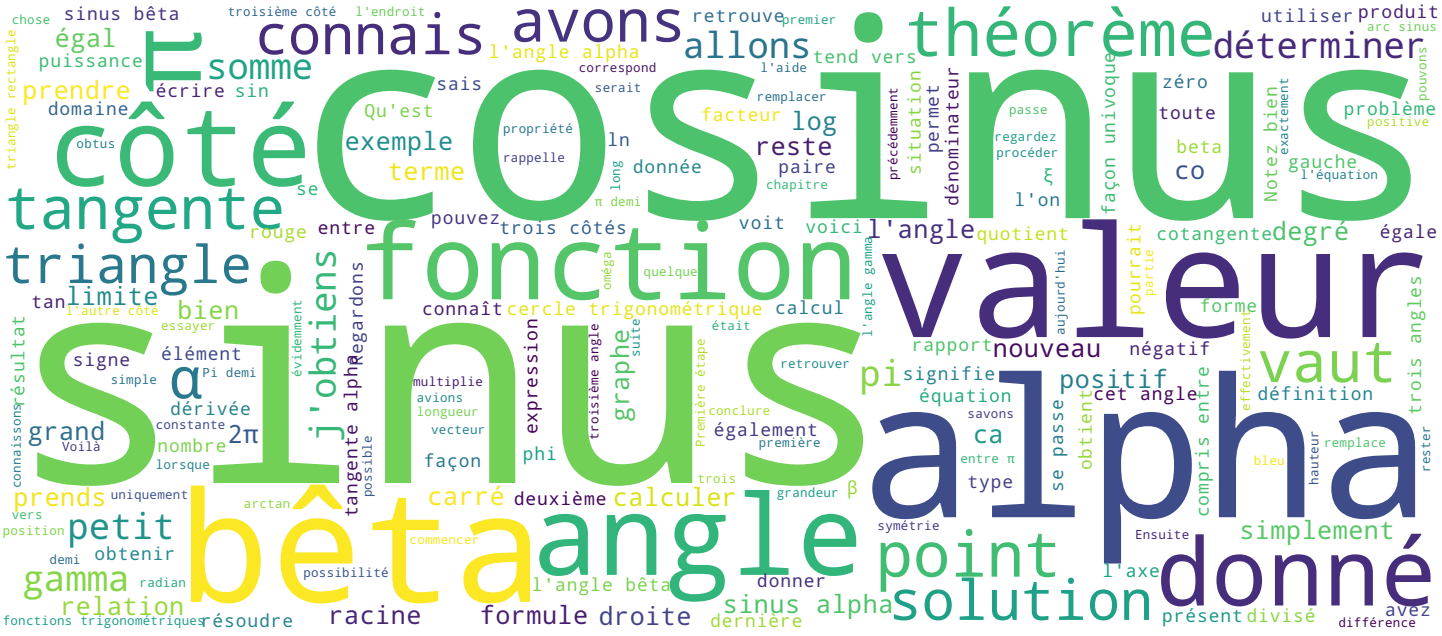
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Relations dans les triangles

7.3 La résolution de triangles

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Outils pour la résolution de triangles

Pour un triangle ABC défini par la donnée de certains angles et côtés, il s'agit de déterminer tous les angles et tous les côtés manquants : on parle de la "résolution du triangle".

Nous avons à disposition le outils suivants :

- le théorème du cosinus,
- le théorème du sinus,
- la somme des angles égale à 180°.

Dans la mesure du possible, nous préférerons l'emploi du théorème du sinus, plus simple pour les calculs.

Si celui-ci ne permet pas d'obtenir une solution unique, nous ferons appel au théorème du cosinus.

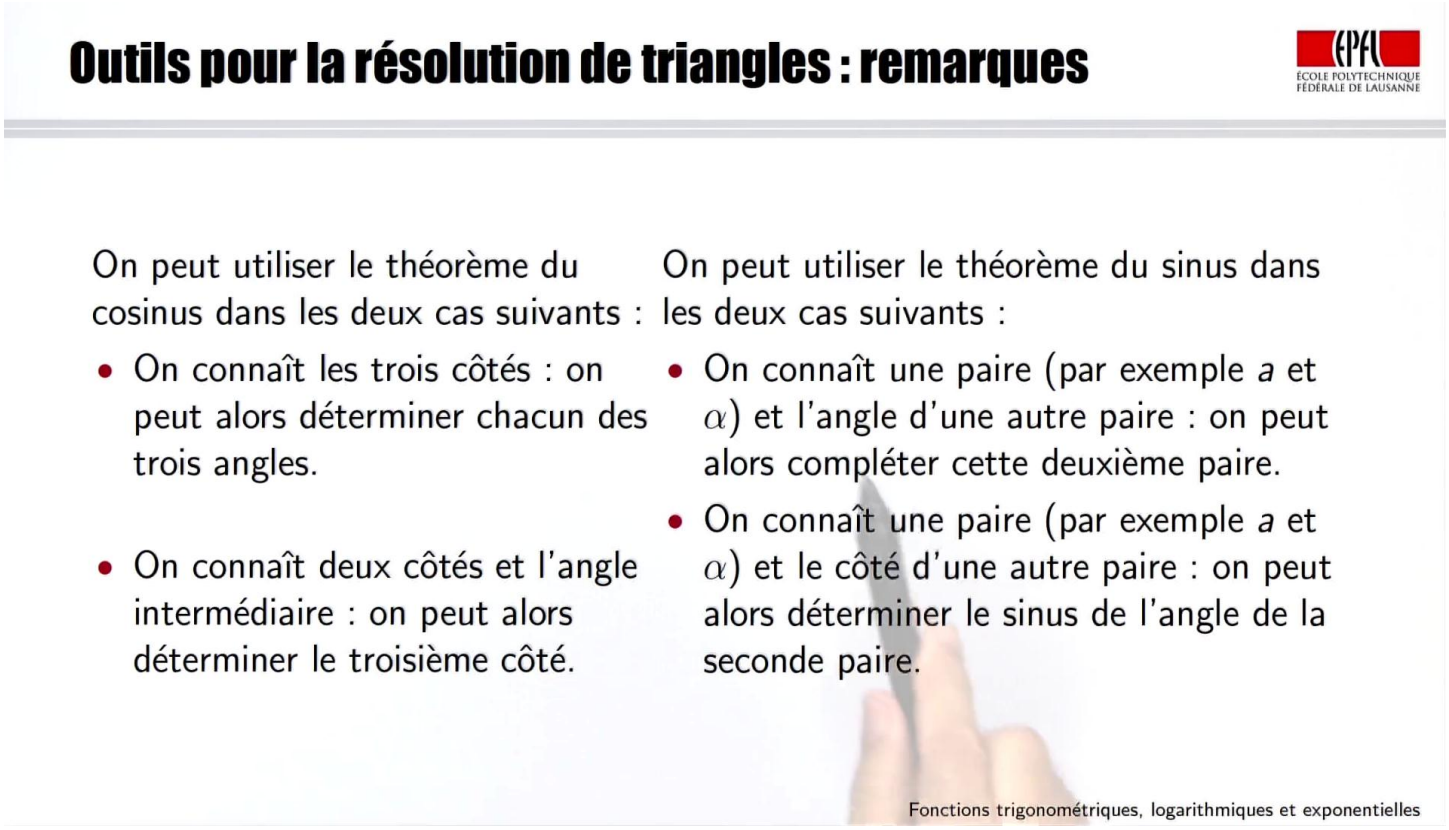
Bonjour. Aujourd'hui nous allons parler de la résolution de triangles. Mais, au fait, qu'est-ce que cela signifie << Résoudre un triangle ? >> Un triangle, disons ABC, dans des notations standards, contient trois côtés, et trois angles donc si l'on connaît les trois côtés et les trois angles on connaît le tout de ce triangle. Mais usuellement, on se contente de donner uniquement certains de ces éléments, c'est-à-dire qu'on donne certains angles et côtés et notre rôle est de déterminer les angles et les côtés manquants et c'est là qu'on parle de la résolution de triangle. Pour résoudre un triangle, nous avons à disposition trois outils : Nous avons d'abord le théorème du cosinus. Je vous l'ai présenté l'avant dernière fois. Ensuite, nous avons le théorème du sinus, nous en avons parlé la dernière fois. Finalement, nous savons que la somme des angles dans un triangle vaut 180°. Cela signifie que si on connait deux angles, on connaît le troisième. Remarquons quand même, que dans la mesure du possible, nous préférons l'emploi du théorème du sinus qui est plus simple pour les calculs, il est plus symétrique et permet d'aboutir plus rapidement aux résultats mais, il a aussi un défaut : il ne permet pas toujours d'obtenir une solution unique, nous le verrons encore une fois aujourd'hui. Dans ce cas là, il faudra bifurquer sur le théorème du cosinus.

