Relations dans les triangles

7.2 Théorème du sinus, cercle circonscrit

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

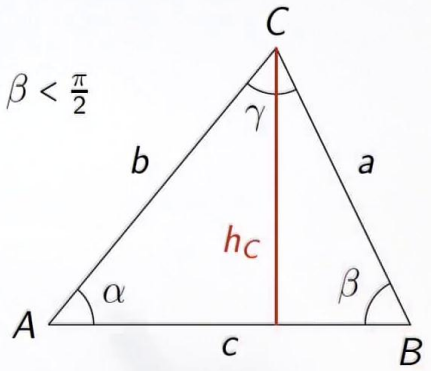
Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

Aire du triangle

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C :

$$h_C = b \sin \alpha .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Guten Tag, Willkommen im Kurs: trigonometrische logarithmische und Exponentialfunktionen Kapitel 7 mit dem Titel Beziehungen in Dreiecken. Das letzte Mal habe ich einen ersten wichtigen Pfeiler vorgestellt der Cosinussatz genannt wird. Heute möchte ich Ihnen den anderen Pfeiler präsentieren, den Sinussatz. Um dieses Ergebnis zu präsentieren betrachten wir wieder das beliebige Dreieck *ABC*, hier ist es. Dies ist dasselbe Dreieck, das wir beim letzten Mal sahen. Wir haben auch diese Höhe *hc* aufgezeichnet das wir das letzte Mal benutzt haben, ich erinnere Sie daran, dass ich das letzte Mal den Pythagoras benutzt habe bei diesem rechtwinkligen Dreieck auf der rechten Seite um eine Beziehung zu erhalten, die der Cosinussatz war. In diesem Zusammenhang haben wir eine Formel für *hc* gegeben mit Hilfe des Winkels Alpha und der Seite *b*. Tatsächlich ist der Sinus von Alpha auf der gegenüberliegenden Seite *b* also *hc* kann geschrieben werden als *b* mal dem Sinus von Alpha.

Notes

Summary

0m 03s

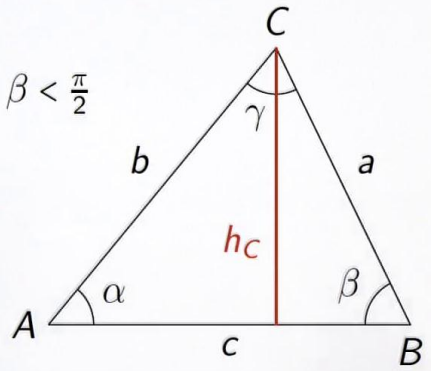
Aire du triangle

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C :

$$h_C = b \sin \alpha .$$

L'aire S du triangle ABC vaut donc

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_C = \frac{1}{2} b c \sin \alpha .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Dies ermöglicht mir, den Bereich des Dreieck *ABC* zu bestimmen indem man einfach die Basis mal die Höhe durch 2 geteilt berechnet, das heißt, dass ich ein halb mal *c* mal *hc* haben werde also das *hc* ist *b* mal Sinus Alpha und ich erhalte dann diese Formel: ein Halb *bc* Sinus Alpha (1/2 *b c* Sinus α) So offensichtlich können wir hier wieder die Frage stellen hängt meine Argumentation ab von der Wahl der Zeichnung, ich zeichne ein Dreieck, Ich kann nicht alle Möglichkeiten zur gleichen Zeit zeichnen, das zentrale Element ist, dass ich hier den spitzen Winkel Beta genommen habe, was passiert, wenn Beta ein stumpfer Winkel ist?

