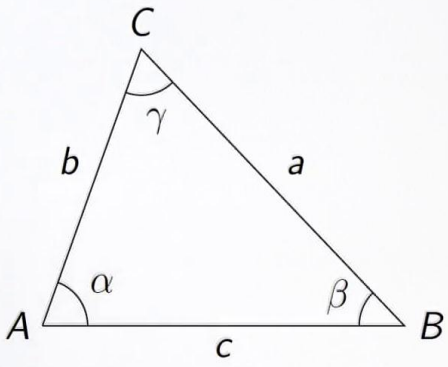
Théorème du sinus

A partir des relations

$$2S = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta,$$

on en déduit

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$



Proposition

Pour tout triangle ABC , on a en notations standard

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Notez bien que ici on pourrait aussi formuler cette proposition en écrivant que *a* sur sinus bêta donne la même chose que *b* sur sinus bêta, la même chose que *c* sur sinus gamma donc on peut utiliser l'une ou l'autre de ces formes, nous avons retenu celle-ci parce que en unité c'est un sur des mètres si on veut et effectivement ici, si vous regardez vous avez le double d'une surface qui sont comme des mètres carrés et ici des mètres cubes, donc aussi des uns sur mètre, c'est peut-être le moyen mnémotechnique pour se rappeler dans quel ordre nous avons ici 2S sur *ABC*.

Notes

Summary

3m 47s

Remarque

Dans un triangle ABC, chaque angle α, β, γ est compris entre 0 et π.
La connaissance du sinus ne permet donc pas de déterminer un angle : il y a deux possibilités.

Cependant, seul le plus grand des angles peut être plus grand que $\frac{\pi}{2}$, celui qui est opposé au plus grand des côtés.
Les autres sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et donc entièrement déterminés par la donnée de leur sinus.

Alors ici, on a maintenant une remarque importante; c'est que dans un triangle *ABC* chaque angle alpha, bêta, gamma est compris entre zéro et pi ou entre zéro et 180 degrés. Alors si je connais le sinus d'un angle malheureusement je ne peux pas en déduire la grandeur de l'angle lui-même, contrairement au cosinus, si je connais le cosinus d'un angle, un angle compris entre zéro et 180 degrés est définit de façon univoque par son cosinus, pour le sinus ce n'est pas le cas. Cependant, seul le plus grand angle peut être plus grand que pi/2 ou 90 degrés si vous préférez, et c'est précisément l'angle qui est opposé au plus grand des côtés. Les autres angles sont compris entre zéro et 90 degrés et donc entièrement déterminés par le sinus. Donc là maintenant peut-être qu'on commence à comprendre ce que j'avais déjà indiqué la dernière fois; si je détermine un angle avec le théorème du cosinus, s'il est déterminé de façon univoque donc si je ne sais pas si l'angle est grand ou petit, le théorème du cosinus est mieux adapté à la situation. Dans les autres cas le théorème du cosinus est parfaitement adapté à la situation.

Notes

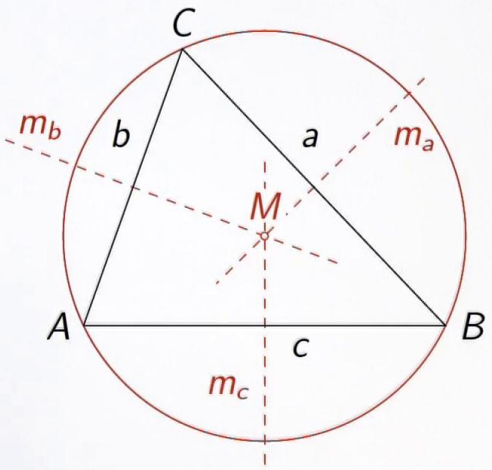
Summary

4m 21s

Cercle circonscrit

Pour tout triangle ABC,

- il existe un cercle passant par les trois sommets, le cercle circonscrit au triangle ABC,
- le centre M du cercle circonscrit se trouve à l'intersection des médiatrices m_a, m_b et m_c associées aux trois côtés a, b et c.



Venons encore à la notion de cercle circonscrit, alors là vous avez ce triangle *ABC* encore une fois en notation standard, on sait qu'il existe exactement, il existe un cercle qui passe par les trois sommets *ABC*. Pour l'obtenir on prend simplement des médiatrices, donc je prends la médiatrice *ma* du coté *a*, la médiatrice *mb* du coté *b*, la médiatrice *mc* du coté *c*, ces trois médiatrices se coupent en un seul point qui est le centre de ce cercle.