Notes

Summary

0m 03s

Outils pour la résolution de triangles : remarques



Rappelons quand même quelques éléments sur ces outils dont nous disposons. Commençons sur la partie ici à gauche qui concerne le théorème du cosinus. Quand est ce que je peux l'utiliser ? Il y a deux cas standards où je peux utiliser ce théorème : D'abord, on connaît les trois côtés. Dès qu'on les connaît, on peut déterminer chaque angle à l'aide du théorème du cosinus. Vous prenez le théorème du cosinus, et vous pouvez le résoudre par rapport au cosinus. Le cosinus s'exprime uniquement par une combinaison des trois côtés. Deuxième situation : On connaît deux côtés, et l'angle compris entre ces deux côtés, c'est ce que j'ai appelé ici l'angle intermédiaire. C'est la situation standard pour ce théorème du cosinus et on peut alors déterminer le troisième côtés qui manque. Regardons maintenant sur la partie à droite qui concerne le théorème des sinus. Là aussi on peut l'utiliser dans deux cas. Je vous présentes de nouveau les règles d'applications. Si on connaît une paire, j'entends par exemple a et alpha aussi b et bêta, ou c et gamma, si on connaît une paire, et si on connaît l'angle d'une autre paire alors on peut compléter cette deuxième paire donc on peut calculer le côté correspondant.

Notes

Summary

1m 31s

Outils pour la résolution de triangles : remarques

On peut utiliser le théorème du cosinus dans les deux cas suivants :

- On connaît les trois côtés : on peut alors déterminer chacun des trois angles.
- On connaît deux côtés et l'angle intermédiaire : on peut alors déterminer le troisième côté.

On peut utiliser le théorème du sinus dans les deux cas suivants :

- On connaît une paire (par exemple a et α) et l'angle d'une autre paire : on peut alors compléter cette deuxième paire.
- On connaît une paire (par exemple a et α) et le côté d'une autre paire : on peut alors déterminer le sinus de l'angle de la seconde paire.

Deuxième situation : on connaît de nouveau une paire, par exemple a et alpha et le côté d'une autre paire, disons b. Dans ce cas là, on peut déterminer le sinus de l'angle de la seconde paire. Le sinus de bêta.

Notes

Summary

3m 01s

Outils pour la résolution de triangles : remarques

Avantage du théorème du cosinus pour la détermination d'un angle :
Il permet de déterminer le cosinus d'un angle manquant, si bien que cet angle est déterminé de façon univoque.

Désavantage du théorème du sinus pour la détermination d'un angle :
Il permet de déterminer le sinus d'un angle manquant, si bien que cet angle n'est pas déterminé de façon univoque (à moins d'avoir des informations supplémentaires).

Cela m'amène sur les avantages et désavantages du théorème du cosinus et du sinus pour la détermination d'un angle. Le théorème du cosinus permet de déterminer le cosinus d'un angle manquant, si bien que cet angle est connus de façon univoque. L'angle dans un triangle est contenue entre 0 et 180 degrés, si je connais le cosinus, je connais l'angle. Le théorème du sinus, là, est plus faible. Il permet de déterminer le sinus d'un angle manquant si bien que cet angle n'est pas déterminé de façon univoque à moins d'avoir des informations supplémentaires. À moins de savoir, par exemple, que ce n'est pas l'angle le plus grand.

Notes

Summary

3m 17s

Détermination des triangles

Un triangle ABC est entièrement déterminé dans les trois cas suivants, en notations standard :

- on en connaît les trois côtés
- on en connaît deux côtés et l'angle entre ces côtés
- on en connaît un côté et deux angles.

Nous allons analyser chacun de ces cas !

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Si on veut donner un triangle de façon univoque, quels sont les éléments qu'il faut donner pour être sûr que le triangle est déterminé de façon univoque ? Les réponses sont bien connues : Première possibilité, c'est de donner les trois côtés. Si on donne les trois côtés d'un triangle, ce triangle est univoquement déterminé. Il n'y a qu'une seule possibilité pour les angles alpha, bêta et gamma. On peut aussi donner deux côtés et l'angle entre ces deux côtés. Dans cette situation, de nouveau, les trois côtés et les trois angles vont être connus. Finalement, on peut donner un côté et deux angles, n'importe lesquels soit dit en passant, dès qu'on donne deux angles, étant donné que la somme des angles vaut 180, on a déjà les trois angles, dès qu'on a deux angles, et un côté le triangle se construit de nouveau de façon univoque. Chacun de ces trois cas, je vais les analyser et montrer comment on peut déterminer les éléments manquants.

Notes

Summary

3m 57s

Premier cas : Triangle défini par ses trois côtés

Admettons que a, b et c sont donnés, avec $a < b < c$.