Notes

Summary

1m 05s

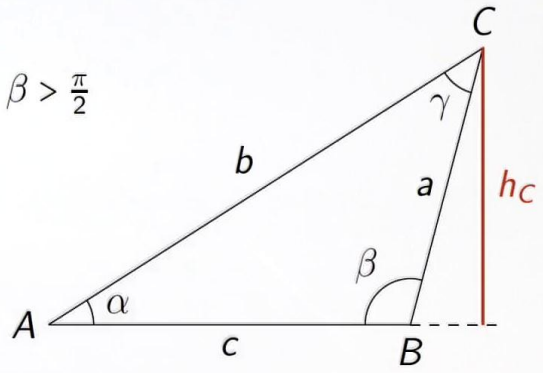
Aire du triangle

Dans un triangle ABC, considérons la hauteur h_C issue de C :

$$h_C = b \sin \alpha .$$

L'aire S du triangle ABC vaut donc

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_C = \frac{1}{2} b c \sin \alpha .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nun, die Begründung bleibt ganz und gar gleich, wir haben immer noch die Basis *c* mal die Höhe *hc* Also das ist genau die gleiche Formel, die gültig bleibt, diese Formel gilt dann für alle Dreiecke.

Notes

Summary

1m 42s

Aire du triangle

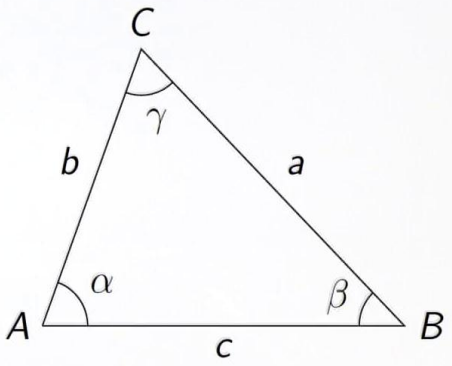
Proposition

Pour tout triangle ABC , on a en notations standard

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta\,,$$

ou encore

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad \circlearrowleft\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir können dies dann in Form eines Vorschlags formulieren, wir können sagen, dass in einem Dreieck *ABC* in Standard-Notation hat man immer, dass der Bereich durch eine Hälfte gegeben ist, dann haben wir mehrere Möglichkeiten: ist *ab* sin Gamma oder *bc* sin Alpha oder *ca* sin Beta. Dann kann man also einfach eine einzige Formel notieren *ab* mal Sinus Gamma geteilt durch 2 und zyklisch. Mnemotechnisch ist es so, dass jedes Element einfach gewissermaßen einmal vorhanden ist. das *a* ist vorhanden, das*b* ist vorhanden das *c* ist nicht vorhanden, aber für das *c* haben wir den korrespondierenden Winkel Also für das *c* habe ich den korrespondierenden Gamma-Winkel, der in dieser Formel ist.

Notes

Summary

1m 52s

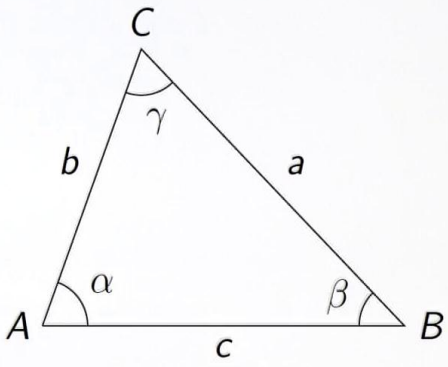
Théorème du sinus

A partir des relations

$$2S = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta,$$

on en déduit

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$



Es ist interessant, diese Formel ein wenig näher zu beobachten oder diese drei Formeln die den Bereich *S* ergeben, Ich werde die Division durch zwei auf der linken Seite durchführen so habe ich zwei mal *S* was durch *ab* sin Gamma oder *bc* sin Alpha oder *ca* sin Beta gegeben ist. Man merkt sofort dass es eine ziemlich gute Symmetrie ergibt in diesen Beziehungen, die Symmetrien werden besonders anschaulich wenn man jeden Term dividiert durch *a* mal *b* mal *c*. Dann erhalte ich 2*S* dividiert durch *abc*, in der Tat sehen Sie, wenn die erste Formel geteilt ist durch *abc*, die *ab* vereinfachen sich, bleibt einfach Sinus Gamma *c*. Zum Zweiten: wenn ich durch *abc* teile wird einfach Sinus Alpha auf *a* bleiben. Zum Dritten: wenn ich durch *abc* teile wird einfach Sinus Beta auf *b* bleiben. Also erhalte ich ein Ergebnis, das dieses Mal wirklich bemerkenswert ist, es sind nur Quotienten, die ich hier finde das heißt Sinus Alpha auf *a* oder Sinus Beta auf *b* oder Sinus Gamma auf *c*, die drei Quotienten in einem beliebigen Dreieck ergeben immer den gleichen Wert.

