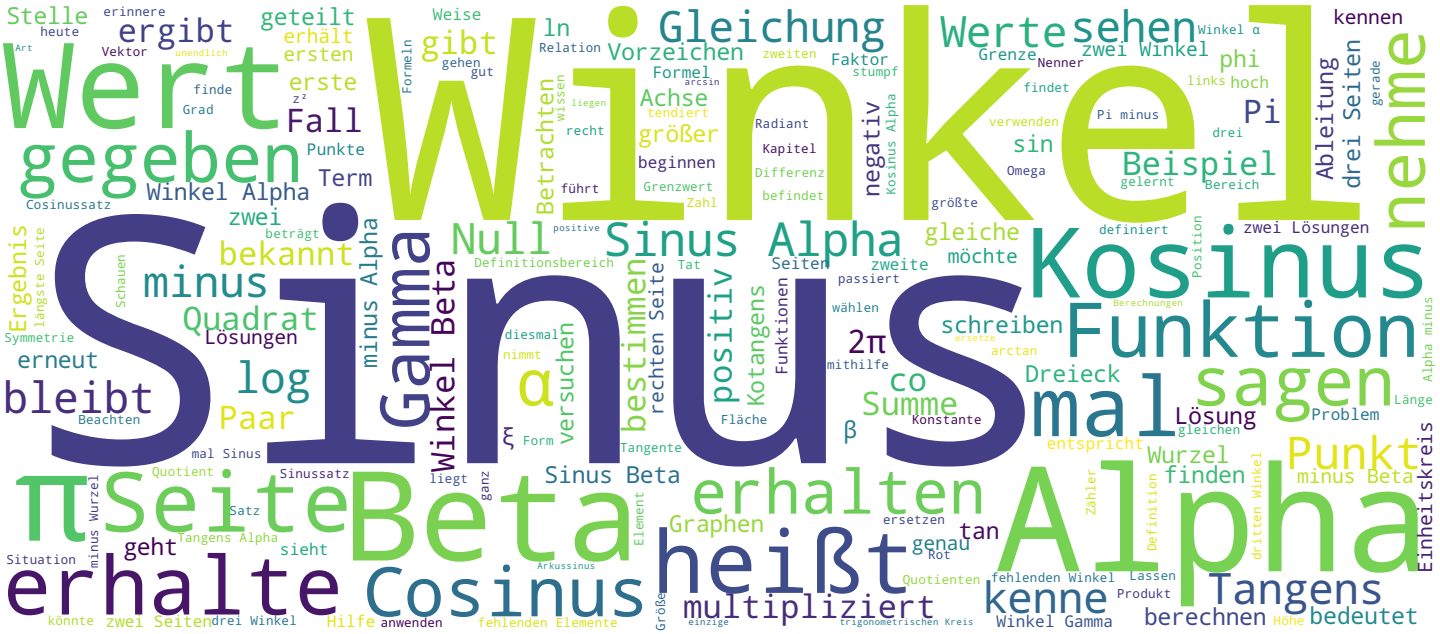
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Relations dans les triangles

7.3 La résolution de triangles

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Video

EPFL

Outils pour la résolution de triangles

Pour un triangle ABC défini par la donnée de certains angles et côtés, il s'agit de déterminer tous les angles et tous les côtés manquants : on parle de la "résolution du triangle".

Nous avons à disposition le outils suivants :

- le théorème du cosinus,
- le théorème du sinus,
- la somme des angles égale à $180°$.

Dans la mesure du possible, nous préférerons l'emploi du théorème du sinus, plus simple pour les calculs.

Si celui-ci ne permet pas d'obtenir une solution unique, nous ferons appel au théorème du cosinus.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Guten Tag, heute werden wir über das Berechnen von Dreiecken sprechen. Aber was bedeutet eigentlich <<Ein Dreieck berechnen ?>> Ein Dreieck, sagen wir ABC, mit den Standardnotationen, hat drei Seiten und drei Winkel, kennt man also die drei Seiten und die drei Winkel, so kennt man das ganze Dreieck. Normalerweise reicht es jedoch, wenn man nur einzelne dieser Elemente kennt. Das heißt, wenn bestimmte Winkel und Seiten bekannt sind, ist es unsere Aufgabe, die fehlenden Winkel und Seiten zu bestimmen - dies wird als Berechnen des Dreiecks bezeichnet. Um ein Dreieck zu berechnen, stehen uns drei Mittel zur Verfügung: Zunächst haben wir den Cosinussatz. Diesen habe ich Ihnen das vorletzte Mal vorgestellt. Ferner haben wir den Sinussatz, über den wir das letzte Mal gesprochen haben. Letztlich wissen wir außerdem, dass die Summe der Winkel in einem Dreieck 180° beträgt. Das bedeutet, wenn man zwei Winkel kennt, kennt man auch den dritten. Dennoch sollten wir festhalten, dass wir, soweit möglich, bevorzugt mit dem Sinussatz arbeiten werden, da er für Berechnungen der einfachste, der symmetrischste und der Satz ist, der uns am schnellsten zu Ergebnissen führt. Dennoch hat er eine Schwäche: er führt nicht immer zu einem einzigen Ergebnis, was wir heute noch einmal sehen werden. In einem solchen Fall, ist es nötig, zum Cosinussatz zu wechseln.