Le triangle ABC est défini si l'inégalité du triangle est vérifiée :

$$a + b > c.$$

On détermine alors

1. l'angle γ, le plus grand des angles, par le théorème du cosinus,

Commençons par le premier cas : On donne là le triangle en donnant les trois côtés, en notation standard, on va donner a,b, c. Pour simplifier la discussion, on va admettre que a est le côté le plus petit, et c est le côté le plus grand. Si, dans la donnée, cela n'est pas vérifié il suffit d'adapter l'argument. Notez bien que si la somme de a et b, si la somme des deux côtés qui sont plus petits que c était inférieur ou égale à c, on ne serait pas en présence d'un véritable triangle. Il faut toujours que la somme des deux plus petits dépasse le troisième côté. Supposons que nous avons trois grandeurs qui donnent effectivement de façon unique un triangle, comment procéder pour déterminer ce qu'il manque ? C'est-à-dire les trois angles. On va commencer par l'angle qui est le plus grand. Ici, c'est le côté le plus grand donc je commence par gamma. Je ne peux pas utiliser le théorème du sinus ici, je ne connais aucune paire à alpha ni b bêta, ni c gamma donc je dois utiliser le théorème du cosinus, je vais l'utiliser pour l'angle gamma qui est le plus grand. Le théorème du cosinus va me donner le cosinus de cet angle gamma. De ce fait, je vais pouvoir déterminer gamma de façon univoque.

Notes

Summary

4m 55s

Premier cas : Triangle défini par ses trois côtés

Admettons que a, b et c sont donnés, avec $a < b < c$.

Le triangle ABC est défini si l'inégalité du triangle est vérifiée :

$$a + b > c .$$

On détermine alors

1. l'angle γ, le plus grand des angles, par le théorème du cosinus,
2. un autre angle, p.ex. α, par le théorème du sinus,
3. le troisième angle, β, par $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Ensuite, j'ai une paire, c'est gamma, je peux déterminer un deuxième angle, disons alpha, par le théorème du sinus. Le troisième angle, je le détermine par le fait que la somme des trois angles vaut 180 degrés.

Notes

Summary

6m 16s

Reprise de l'exemple 2

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 3, \qquad b = 6, \qquad c = 4.$$

Déterminons les angles α, β et γ.

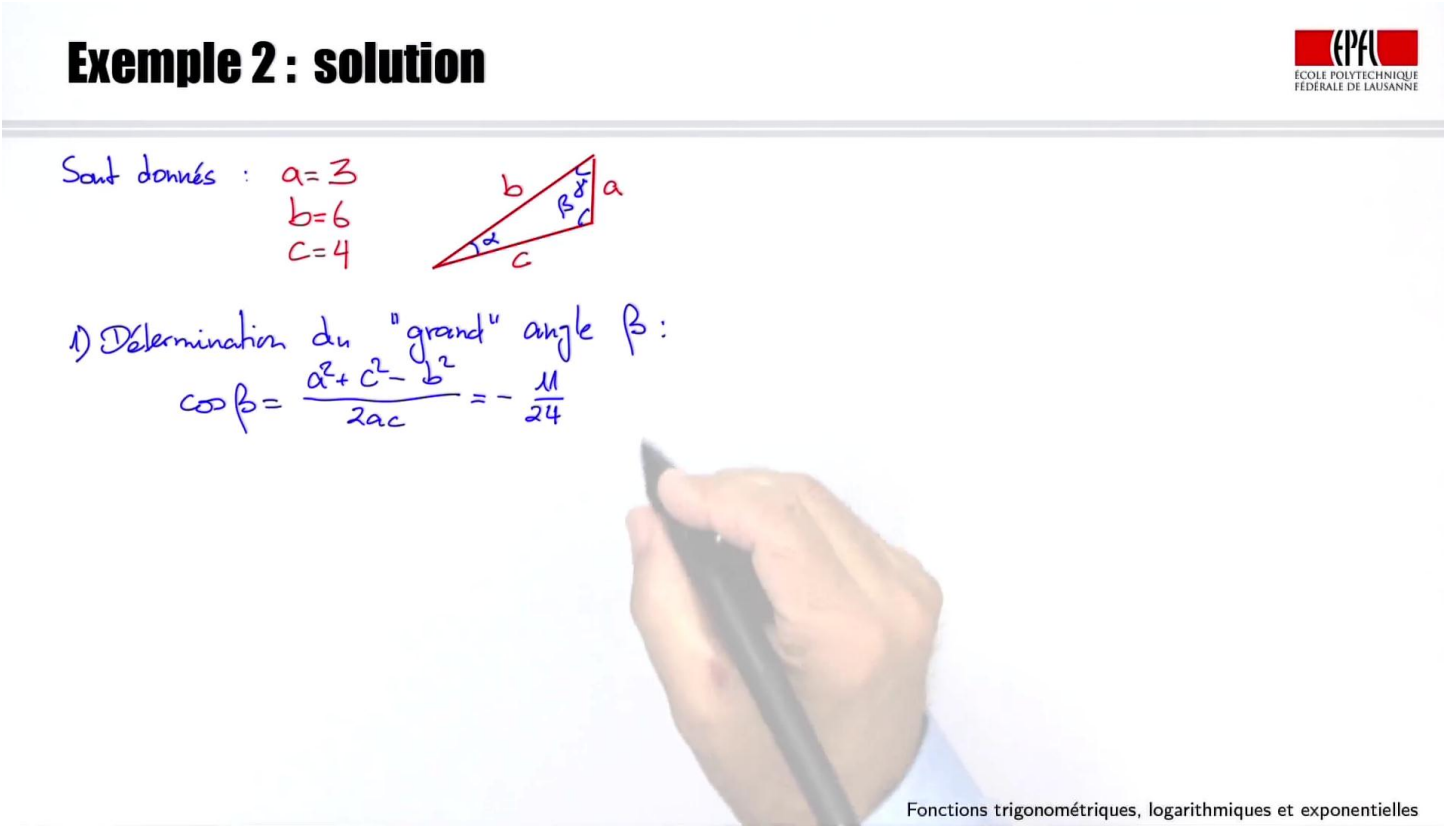
Regardons ça d'un peu plus près sur un exemple avec des chiffres; On va dire que a vaut 3 b vaut six, et c vaut 4. Ici on voit tout de suite, on a pas tout à fait l'ordre que j'avais avant, en fait c'est b qui est le côté le plus grand.