Notes

Summary

5m 28s

Rayon du cercle circonscrit

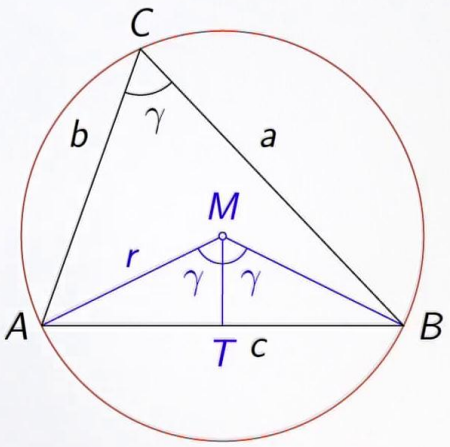
Pour tout triangle ABC,

- le triangle AMB étant isocèle, nous avons pour le triangle AMT, rectangle en T, la relation

$$r \sin \gamma = \frac{c}{2},$$

ou encore, pour le diamètre du cercle,

$$2r = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors nous pouvons à présent procéder comme suit; j'ai ici l'angle gamma sur ce cercle circonscrit et si je prends l'angle correspondant au centre c'est-à-dire l'angle qui est au-dessus de *c* ou au-dessus de l'arc ici *AB* mais au lieu d'être situé sur le cercle il est situé au centre, donc en *M*. Alors cet angle ne vaut pas gamma mais il vaut le double, il vaut 2 gamma. Dans ce triangle *AMB* je commence par remarquer qu'il est en fait isocèle. En effet j'ai ici ce côté qui est donné par le rayon du cercle tout comme l'autre côté ici est donné par le rayon du cercle. Donc je peux abaisser la hauteur qui passe par *M*, cela va nous découper ce triangle en deux triangles rectangles. Je vais considérer le triangle *AMT* donc la moitié et là je retrouve l'angle gamma et gamma puisque l'angle centre était 2 gamma et je peux alors utiliser mes relations du triangle rectangle, cette fois-ci je vais utiliser le sinus de gamma; le sinus de gamma c'est le côté opposé, c'est *AT* donc c'est la moitié de *c* divisé par *r* donc si je multiplie le sinus de gamma par *r* j'obtiens la moitié de *c*.

Notes

Summary

6m 02s

Rayon du cercle circonscrit

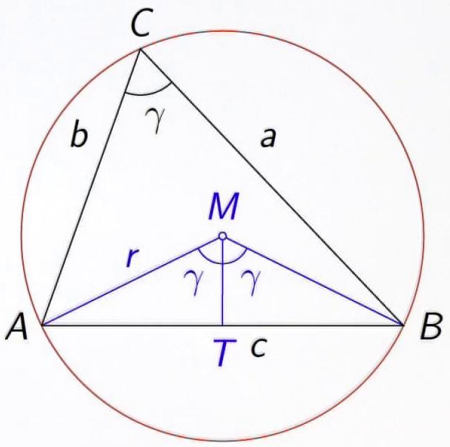
Pour tout triangle ABC,

- le triangle AMB étant isocèle, nous avons pour le triangle AMT, rectangle en T, la relation

$$r \sin \gamma = \frac{c}{2},$$

ou encore, pour le diamètre du cercle,

$$2r = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



Alors je passe de l'autre coté, je vais obtenir $2r$ égale c sur sinus gamma. Alors ce quotient c sur sinus gamma est intéressant parce que nous savons que je pourrais aussi écrire a sur sinus alpha ou b sur sinus bêta.

Notes

Summary

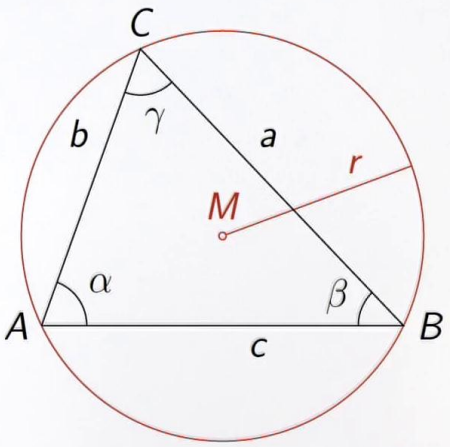
7m 31s

Théorème du sinus

Proposition

Pour tout triangle ABC , on a en notations standard

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc j'ai une interprétation géométrique, si je regarde ces trois quotients : *a* sur sinus alpha, *b* sur sinus bêta et *c* sur sinus gamma, non seulement ils sont égaux, non seulement ils valent *ABC* divisé par 2*S* mais c'est également le diamètre du cercle circonscrit. Encore une fois vous pourrez faire l'analyse des unités, ici par exemple vous avez des mètres divisés par le sinus donc des mètres et 2*r* est effectivement mesuré en mètre lui aussi.

Notes

Summary

7m 47s

Théorème du sinus

Ce que nous avons appris :

- l'aire d'un triangle ;
- le théorème du sinus ;
- le cercle circonscrit.

Prochaine étape :

- la résolution des triangles.

Qu'avons-nous appris aujourd'hui ? Alors on a appris à calculer l'aire d'un triangle avec une formule très simple : une demie *a* fois *b* fois sinus gamma ou de façon cyclique si vous préférez. On a introduit le théorème du sinus qui a une forme très simple, c'est que le quotient sinus alpha sur *a* est égal à sinus bêta sur *b* égal sinus gamma sur *c* et nous avons appris que ce quotient, en tout cas si on l'écrit dans le bon ordre c'est-à-dire sous la comparaison de *a* sur sinus alpha égale *b* sur sinus bêta, dans ce cas-là ce quotient donne le diamètre du cercle circonscrit. Alors la prochaine fois je vais présenter quelques exemples : comment résoudre des triangles c'est-à-dire comment déterminer les éléments manquants d'un triangle. À la prochaine.

Notes

Summary

8m 19s