Notes

Summary

0m 03s

Outils pour la résolution de triangles : remarques

On peut utiliser le théorème du cosinus dans les deux cas suivants :

- On connaît les trois côtés : on peut alors déterminer chacun des trois angles.
- On connaît deux côtés et l'angle intermédiaire : on peut alors déterminer le troisième côté.

On peut utiliser le théorème du sinus dans les deux cas suivants :

- On connaît une paire (par exemple a et α) et l'angle d'une autre paire : on peut alors compléter cette deuxième paire.
- On connaît une paire (par exemple a et α) et le côté d'une autre paire : on peut alors déterminer le sinus de l'angle de la seconde paire.

Lassen Sie uns noch einmal einige Elemente unserer Werkzeuge in Erinnerung rufen. Beginnen wir mit de linken Seite, die den Satz des Cosinus betrifft. Wann kann ich diesen verwenden? Es gibt zwei Standardfälle, in denen ich diesen Satz anwenden kann: Zunächst ist er anwendbar, wenn ich drei Seiten kenne. Kenne ich die drei Seiten, so kann ich jeden Winkel mit Hilfe der Cosinusformel berechnen. Nehmen Sie den Satz des Cosinus und Sie können diesen hinsichtlich Kosinus auflösen. Der Cosinus ausschließlich eine Verknüpfung der drei Seiten aus. Zweiter Fall: Wir kennen zwei Seiten und den Winkel zwischen diesen zwei Seiten, den ich als Winkel bezeichne. Dies ist der Standardfall für den Cosinussatz, mit dem wir sogar noch die dritte fehlende Seite berechnen können. Betrachten wir nun die rechte Seite, die den Sinussatz zeigt. Dieser kann ebenfalls in zwei Fällen angewendet werden. Erneut erinnere ich kurz an die Anwendungsregeln. Kennt man ein Paar, zum Beispiel a und Alpha, b und Beta oder auch c und Gamma, kennt man also ein Paar und kennt man ferner den Winkel eines anderen Paars, so kann man dieses zweite Paar ergänzen und die zugehörige Seite berechnen. Zweiter Fall: wir kennen erneut ein Paar, zum Beispiel a und Alpha, und wir kennen die Seite eines anderen Paars, sagen wir b. In diesem Fall können wir den Sinus des Winkels des zweiten Paars bestimmen. Den Sinus von Beta.

Notes

Summary

1m 31s

Outils pour la résolution de triangles : remarques

Avantage du théorème du cosinus pour la détermination d'un angle :
Il permet de déterminer le cosinus d'un angle manquant, si bien que cet angle est déterminé de façon univoque.

Désavantage du théorème du sinus pour la détermination d'un angle :
Il permet de déterminer le sinus d'un angle manquant, si bien que cet angle n'est pas déterminé de façon univoque (à moins d'avoir des informations supplémentaires).

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Dies führt auch schon zu den Vorteilen und Nachteilen der Sätze von Cosinus und Sinus für die Bestimmung eines Winkels. Der Cosinussatz erlaubt die Bestimmung des Cosinus eines fehlenden Winkels, sodass dieser Winkel eindeutig bekannt ist. Der Winkel in einem Dreieck liegt zwischen 0° und 180°, kenne ich also den Cosinus, so kenne ich auch den Winkel. Der Sinussatz ist in dieser Hinsicht anfälliger. Er ermöglicht es uns nur, den Sinus eines fehlenden Winkels so zu bestimmen, dass der Winkel nicht eindeutig feststellbar ist, sondern allenfalls weitere Informationen ermittelt werden können. Zumindest kann zum Beispiel gesagt werden, dass der Winkel nicht der größte ist.

Notes

Summary

3m 17s

Détermination des triangles

Un triangle ABC est entièrement déterminé dans les trois cas suivants, en notations standard :

- on en connaît les trois côtés
- on en connaît deux côtés et l'angle entre ces côtés
- on en connaît un côté et deux angles.

Nous allons analyser chacun de ces cas !