Notes

Summary

6m 33s

Exemple 2 : solution



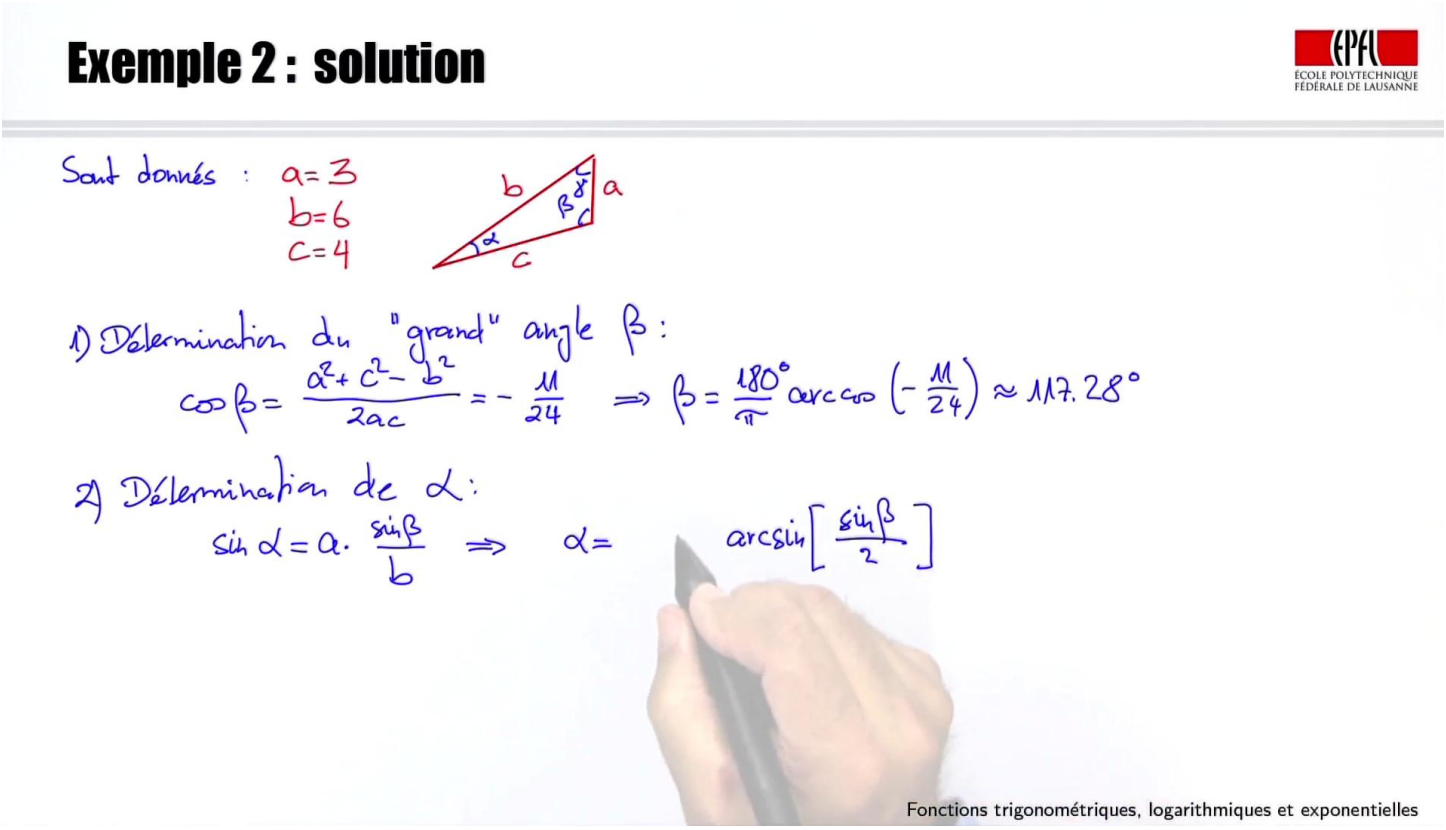
Notez bien que j'écris ici l'exemple 2, en fait c'est un exemple que j'ai déjà présenté lors d'une des dernières séquences, vous pouvez le retrouver là bas. Vous allez voir qu'ici, la méthode utilisée est plus économe. Rappelons ce qui est donné : Je sais que a vaut 3, que b vaut 6, et que c vaut 4. J'ai un côté b qui est très long, c'est ça J'ai un côté c, de longueur intérmediaire et j'ai un côté a qui est le plus court. Ça pourrait être une configuration de ce type, ici j'ai b, c, ici a. Je ne connais aucun angle, ni alpha, ni bêta, ni gamma. Je vais commencer par calculer le grand angle. Première étape : détermination de l'angle bêta. Cest l'unique angle qui pourrait être obtus. Nous allons nous servir du théorème du cosinus : pour bêta, le théorème nous donne que le cosinus de bêta est donné par : $a^2 + c^2 - b^2$, le tout divisé par 2 x a x c Vous pouvez introduire les valeurs de a, b et c dans cette fraction. Vous allez trouver ici moins 11 sur 24. Le cosinus est négatif, l'angle va être obtus. On peut dire que bêta est donné, nous allons prendre l'arc cos de moins 11 sur 24, arc cos nous rend un angle en radiant, dans le calcul de triangle, nous préferons travailler en degrés donc je vais transformer ces radians en degrés par ce facteur, 100 étant le degré divisé par π.

Notes

Summary

6m 51s

Exemple 2 : solution



Vous prenez une calculatrice, vous faites le tout et vous allez trouver 117, 28 degrés. Notez bien qu'une calculette vous pouvez la régler usuellement en sorte que arc cosinus d'un nombre entre moins 1 et 1 vous rend l'angle en degrés immédiatement sans ce facteur de correction. Deuxième étape : la dernière fois, on avait utilisé le théorème du cosinus encore une deuxième fois, ici, je connais une paire, b bêta. Je peux déterminer un autre angle - disons alpha. Calculons, le théorème du sinus va dire que sinus alpha divisé par a est égal au sinus de bêta sur b donc le diviser par a, je le prends sur le terme à droite Il me reste un sinus bêta sur b. Là, je prends la paire connue, b bêta je peux calculer le terme qui est à droite et j'obtiens le sinus de alpha. Alpha, cette fois-ci je suis sûr, compris entre 0 et 90°, il est dans le premier quadrant. Arc sinus me donnera immédiatement la bonne réponse. Je vais prendre arc sinus de cette expression que j'ai trouvé qui était : si vous regardez a sur b donne en faite une demie donc vous avez ce sinus bêta, nous l'avons déterminé ci-dessus, divisé par deux. De nouveau, je prends ce facteur de conversion de radians en degrés, à l'aide d'une calculatrice, je trouve ici : 26, 38 degrés.

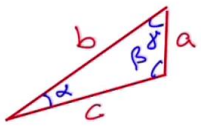
Notes

Summary

9m 16s

Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$



1) Détermination du "grand" angle β :

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \beta = \frac{180^\circ}{\pi}\arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \approx 117.28^\circ$$

2) Détermination de α :

$$\sin\alpha = a\cdot\frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{\pi}\arcsin\left[\frac{\sin\beta}{2}\right] \approx 26.38^\circ$$

3) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 36.34^\circ$

Il ne reste plus qu'a calculer le troisième angle qui manque; gamma, je vais dire que c'est 180 moins alpha moins bêta. Cela va me donner 36, 34 degrés. J'ai pu déterminer l'angle bêta, l'angle alpha et l'angle gamma, l'exercice est ainsi résolu !

Notes

Summary

11m 02s

Deuxième cas : Triangle défini par deux côtés et un angle

Admettons que a et b sont donnés, avec $a < b$.

Le triangle ABC est défini si l'angle γ entre a et b est également donné.