Notes

Summary

2m 32s

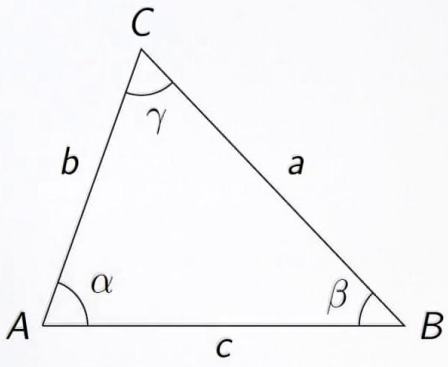
Théorème du sinus

A partir des relations

$$2S = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta,$$

on en déduit

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$



Proposition

Pour tout triangle ABC , on a en notations standard

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Beachten Sie, dass man hier auch diesen Vorschlag formulieren kann, indem man *a* auf Sinus Beta ergibt das gleiche schreibt wie wenn man *b* auf Sinus Beta, das Gleiche ist wie *c* auf Sinus Gamma also kann man das ein oder andere dieser Formen benutzen wir wählen dieses hier weil es in der Einheit eines mehrerer Meter ist, wenn Sie so wollen und in der Tat hier, wenn Sie schauen haben Sie das Doppelte einer Fläche die wie Quadratmeter sind und hier Kubikmeter, daher auch Eins pro Meter, das ist vielleicht das mnemotechnische Mittel sich zu merken, in welcher Reihenfolge wir hier 25 auf *ABC* haben.

Notes

Summary

3m 47s

Remarque

Dans un triangle ABC, chaque angle α, β, γ est compris entre 0 et π.
La connaissance du sinus ne permet donc pas de déterminer un angle : il y a deux possibilités.

Cependant, seul le plus grand des angles peut être plus grand que $\frac{\pi}{2}$, celui qui est opposé au plus grand des côtés.
Les autres sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et donc entièrement déterminés par la donnée de leur sinus.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier haben wir also jetzt einen wichtigen Hinweis; und zwar dass in einem Dreieck *ABC* jeder Winkel Alpha, Beta, Gamma zwischen Null und Pi liegt oder zwischen Null und 180 Grad. Wenn ich nun das Sinus des Winkels kenne leider kann ich davon nicht die Größe des Winkels selbst abziehen, im Gegensatz zum Kosinus, wenn ich den Kosinus eines Winkels kenne, ein Winkel, der zwischen Null und 180 Grad liegt ist eindeutig definiert durch seinen Kosinus, für den Sinus ist dies nicht der Fall. Jedoch nur der größte Winkel kann größer als Pi/2 oder 90 Grad sein, wenn Sie es vorziehen, und das ist genau der Winkel der am weitesten entgegengesetzt ist zu den Seiten. Die anderen Winkel sind zwischen Null und 90 Grad und daher voll und ganz durch den Sinus bestimmt. So kann es nun sein, dass wir hier beginnen, es zu verstehen, was ich bereits das letzte Mal angedeutet habe; wenn ich einen Winkel mit dem Satz des Kosinus bestimme, wenn er eindeutig bestimmt ist also, wenn ich nicht weiß, ob der Winkel groß oder klein ist, dann ist der Kosinussatz am Besten in der Situation geeignet. In den anderen Fällen ist der Kosinussatz perfekt geeignet für die Situation.