Will man also ein Dreieck eindeutig bestimmen, sind welches die Elemente, die bekannt sein müssen, um sicher sein zu können, dass das Dreieck eindeutig bestimmbar ist? Die Antwort ist bekannt: Die erste Möglichkeit ist, die drei Seiten zu kennen. Kennt man die drei Seiten eines Dreiecks, ist das Dreieck eindeutig definiert. Es gibt nur eine einzige Möglichkeit für die Winkel Alpha, Beta und Gamma, Man kann ebenfalls zwei Seiten und den Winkel zwischen diesen beiden Seiten nehmen. In diesem Fall sind wieder die drei Seiten und die drei Winkel bekannt. Und zuletzt, sin deine Seite und zwei Winkel bekannt - egal welche - sind die zwei Winkel bekannt, ist klar, dass die Winkelsumme 180° beträgt und wir können so den dritten Winkel bestimmen. Sobald wir zwei Winkel und eine Seite haben, lässt sich das Dreieck eindeutig konstruieren. Jeden dieser drei Fälle werde ich analysieren und zeigen, wie die fehlenden Elemente bestimmt werden können.

Notes

Summary

3m 57s

Premier cas : Triangle défini par ses trois côtés

Admettons que a, b et c sont donnés, avec $a < b < c$.

Le triangle ABC est défini si l'inégalité du triangle est vérifiée :

$$a + b > c.$$

On détermine alors

1. l'angle γ, le plus grand des angles, par le théorème du cosinus,

Beginnen wir mit dem ersten Fall: Wir haben hier das Dreieck mit seinen drei Seiten gemäß der Standardnotation benennen wir diese a, b und c. Um das ganze zu vereinfachen, werden wir sagen, a ist die kürzeste und c die längste Seite. Sollte dies in der Angabe nicht der Fall sein, kann der Winkel angepasst werden. Beachten Sie, dass wenn die Summe von a und b, die Seiten kleiner sind als c, und ihre Summe kleiner oder gleich c ist, wir kein wirkliches Dreieck vorliegen haben. Die Summe der beiden kleineren Seiten muss also immer die Länge der dritten Seite übersteigen. Nehmen wir an, wir haben drei Größen, die uns tatsächlich ein eindeutiges Dreieck geben, wie gehen wir vor, um die fehlenden Grüßen zu ermitteln? Das heißt, die drei Winkel. Wir beginnen mit dem größten Winkel. Dies hier ist die längste Seite, also beginnen wir mit Gamma. Hier kann ich den Sinussatz nicht verwenden, weil mir kein Paar mit Alpha, Beta oder Gamma bekannt ist. Ich muss daher den Cosinussatz verwenden und diesen auf den Winkel Gamma anwenden, da er der größte ist. Der Cosinussatz gibt mir den Cosinus des Winkels Gamma. Auf diese Weise werde ich Gamma eindeutig ermitteln können.

Notes

Summary

4m 55s

Premier cas : Triangle défini par ses trois côtés

Admettons que a, b et c sont donnés, avec $a < b < c$.

Le triangle ABC est défini si l'inégalité du triangle est vérifiée :

$$a + b > c .$$

On détermine alors

1. l'angle γ, le plus grand des angles, par le théorème du cosinus,
2. un autre angle, p.ex. α, par le théorème du sinus,
3. le troisième angle, β, par $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Sodann habe ich ein Paar mit Gamma und kann den zweiten Winkel - sagen wir Alpha - mit Hilfe des Sinussatzes bestimmen. Den dritten Winkel bestimme ich, indem ich die Kenntnis nutze, dass die Summe der drei Winkel 180° beträgt.

Notes

Summary

6m 16s

Reprise de l'exemple 2

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 3, \qquad b = 6, \qquad c = 4.$$

Déterminons les angles α, β et γ.

Sehen wir uns dies einmal näher anhand eines Beispiels an. Sagen wir, a ist gleich 3, b ist gleich 6 und c ist gleich 4. Hier sehen wir sofort, dass wir nicht die Ordnung haben, die wir zuvor hatten - tatsächlich ist hier b die längste Seite.

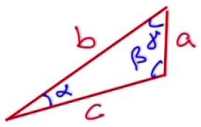
Notes

Summary

6m 33s

Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$



1) Détermination du "grand" angle β :

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Beachten Sie, dass ich hier von einem zweiten Beispiel spreche, wenngleich ich dieses Beispiel eigentlich schon einmal erläutert habe. Sie können es in einer unserer letzten Sitzungen finden. Sie sehen hier die einfachste Methode. Erinnern wir uns kurz, welche Werte uns gegeben sind: Ich weiß, dass a gleich 3, b gleich 6 und c gleich 4 ist. Ich habe eine Seite b, die sehr lang ist. Eine Seite, c, ist mittlerer Länge und ich habe eine kürzeste Seite. Dies könnte ein solcher Fall sein, hier habe ich b, c und hier a. Ich kenne allerdings keinen Winkel, weder Alpha noch Beta noch Gamma. Nun beginne ich den größten Winkel zu berechnen. Erster Schritt: Bestimmen des Winkels Beta. Das ist der einzige Winkel, der stumpfwinklig sein könnte. Wir werden hierzu den Cosinussatz nutzen: für Beta gibt uns die Formel den Cosinus von Beta: $a^2 + c^2 - b^2$, das Ganze dividiert mit 2*a*c. Nun können Sie die Werte für a, b und c in diesen Bruch einsetzen. Sie erhalten -11 durch 24. Der Cosinus ist also negativ und der Winkel daher stumpf. Nun können wir sagen, da Beta bekannt ist, wir nehmen den arc cos von -11 durch 24, arc cos gibt uns einen Winkel in Radiant.