On détermine alors

1. le troisième côté c par le théorème du cosinus,
2. l'angle α, ce n'est pas le plus grand, par le théorème du sinus,
3. le troisième angle β par $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Venons-en au deuxième cas: Le deuxième cas, c'est le cas où le triangle est donné par deux côtés, et l'angle compris entre ces deux côtés. En notation standard, on peut dire que les deux côtés donnés sont a et b, si ce sont deux autres côtés, il faut adapter la procédure, mais deux côtés, on va supposer que a est le plus petit, plus petit que b. L'angle entre ces deux côtés est gamma On peut procéder de la façon suivante : On va déterminer le côté manquant c par le théorème du cosinus. Je n'ai pas le choix ici, parce que je ne connais aucune paire, a alpha ou b bêta ou c gamma. Donc je dois utiliser le théorème du cosinus pour le troisième côté, c. Une fois que j'ai le troisième côté, j'ai en fait une paire, c gamma, je peux alors utiliser le théorème du sinus pour déterminer un angle. Je vais être prudent, je vais me mettre du coté sûr, je vais déterminer dont je sais qu'il n'est pas le plus grand entre alpha et bêta, je vais choisir alpha qui est l'angle plus petit. Là, si je connais le sinus, je suis sûr d'avoir l'angle quant au troisième angle, qui pourrait être obtus je le détermine en disant que la somme des angles vaut 180°.

Notes

Summary

11m 28s

Reprise de l'exemple 1

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 5 \qquad b = 3 \qquad \gamma = 37°.$$

Déterminons le côté c et les angles α et β manquants.

À nouveau, regardons ce que cela donne sur un exemple avec des nombres. Ici, vous retrouvez a, b et l'angle de 37° dans le cas présent, a est plus grand, et c'est l'angle bêta qui est petit.

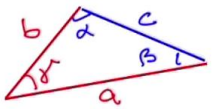
Notes

Summary

12m 51s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$
$b = 3$
$\gamma = 37°$



1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{34 - 30\cos 37°} \approx 3.169$

2)

Ici, je vous rappel que si cet exemple porte le numéro 1 c'est parce que je l'ai présenté déjà, nous avions utilisé, alors, d'autres méthodes. À présent, je veux vous montrer une méthode plus économe, rappelons ce qui est donné : sont donnés, en rouge, a qui vaut 5, b vaut 3 et gamma vaut 37°. J'ai deux côtés donnés, ainsi que l'angle intermédiaire de 37 degrés Ici, j'ai l'angle gamma, j'ai un côté long, c'est a et un plus court, b. Qu'est ce qui me manque ? Evidemment, le troisième côté ici c'est c, et les angles alpha et bêta. Première étape : nous sommes dans une situation standard pour le théorème du cosinus avec deux côtés et l'angle intermédiaire donc je vais calculer le côté c à l'aide du théorème du cosinus. Donc, c^2 est donné par : $a^2 + b^2 - 2ab \cos$ gamma. Tous les éléments sur la droite sont connus, je peux en déduire que c est donné par la racine, si vous introduisez la valeur de 5 pour a, la valeur de 3 pour b, vous allez obtenir : 34 moins 30 fois le cosinus de 37 degrés et à l'aide d'une calculatrice, vous pouvez déterminer la valeur de c, j'ai trouvé 3,169. Je connais à présent une paire c gamma.

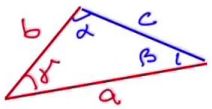
Notes

Summary

13m 10s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 37°$



1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{34 - 30\cos 37°} \approx 3.169$

2) Détermination du "petit" angle β

$\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \beta = \frac{180°}{\pi} \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin\gamma}{c}\right) \approx 34.73°$

3) $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 108,27°$

Je vais utiliser le théorème du sinus, il faut déterminer un angle, je vais déterminer l'angle qui est plus petit, je vais déterminer un petit angle. Je sais que bêta est plus petit que alpha vu que dans un triangle, il ne peut y avoir qu'un seul angle obtus. Je sais que cet angle bêta n'est pas obtus donc, si je connais le sinus, je connais l'angle. Qu'est ce je peux dire ? Le sinus de bêta sur b, le "sur b" je le passe de l'autre côté est égal, il faut prendre la paire que nous connaissons donc sinus gamma sur c. Cela permet de conclure que bêta est donné, arc sinus me donne un angle entre 0 et π demi. Je vais convertir le tout en degré avec ce facteur, 180 sur π et je prends l'arc sinus de b fois sinus gamma sur c où tout est connu et j'obtiens alors 34, 73° Troisième étape, finalement, je connais maintenant deux angles, gamma et bêta, je peux déterminer alpha, car la somme des trois angles vaut 180 degrés, alpha est donné par 180 moins bêta moins gamma ce qui me donne 108,27° J'ai pu déterminer le côté c, l'angle bêta et l'angle alpha si bien que je connais à présent les trois côtés et les trois angles de ce triangle.

Notes

Summary

15m 13s

Exemple 3

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 9 \qquad \alpha = 71° \qquad \beta = 54°.$$

Déterminons l'angle γ et les côtés b et c manquants.

Venons-en au troisième cas : Là, le triangle est défini par un côté et deux angles. Pour fixer les idées, nous allons dire que le côté qui est donné est a, et que les angles donnés sont alpha et bêta. En fait, cela ne joue aucune rôle, lesquels des angles sont donnés On peut tout de suite déterminer le troisième angle manquant par la somme des angles qui vaut 180° donc nous sommes sûr d'être en présence d'une paire connue à alpha même si alpha n'était pas donné. Ensuite, on utilise le théorème du sinus pour compléter les autres paires c'est-à-dire pour calculer b et c. Là, on a une situation qui va pouvoir se résoudre avec peu de calculs. Passons à un exemple avec des nombres, ici a est donné par 9, alpha 71 ° et bêta 54°. Essayons de déterminer tous les éléments qui nous manquent.

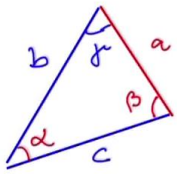
Notes

Summary

16m 55s

Exemple 3 : solution

Sont donnés : $a = 9$
$\alpha = 71°$
$\beta = 54°$



1) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 55°$

2) $b = \sin\beta \frac{a}{\sin\alpha}$

Rappelons ce qui est donné; Je connais a, je connais alpha et bêta. Si on cherche à faire une esquisse, elle est un peu plus difficile à réaliser dans cette configuration mais essayons néanmoins d'y parvenir. Je connais le côté a, le voici, je connais des angles. Un angle bêta, ça signifie que le côté c va partir quelque part dans cette direction. J'ai ici l'angle bêta. Je connais également l'angle alpha qui va être de l'autre côté, il va être situé ici. Si je complète les deux nominations, je vais avoir ici un côté b, que je ne connais pas, ici un angle gamma, que je ne connais pas et j'ai ici un côté c, que je ne connais pas. Première étape : on va déterminer l'angle manquant par la somme des angles. Gamma est donné par 180 moins alpha moins bêta. Cela donne 55° Deuxièmement : à présent, je connais une paire, que je connaissais déjà avant, soit dit en passant mais au plus tard, après la première étape, je connais une paire, ici a alpha donc je peux calculer par exemple le côté b, en disant que b sur sinus bêta est égale à a sur sinus alpha. Le sinus bêta, je le mets depuis le côté gauche sur le droit. J'obtiens pour b sinus bêta fois a sur sinus alpha.