Notes

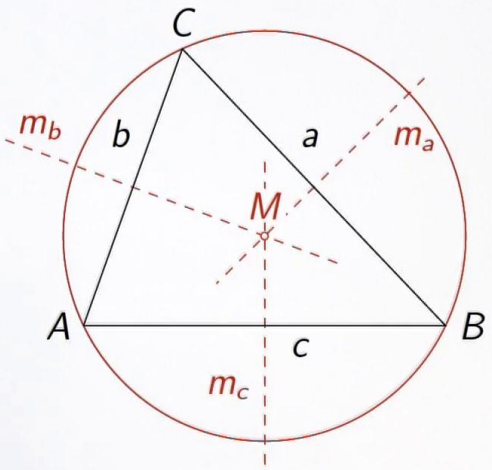
Summary

4m 21s

Cercle circonscrit

Pour tout triangle ABC,

- il existe un cercle passant par les trois sommets, le cercle circonscrit au triangle ABC,
- le centre M du cercle circonscrit se trouve à l'intersection des médiatrices m_a, m_b et m_c associées aux trois côtés a, b et c.



Kommen wir noch auf den Begriff des umschriebenen Kreises, hier haben Sie das Dreieck *ABC* wieder in Standard-Notation, man weiss, dass es genau existiert, es existiert ein Kreis, der durch die drei Spitzen *ABC* durchgeht. Um es zu erhalten nimmt man einfach die Mittelsenkrechten, also ich nehme die Mittelsenkrechte *ma* der Seite *a*, die Mittelsenkrechte *mb* der Seite *b*, die Mittelsenkrechte *mc* der Seite *c*, diese drei Mittelsenkrechten schneiden sich an einem einzigen Punkt nämlich dem Zentrum des Kreises.

Notes

Summary

5m 28s

Rayon du cercle circonscrit

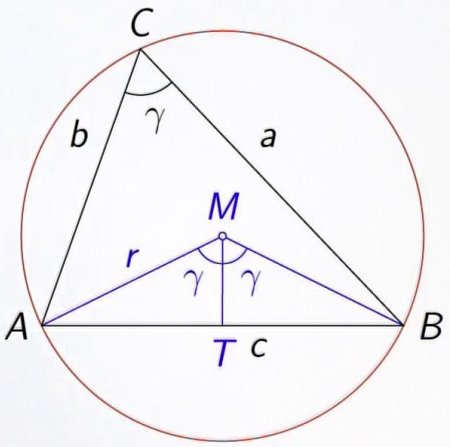
Pour tout triangle ABC,

- le triangle AMB étant isocèle, nous avons pour le triangle AMT, rectangle en T, la relation

$$r \sin \gamma = \frac{c}{2},$$

ou encore, pour le diamètre du cercle,

$$2r = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

So können wir jetzt wie folgt vorgehen: ich habe hier den Winkel Gamma auf diesem umschriebenen Kreis und wenn ich den korrespondierenden Winkel im Zentrum nehme das heißt der Winkel, der oberhalb von *c* ist oder oberhalb des Bogens *AB* hier ist aber statt auf dem Kreis angeordnet zu sein, liegt er im Zentrum, also in *M*. So ist dieser Winkel nicht Gamma aber es ist das Doppelte, nämlich 2 Gamma. In diesem Dreieck *AMB* bemerke ich zum ersten Mal dass es tatsächlich gleichschenklig ist. Tatsächlich habe ich hier dies Seite, die gegeben ist durch den Radius des Kreises so wie die andere Seite hier gegeben ist durch den Radius des Kreises. So kann ich die Höhe vermindern, die durch *M* geht das wird unser Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerschneiden. Ich werde das Dreieck *AMT* als die Hälfte betrachten und da finde ich den Winkel Gamma und Gamma da der zentrale Winkel 2 Gamma betrug und ich kann nun meine Beziehungen des rechtwinkligen Dreiecks benutzen Dieses Mal werde ich den Sinus Gamma verwenden; der Sinus von Gamma ist die gegenüberliegende Seite, es ist *AT* es ist also die Hälfte von *c* dividiert durch *r* wenn ich also den Sinus von Gamma mit *r* multipliziere erhalte ich die Hälfte von *c*.