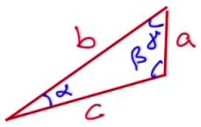
Notes

Summary

6m 51s

Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a=3$, $b=6$, $c=4$



1) Détermination du "grand" angle β :

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \beta = \frac{180^\circ}{\pi}\arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \approx 117.28^\circ$$

2) Détermination de α :

$$\sin\alpha = a\cdot\frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \alpha =$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Da wir im Dreieck bevorzugt mit der Einheit Grad arbeiten, werden wir Radiant in Grad umrechnen: mit dem Faktor, 100 sind Grad geteilt durch π. Nehmen Sie einen Taschenrechner zur Hilfe und geben Sie alles ein, Sie werden das Ergebnis 117,28° erhalten. Beachten Sie, dass ein Taschenrechner gewöhnlich derart eingerichtet werden kann, dass er für arc cosinus einer Zahl zwischen -1 und 1 sofort einen Winkel in Grad angibt, ohne dass der Umrechnungsfaktor erforderlich ist. Zweiter Schritt: das letzte Mal haben wir den Cosinussatz genutzt, nun ein zweites Mal: Wir kennen hier ein Paar, b und Beta. Einen anderen Winkel kann ich bestimmen, sagen wir Alpha. Lassen Sie uns das ausrechnen: der Sinussatz besagt, dass Sinus Alpha geteilt durch a gleich dem Sinus von Beta geteilt durch b ist. Ich teile also durch a von der rechten Seite und mir bleibt Sinus Beta durch b. Nun nehme ich das uns bekannte Paar, b und Beta, und ich kann den Term auf der rechten Seite berechnen, um den Sinus von Alpha zu erhalten. Alpha beträgt zwischen 0° und 90°, das heißt, er ist im ersten Quadranten. Arc Sinus gibt mir unmittelbar die richtige Antwort.

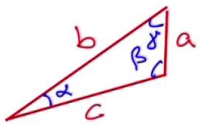
Notes

Summary

9m 06s

Exemple 2 : solution

Sont donnés : $a = 3$, $b = 6$, $c = 4$



1) Détermination du "grand" angle β :

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \beta = \frac{180°}{\pi} \arccos\left(-\frac{11}{24}\right) \approx 117.28°$$

2) Détermination de α :

$$\sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{\pi} \arcsin\left[\frac{\sin\beta}{2}\right] \approx 26.38°$$

3) $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 36.34°$

Ich werde also arc Sinus aus meinem Term nehmen: wenn Sie a geteilt durch b betrachten, was ein Halb ergibt, haben Sie den Sinus Beta. Wir haben ihn hier also durch 2 geteilt bestimmt. Erneut nehme ich den Faktor zur Umrechnung von Radiant in Grad, mithilfe eines Taschenrechners erhalte ich 26,38°. Es bleibt nur noch der letzte Winkel zu berechnen: Gamma, das heißt 180° minus Alpha minus Beta. Dies ergibt 36,34°. Ich konnte die Winkel Beta, Alpha und Gamma ermitteln - die Aufgabe ist also gelöst!

Notes

Summary

10m 31s

Deuxième cas : Triangle défini par deux côtés et un angle

Admettons que a et b sont donnés, avec $a < b$.

Le triangle ABC est défini si l'angle γ entre a et b est également donné.

On détermine alors

1. le troisième côté c par le théorème du cosinus,
2. l'angle α, ce n'est pas le plus grand, par le théorème du sinus,
3. le troisième angle β par $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Gehen wir zum zweiten Fall über: Im zweiten Fall ist das Dreieck durch zwei Seiten und den Winkel dieser beiden Seiten bestimmt. In der Standardnotation können wir sagen, dass die zwei bekannten Seiten a und b sind. Sind es die zwei anderen Seiten, so muss das Prozedere angepasst werden. Nehmen wir an, dass a die kleinste der zwei Seiten ist, also a kleiner als b ist. Der Winkel zwischen diesen beiden Seiten ist Gamma. Gehen wir folgendermaßen vor: Wir bestimmen die fehlende Seite c mit Hilfe des Kosinussatzes. Da ich kein bekanntes Paar - also weder a Alpha noch b Beta oder C Gamma - habe, bleibt mir keine andere Wahl. Ich muss also den Kosinussatz für die dritte Seite c anwenden. Habe ich die dritte Seite erst einmal, habe ich ein Paar, c und Gamma. Dann kann ich den Sinussatz benutzen, um einen Winkel zu bestimmen. Um vorsichtig zu sein und sicher zu gehen, werde ich den Winkel bestimmen, von dem ich weiß, dass er nicht der größte ist. Zwischen Alpha und Beta wähle ich den Winkel Alpha, da er der kleinste ist. Wenn ich davon den Sinus kenne, kenne ich den Winkel sicher - hinsichtlich des dritten Winkels, der stumpfwinklig sein könnte, werde ich wieder mit der Winkelsumme von 180° arbeiten.