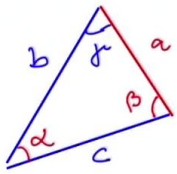
Notes

Summary

17m 49s

Exemple 3 : solution

Sont donnés : $a = 9$
$\alpha = 71°$
$\beta = 54°$



1) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 55°$

2) $b = \sin\beta \frac{a}{\sin\alpha} \approx 7.70$

$c = \sin\gamma \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \approx 7.80$

Je connais tous les éléments sur la droite, je peux alors, à l'aide d'une calculatrice déterminer que le côté b vaut 7,70. Quant au côté c, je procède exactement de la même façon, j'ai c sur sinus gamma, que je passe de l'autre côté Je prends une paire que je connais, je vais reprendre la même; a sur sinus alpha. Cela me permet de conclure pour c, que c vaut 7,80 Je laisse le calcul de b et c sous une même étape 2 parce que vous pouvez intervertir l'ordre de ces deux calculs. Qu'est ce que j'ai ? J'ai pu déterminer l'angle manquant, et les deux côtés manquants Je connais à présent tous les éléments de ce triangle, j'ai pu résoudre ce triangle.

Notes

Summary

19m 34s

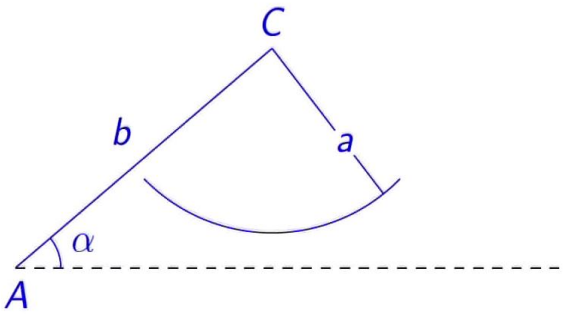
Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

- Si $b\,\frac{\sin\alpha}{a} > 1 \iff a < b\sin\alpha$,
  il n'y a pas de solution.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Venons-en maintenant, à un triangle à données insuffisantes. Cette fois-ci, on va dire qu'on va donner a et b deux côtés, pour avoir une détermination il nous faudrait l'angle intermédiaire - gamma. Supposons qu'on donne un autre angle ici, pour fixer les idées, on donne alpha. Est ce que l'on peut néanmoins déterminer les éléments manquants ? Regardons ce que nous pouvons faire, nous ne pouvons pas appliquer le théorème du cosinus, le théorème du sinus, nous pouvons l'appliquer nous connaissons une paire a alpha Si on connais une paire a alpha on peut commencer à déterminer l'élément manquant sur la deuxième paire qui serait b bêta, l'idée c'est de calculer le sinus de bêta? Vous avez sinus bêta sur b égale sinus alpha sur a On passe le b de l'autre côté, voici ce terme pour sinus bêta. Qu'est-ce qui peut arriver ? Notez bien que il se peut que cette expression sur la droite, b fois sinus alpha, soit plus grande que 1. Dans ce cas, il n'y aura pas de solution, on ne peut pas avoir un sinus de bêta qui vaut plus que 1. Essayons de comprendre ce qu'il se passe du point de vue géométrique. Si vous regardez cette inégalité, ici, si en plus, on rappel, que le sinus de alpha est positif, a et b sont positifs, tous ces nombres sont positifs.

Notes

Summary

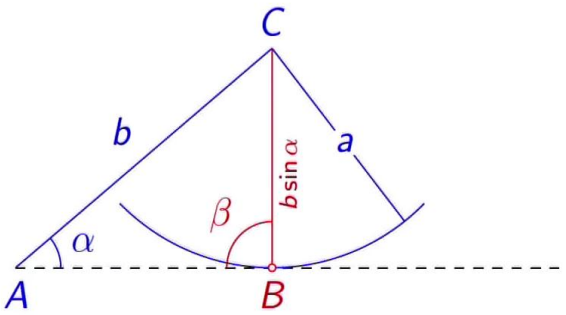
20m 26s

Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}\,.$$



- Si $b\,\dfrac{\sin\alpha}{a} = 1 \;\Leftrightarrow\; a = b\sin\alpha$

  $\Leftrightarrow\; \sin\beta = 1 \;\Leftrightarrow\; \beta = 90°$,

  le triangle est rectangle en B.

On peut assez facilement manipuler cette inéquation. En fait, on peut aussi l'écrire sous la forme : a est plus petit que b fois sinus alpha. Regardons ici une esquisse, j'ai ici le sommet a, j'ai l'angle alpha, qui est donné, par ici le côté b qui est donné, ici j'ai le côté a qui est donné également mais je ne connais pas l'angle gamma, je ne connais pas l'angle bêta. Où est-ce que je retrouve la quantité b fois sinus alpha ? Pour la retrouver, il faut ABC ici, une perpendiculaire depuis C sur cette droite pointillée, vous obtenez alors un triangle rectangle si vous regardez ce que veux dire b fois sinus alpha, cela signifie que vous retrouvez cette grandeur en tant que distance du point c à la droite ici en tiret. Evidemment, si a, c'est le dessin ici qui le fait, si a est plus petit que cette distance, vous ne pouvez pas avoir de solution. C'est ce qui se passe si a est plus petit que b fois sinus alpha il n'y a pas de solution. On peut être plus chanceux, c'est à dire que cette expression b sinus alpha sur a, celle-là qui donne le sinus de bêta vaut exactement 1. Cela signifie que a est égale à b fois sinus alpha.

Notes

Summary

21m 49s

Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

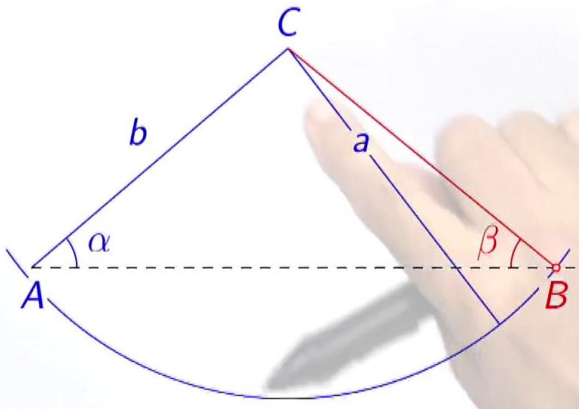
On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}.$$

- Si $b\,\frac{\sin\alpha}{a} < 1 \iff a > b\sin\alpha$,

  on distingue deux cas :

  - $b > a > b\sin\alpha$, deux solutions,
  - $a \geq b > b\sin\alpha$, une solution.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors, on retrouve ici b fois sinus alpha c'est cette distance du point c jusque sur cette droite horizontale, dans ce cas là, on a que le sinus de bêta vaut 1 donc bêta vaut 90° et on est en présence d'un triangle rectangle. On a une solution unique, là le triangle est déterminé de façon unique. Troisième cas possible : il s e peut, c'est peut être le cas auquel on s'attendait le plus, que b fois sinus alpha sur a est plus petit que 1, il est de toute façon positif, donc, compris entre 0 et 1 donc le sinus de bêta, un nombre égal à un nombre entre 0 et 1, cela va avoir des solutions. La question c'est : est-ce que nous avons une ou plusieurs solutions ? Qu'est ce qui se passe exactement ? Si on se rappel que b fois sinus alpha c'est cette hauteur en rouge, ici, et si a est plus long, on voit tout de suite qu'on pourrait avoir deux solutions. Alors, effectivement, on va avoir deux solutions, si a n'est pas plus long que b. En effet, si a est plus long que b, dans ce cas là on aura qu'une seule solution, on retrouve le dessin ici. Si a est plus grand que b, le deuxième point d'intersection va se retrouver à gauche de a.