Notes

Summary

6m 02s

Rayon du cercle circonscrit

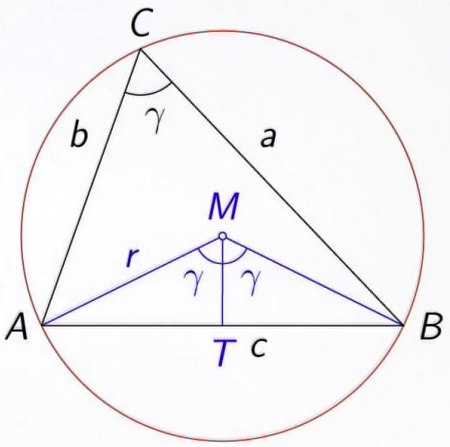
Pour tout triangle ABC,

- le triangle AMB étant isocèle, nous avons pour le triangle AMT, rectangle en T, la relation

$$r \sin \gamma = \frac{c}{2},$$

ou encore, pour le diamètre du cercle,

$$2r = \frac{c}{\sin \gamma}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nun gehe ich zur anderen Seite, ich werde 2*r* gleich*c* auf Sinus Gamma erhalten. Also, dieser Quotient *c* auf Sinus Gamma ist interessant, weil wir wissen, dass ich auch *a* auf Sinus Alpha schreiben könnte oder *b* auf Sinus Beta.

Notes

Summary

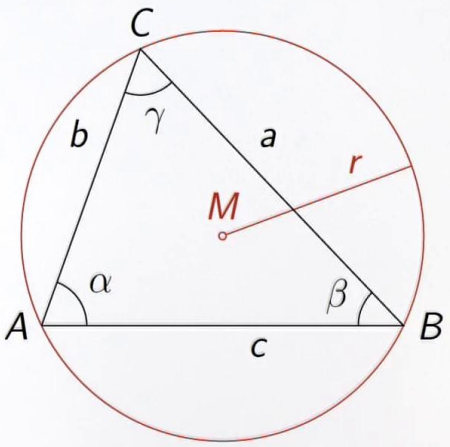
7m 31s

Théorème du sinus

Proposition

Pour tout triangle ABC , on a en notations standard

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Also habe ich eine geometrische Interpretation, wenn ich diese drei Quotienten betrachte: *a* auf Sinus Alpha, *b* auf Sinus Beta und *c* auf Sinus Gamma, sie sind nicht nur gleich, sie sind nicht nur *B* geteilt durch 2*S* sondern sie sind auch der Durchmesser des umschriebenen Kreises. Sie können noch einmal die Analyse der Einheiten durchführen, hier zum Beispiel haben Sie Meter dividiert durch den Sinus, also Meter und 2*r* ist tatsächlich auch in Metern gemessen.

Notes

Summary

7m 47s

Théorème du sinus

Ce que nous avons appris :

- l'aire d'un triangle ;
- le théorème du sinus ;
- le cercle circonscrit.

Prochaine étape :

- la résolution des triangles.

Was haben wir heute gelernt? Wir haben gelernt, die Fläche eines Dreiecks mit einer einfachen Formel zu berechnen: ein Halb *a* mal *b* mal Sinus Gamma oder zyklisch wenn Sie es bevorzugen. Wir haben den Sinussatz eingeführt der eine einfache Form besitzt, es ist der Quotient Sinus Alpha auf *a* ist gleich Sinus Beta auf *b* gleich Sinus Gamma auf *c* und wir haben gelernt, dass dieser Quotient auf jeden Fall, wenn man ihn in der richtigen Reihenfolge schreibt das heißt im Vergleich zu *a* auf Sinus Alpha gleich *b* auf Sinus Beta, in diesem Fall ergibt der Quotient den Durchmesser des umschriebenen Kreises. Nun, bis zum nächsten Mal ich werde einige Beispiele präsentieren: wie man wie Dreiecke löst das heißt, wie man die fehlenden Elemente eines Dreiecks bestimmt. Bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

8m 19s