Notes

Summary

11m 28s

Reprise de l'exemple 1

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 5 \qquad b = 3 \qquad \gamma = 37°.$$

Déterminons le côté c et les angles α et β manquants.

Betrachten wir das ganze erneut mit einem Zahlenbeispiel. Hier sehen Sie a, b und den Winkel von 37°. Im vorliegenden Fall ist a die längste Seite und der Winkel Beta ist der kleinste Winkel.

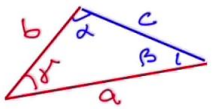
Notes

Summary

12m 51s

Exemple 1 : solution

Soit donnés : $a = 5$
$b = 3$
$\gamma = 37°$



1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{34 - 30\cos 37°} \approx 3.169$

2)

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich weise darauf hin, dass dieses Beispiel deshalb als Beispiel 1 bezeichnet ist, weil ich es bereits vorgestellt habe. Wir haben damals nur andere Methoden zur Berechnung verwendet. Nun möchte ich Ihnen jedoch die ökonomische Methode zeigen. Erinnern wir uns noch einmal, welche Werte bekannt sind: in Rot ist gegeben: a ist gleich 5, b ist gleich 3 und Gamma ist gleich 37°. Ich habe zwei Seiten ebenso wie ihren Winkel von 37°. Hier habe ich den Winkel Gamma, ich habe eine lange Seite, das ist a, und eine kürzere Seite, b. Wass fehlt mir? Offensichtlich die dritte Seite, also c sowie die Winkel Alpha und Beta. Erster Schritt: Wir haben einen Standardfall für den Cosinussatz mit zwei Seiten und ihrem Winkel. Ich werde also die Länge der Seite c mit Hilfe des Cosinussatzes berechnen. c² ist gleicha² + b² - 2ab cos Gamma. Alle Elemente auf der rechten Seite des Terms sind uns bekannt. Ich kann also c aus der Wurzel herleiten, wenn Sie für a den Wert 5 einsetzen und für b den Wert 3, erhalten Sie: 34 - 30 * cos 37°. Mithilfe eines Taschenrechners erhalten wir für c den Wert 3,169. Nun kenne ich das Paar c Gamma. Also werde ich den Sinussatz anwenden, um einen Winkel zu bestimmen.

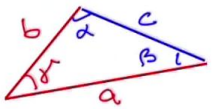
Notes

Summary

13m 10s

Exemple 1 : solution

Sont donnés : $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 37°$



1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{34 - 30\cos 37°} \approx 3.169$

2) Détermination du "petit" angle β

$\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \beta = \frac{180°}{\pi} \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin\gamma}{c}\right) \approx 34.73°$

3) $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 108,27°$

Ich bestimme den kleinsten Winkel, also einen kleinen Winkel. Ich weiß, dass Beta kleiner ist als Alpha. Und im Dreieck kann nicht mehr als ein Winkel stumpf sein. Ich weiß, dass nicht der Winkel Beta stumpf ist, also gilt, kenne ich den Sinus, so kenne ich den Winkel. Was kann ich sagen? Sinus von Beta zu b, "zu b" nehme ich von der anderen Seite, ist gleich - nun müssen wir das uns bekannte Paar nehmen - also sinus gamma zu c. Dies erlaubt uns anzunehmen, dass Beta gegeben ist, arc sin gibt uns einen Winkel zwischen 0 und π Halbe. Dies werde ich in Grad umrechnen, mit dem Faktor 180 zu π, und ich nehme den arc sin von b multipliziert mit sin gamma zu c. Davon ist alles bekannt und so erhalte ich das Ergebnis 34,73°. Zuletzt der dritte Schritt: nun kenne ich zwei Winkel, Gamma und Beta, und kann Alpha bestimmen, da ich weiß, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Alpha ist also 180° minus Beta minus Gamma, das sind 108,27°. Ich konnte also die Seite c, die Winkel Beta und Alpha bestimmen, sodass ich nun die drei Seiten und die drei Winkel des Dreiecks kenne.