Notes

Summary

23m 13s

Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

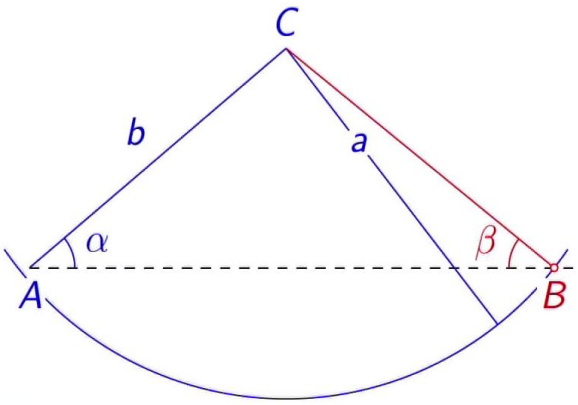
On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

- Si $b\,\frac{\sin\alpha}{a} < 1 \iff a > b\sin\alpha$,

  on distingue deux cas :

  - $b > a > b\sin\alpha$, deux solutions,
  - $a \geq b > b\sin\alpha$, une solution.



Revenons en arrière, si a reste plus petit que b on a deux solutions, deux angles bêta, dénommés ici bêta et bêta prime qui ont le même sinus, ils vont être supplémentaire à partir du sinus bêta égal ce nombre entre 0 et 1, je détermine deux angles b et bêta, et pour chacun de ces angles, je peux continuer à déterminer les éléments manquants, notez bien que cette fois-ci, je suis dans une bonne position, En effet, dès que j'ai bêta et b, et alpha et a, cela ne posera plus aucun problème de déterminer le troisième angle et le troisième côté manquant. En revanche, si le côté a est plus grand que b dans ce cas là, on ne pourra retenir qu'une seule solution, en fait, si vous partez avec les deux angles bêta, vous allez aboutir à une contradiction assez rapidement dans les calculs.

Notes

Summary

24m 31s

Exemple 4

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 4.2 \qquad b = 5.7 \qquad \alpha = 39.4°.$$

Déterminons le côté c et les angles β et γ manquants.

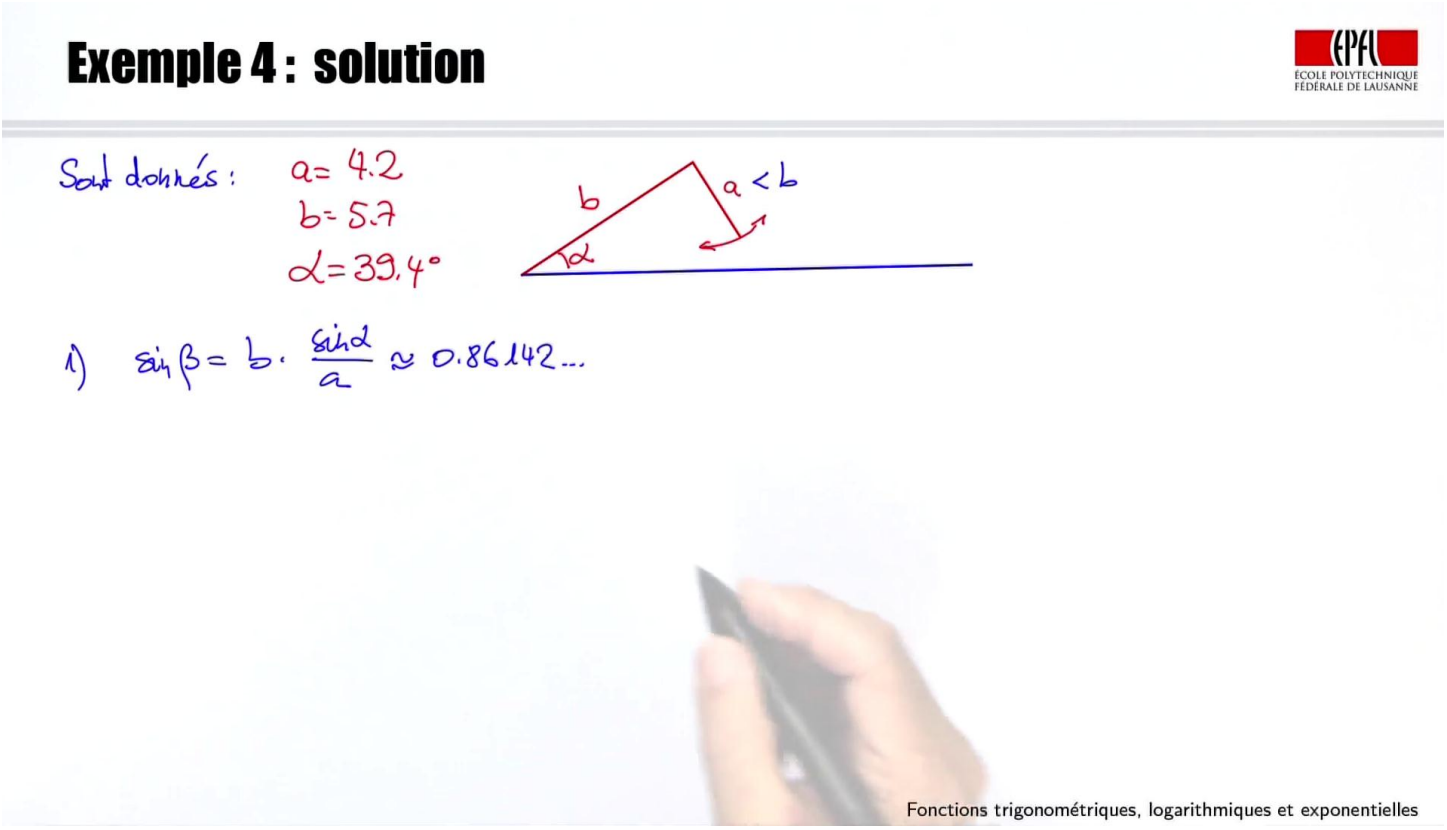
Regardons ça sur un exemple, un exemple qui ne va pas présenter ce dernier problème, un exemple où le b est effectivement donné par 5,7 où alpha vaut 39,4°, a vaut 4,2. Nous allons déterminer les côtés manquants c'est bêta et gamma.