Notes

Summary

15m 18s

Exemple 3

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 9 \qquad \alpha = 71° \qquad \beta = 54°.$$

Déterminons l'angle γ et les côtés b et c manquants.

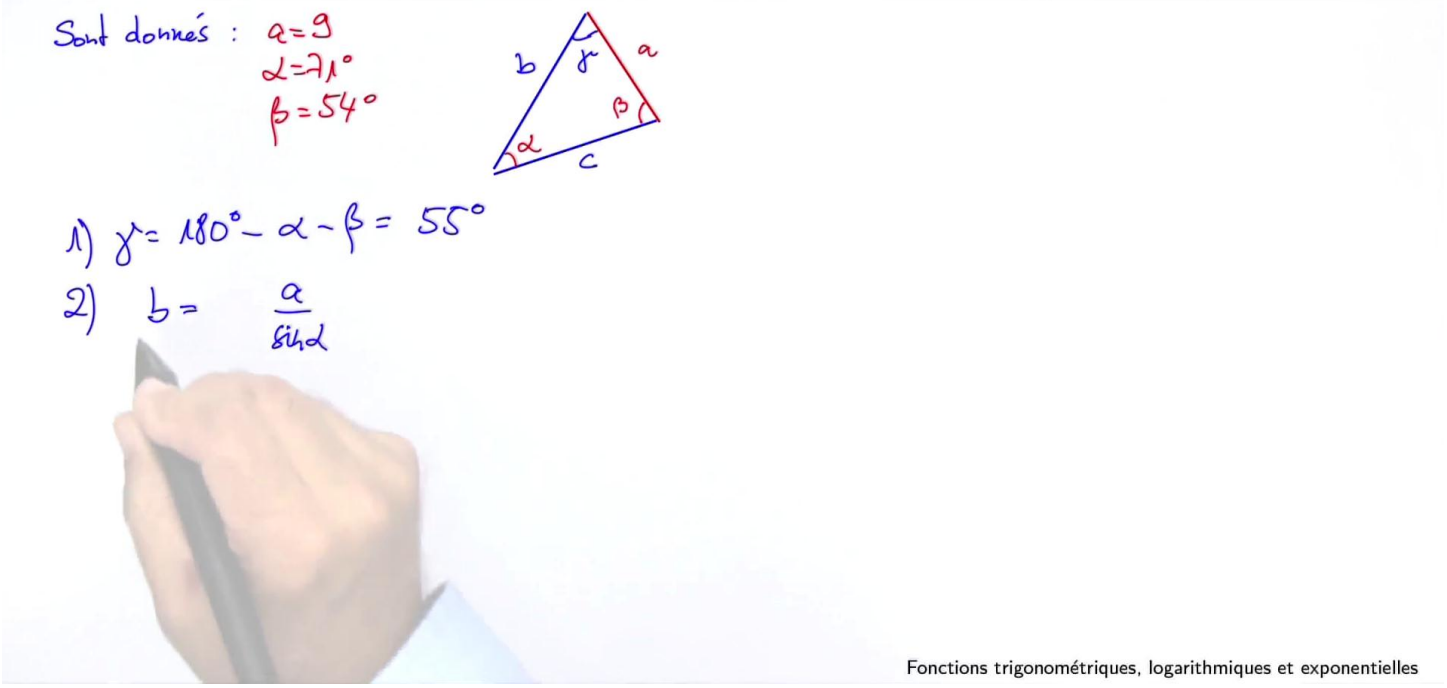
Kommen wir nun zum dritten Fall: Hier ist das Dreieck durch eine Seite und zwei Winkel definiert. Um unsere Ideen festzuhalten, sagen wir, die bekannte Seite ist a und die bekannten Winkel sind Alpha und Beta. Eigentlich spielt es keine Rolle, welche Winkel gegeben sind. Man kann den dritten fehlenden Winkel sofort mithilfe der Winkelsumme berechnen, die 180° beträgt. Uns ist also ein Paar bekannt, auch wenn Alpha nicht von Beginn an gegeben war. Sodann nutzen wir den Sinussatz, um die anderen Paare zu ergänzen, also um b und c zu berechnen. Nun haben wir eine Situation, die sich mit nur wenigen Rechenschritten lösen lässt. Gehen wir zu einem Zahlenbeispiel über. Gegeben ist a gleich 9, Alpha gleich 71° und Beta gleich 54°. Versuchen wir nun, die fehlenden Elemente zu bestimmen.

Notes

Summary

16m 55s

Exemple 3 : solution



Wir erinnern uns, was bekannt ist: Ich kenne a, Alpha und Beta. Möchte ich eine Skizze dazu anfertigen, ist dies in dieser Konstellation etwas schwieriger zu bewerkstelligen, aber versuchen wir es trotzdem einmal. Ich kenne die Seite a, hier, und ich kenne die Winkel. Ein Winkel Beta, das heißt die Seite c wird irgendwo in diese Richtung gehen. Hier habe ich den Winkel Beta. Außerdem kenne ich den Winkel Alpha, der auf der anderen Seite ist, also an dieser Stelle. Wenn ich die beiden ergänze, habe ich hier die Seite b, die nicht bekannt ist und hier den Winkel Gamma, den ich nicht kenne. Hier ist außerdem die unbekannte Seite c. Erster Schritt: wir bestimmen den fehlenden Winkel mithilfe der Winkelsumme. Gamma ist mit 180° minus Alpha minus Beta gegeben. Dies ergibt 55°. Zweiter Schritt: nun kenne ich wieder ein Paar, dass ich vorher eigentlich schon kannte, man könnte sagen nebenbei, aber spätestens nach dem ersten Schritt wurde es bestimmt. Ich kenne das Paar a Alpha, also kann ich beispielsweise die Seite b berechnen, indem ich sage b zu Sinus Beta ist gleich a zu Sinus Alpha. Ich ziehe Sinus Beta von der linken auf die rechte Seite und erhalte für b Sinus beta multipliziert mit a zu Sinus alpha.

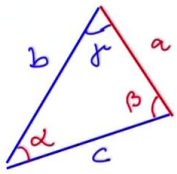
Notes

Summary

17m 49s

Exemple 3 : solution

Sont donnés : $a = 9$
$\alpha = 71°$
$\beta = 54°$



1) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 55°$

2) $b = \sin\beta \frac{a}{\sin\alpha} \approx 7.70$

$c = \sin\gamma \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \approx 7.80$

Nun sind alle Elemente auf der rechten Seite bekannt und mithilfe eines Taschenrechners kann ich nun die Seite b bestimmen, diese ist gleich 7,70. Hinsichtlich der Seite c, gehe ich genau gleich vor. Ich habe c zu Sinus Gamma, das ich auf die andere Seite ziehe und nun nehme ich ein mir bekanntes Paar und wiederhole das gleiche: a zu Sinus alpha. Das ergibt für c gleich 7,80. Ich belasse die Berechnung von b und c im gleichen, zweiten Schritt, weil Sie die Reihenfolge der zwei Rechnungen beliebig tauschen können. Was habe ich nun? Ich kann den fehlenden Winkel bestimmen sowie die fehlenden Seite. Ich kenne nun alle Elemente des Dreiecks und kann dieses berechnen.

Notes

Summary

19m 34s

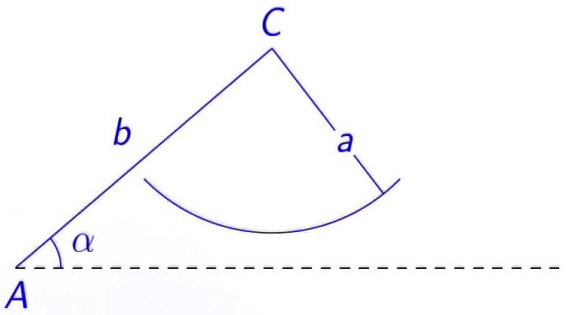
Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

- Si $b\,\frac{\sin\alpha}{a} > 1 \;\Leftrightarrow\; a < b\sin\alpha$,
  il n'y a pas de solution.



Gehen wir nun zu einem Dreieck, dessen Angaben unzureichend sind. Sagen wir dieses Mal also, dass wir a und b, zwei Seiten, haben. Um nun ein bestimmtes Dreieck zu haben, brauchen wir den Winkel zwischen den Seiten: Gamma. Nehmen wir an, uns wäre ein anderer Winkel gegeben, sagen wir Alpha. Können wir nun dennoch die fehlenden Elemente bestimmen? Betrachten wir einmal, was wir machen können. Den Cosinussatz können wir nicht anwenden, den Sinussatz können wir anwenden, da wir ein Paar a Alpha kennen. Kennen wir ein Paar a Alpha, so können wir das fehlende Element des zweiten Paares bestimmen, dies wäre b Beta. Die Idee wäre also, Sinus von Beta zu ermitteln? Wir haben Sinus Beta zu b ist gleich Sinus Alpha zu a. Wir ziehen das b der einen Seite auf die andere, nun haben wir den Term für Sinus Beta. Was kann nun passieren? Beachten Sie, dass es gut möglich ist, dass der Term auf der rechten Seite, b multipliziert mit Sinus Alpha, größer ist als 1. In diesem Fall gäbe es keine Lösung, da man einen Sinus von Beta, der größer 1 ist, nicht haben kann. Versuchen wir zu verstehen, was aus geometrischen Gesichtspunkten passiert ist.