Notes

Summary

25m 17s

Exemple 4 : solution



Rappelons ce qui est donné : j'ai a égale à 4,2 j'ai b égale 5,7 je connais l'angle alpha, avec 39,4° Une esquisse donne la situation suivante : J'ai ici le côté b, ici cette horizontale, ici le côté a, un côté a qu'on va essayer de mouvoir dans la bonne position. Notez bien que a est effectivement plus petit que b, nous avons ou aucune solution, ou une seule ou deux solutions. Je peux encore inscrire l'angle alpha qui est connue. On aimerait déterminer les autres éléments, les éléments manquants. Première étape : J'ai cette paire, a alpha, sur la deuxième paire il me manque bêta, je peux donc calculer le sinus de bêta ou essayer de la calculer, en écrivant bêta égale : je vais avoir b fois le quotient sur la paire connus, sin alpha sur a. Un calcul donne 0,86142... peut être plus de décimale. Ici, je ne peux pas déterminer de façon univoque l'angle bêta, on va avoir deux solutions, nous le savons déjà. Nous allons en conclure que j'ai une première solution bêta, je vais l'appeler bêta 1, donnée par arc sinus, on va prendre l'angle qui n'est pas obtus, l'angle entre 0 et 90°, ici j'ai cette quantité b fois sinus alpha sur a qui est connue, arc sinus me rend des radiants.

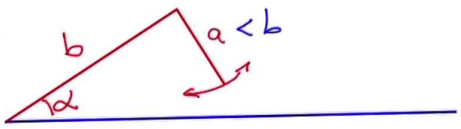
Notes

Summary

25m 33s

Exemple 4 : solution

Sont donnés : $a = 4.2$
$b = 5.7$
$\alpha = 39.4°$



1) $\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} \approx 0.86142... \Rightarrow \beta_1 = \frac{180°}{\pi} \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin\alpha}{a}\right) \approx 59.48°$
$\beta_2 = 180 - \beta_1 \approx 120.52°$

2) $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 81.12°$
$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 20.08°$

$\exists$ 2 solutions

3) $c_1 = \sin\gamma_1 \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \approx 6.54$
$c_2 = \sin\gamma_2 \frac{a}{\sin\alpha} \approx 2.27$

Je l'ai convertis en degrés, et si vous introduisez le tout dans une calculatrice, vous allez trouver 59,48° L'autre possibilité, en fait, c'est 180 degrés moins ce bêta. Cela va vous mener à 120,52 degrés. J'ai deux angles bêta possibles, vu que a est plus petit que b, on va avoir deux solutions, en tout et pour tout. Je peux maintenant déterminer le troisième angle gamma. On va avoir, selon le choix de bêta, deux possibilités. C'est-à-dire que l'on va avoir gamma 1 qui vaut 180° moins alpha, alpha est donné, et moins bêta 1 Cela va me mener à 81,12°. La deuxième possibilité, si je choisis bêta 2. J'ai 180 moins alpha moins bêta 2, j'obtiens 20,08°. Il me manque encore le côté c, de nouveau, je vais avoir deux possibilités, J'ai un côté C1 qui correspond au choix de bêta 1 et gamma 1. Je peux déterminer cela, à l'aide du théorème du sinus, je vais prendre le sinus de gamma 1 et la multiplier par le quotient d'une paire connue, je vais prendre la paire donnée, a sur sinus alpha. Cela me donnera, dans le cas présent 6,54 Si je prends l'autre valeur pour gamma, l'angle gamma 2, le calcul similaire va me donner 2,27. J'aboutis avec la conclusion que j'ai deux solutions, donc le triangle n'est pas déterminé de façon univoque, il y a deux triangles possibles pour ces données de a, b et alpha.

Notes

Summary

27m 22s

Exemple 4 : solution

1ère solution

$\beta_1 = 59,48°$

$\gamma_1 = 81,12°$

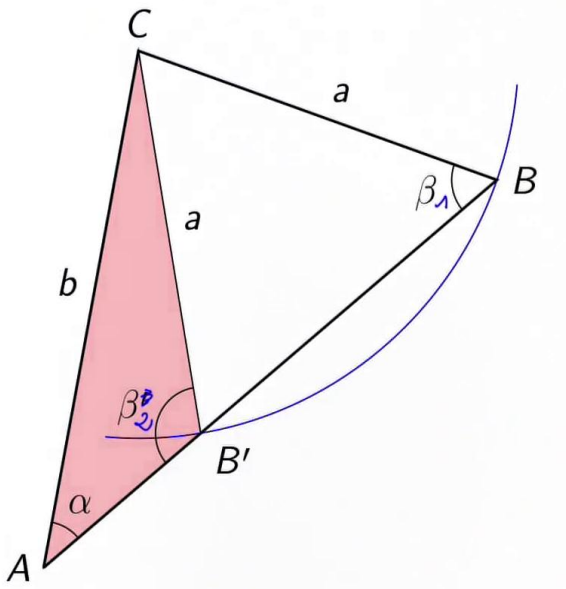
$c_1 = 6.54$

seconde solution :

$\beta_2 = 120,52°$

$\gamma_2 = 20.08°$

$c_2 = 2,27$



Ici vous retrouvez une figure en bonne grandeur, on a une première solution, l'angle bêta je le prends comme 59,48° l'angle gamma, je prends 81,12° et le côté c1 est 6,54. C'est la solution avec un angle qui est aigu, donc l'angle bêta1. Deuxième solutions : l'angle bêta2 vaut 120,52° Pour gamma je prends la valeur gamma 2 qui est de 20,08 degrés, pour le côté c je prends la valeur 2,27 Je dirais que c'est plutôt cette possibilité pour bêta2. On voit immédiatement, le tout est cohérent, vous avez l'angle bêta qui est obtus et un côté c qui devient nettement plus petit que dans le premier cas où le côté c est plus grand et bêta est un angle aigu.

Notes

Summary

29m 43s

La résolution de triangles

Ce que nous avons appris :

- Le théorème du cosinus
- Le théorème du sinus (et le rayon du cercle circonscrit)
- La résolution de triangles

Prochain Chapitre :

- La dérivée des fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Tirons un bilan à la fin de ce chapitre un chapitre dans lequel, nous avons fait la connaissance du théorème du cosinus, de celui du sinus, nous avons parlé du rayon, du cercle circonscrit et nous avons appris à utiliser ces éléments pour résoudre des triangles. La prochaine fois, nous allons analyser la continuité et la dérivabilité des fonctions trigonométriques.

Notes

Summary

31m 07s

La résolution de triangles

Un grand merci d'avoir suivi ce septième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Je vous remercie d'avoir suivi ce chapitre, j'aimerais également adresser des remerciements à mes collaborateurs; Merci Guido Burmeister, Roger Sauser et Olivier Woringer. Au plaisir de vous retrouver au chapitre suivant pour parler continuité et dérivabilité des fonctions trigonométriques !

Notes

Summary

31m 30s