Notes

Summary

20m 26s

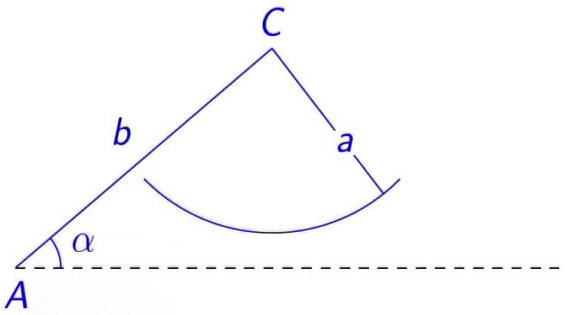
Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

- Si $b\,\frac{\sin\alpha}{a} > 1 \;\Leftrightarrow\; a < b\sin\alpha$,
  il n'y a pas de solution.



Wenn Sie Sich diese Ungleichheit hier ansehen, wir rufen uns kurz ins Gedächtnis, dass der Sinus von Alpha positiv ist, a und b positiv sind, alle diese Zahlen positiv sind. Dann kann man die Ungleichung leicht manipulieren. Tatsächlich kann man sie auch folgendermaßen notieren: a ist kleiner als b multipliziert mit Sinus alpha. Betrachten wir nun eine Skizze, ich habe hier den Scheitelpunkt bei a, ich habe den Winkel Alpha, der bekannt ist, hier ist die Seite b, die ebenfalls bekannt ist sowie die Seite c, die gegeben ist. Den Winkel Gamma kenne ich hingegen nicht und auch der Winkel Beta ist nicht bekannt. Wo finde ich die Menge b multipliziert mit Sinus Alpha? Um diese zu finden, braucht es hier ABC, eine Senkrechte vom Punkt C auf diese gezeichnete Gerade und Sie erhalten ein rechtwinkliges Dreieck, wenn Sie also sehen, was ich sagen möchte, b multipliziert mit Sinus Alpha bedeutet, dass Sie dieses Größe in der Eigenschaft als Entfernung zu Punkt C finden, hier auf der rechten Seite in Strichen. Offensichtlich, wenn also dies die Zeichnung ist, und a kleiner ist als diese Entfernung, haben Sie keine Lösung. Dies passiert, wenn a kleiner ist als b multipliziert mit Sinus Alpha, dann gibt es keine Lösung.

Notes

Summary

21m 36s

Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

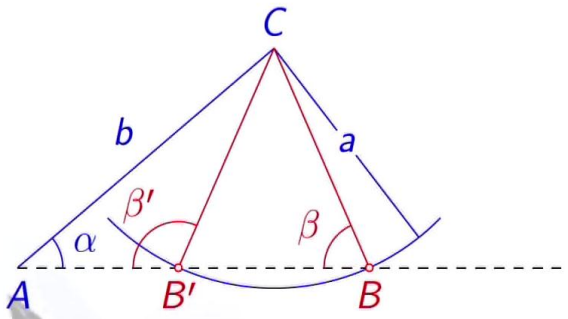
On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

- Si $b\,\frac{\sin\alpha}{a} < 1 \;\Leftrightarrow\; a > b\sin\alpha$,

  on distingue deux cas :

  - $b > a > b\sin\alpha$, deux solutions,



Man könnte glücklicher sein, das heißt die Gleichung b sinus alpha zu a, die uns den Sinus von Beta gibt, sei exakt 1. Das heißt, a ist gleich b multipliziert mit Sinus alpha. Also findet man hier b multiplizier mit Sinus alpha, dies ist die Entfernung zum Punkt C auf der horizontalen Gerade. In dem Fall, in dem Sinus Beta gleich 1 ist, also Beta gleich 90° ist und also ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt. Hier gibt es eine einzige Lösung, das Dreieck ist also eindeutig bestimmt. Dritte Möglichkeit: der Fall, der wahrscheinlich am meisten erwartet wird, ist der, dass b multipliziert mit Sinus alpha zu a kleiner als 1 ist. Es ist auf jeden Fall positiv, also zwischen 0 und 1. Der Sinus von Beta muss also zwischen 0 und 1 liegen. Dies würde zu Lösungen führen. Die Frage ist: Gibt es eine oder mehrere Lösungen. Was passiert genau? Wenn wir uns erinnern, dass b multipliziert mit Sinus alpha - also diese Höhe hier in Rot - und dass a die längste Seite ist, dann sieht man sofort, dass es zwei Lösungen geben könnte. Wir erhalten also eigentlich zwei Lösungen wenn a nicht länger als b ist. Ist also a länger als b, dann taucht nur eine einzige Lösung auf, dies sehen wir hier in der Zeichnung.

Notes

Summary

23m 02s

Remarque concernant un triangle à donnés insuffisantes

Si a, b et α sont donnés, le triangle ABC n'est à priori pas défini.

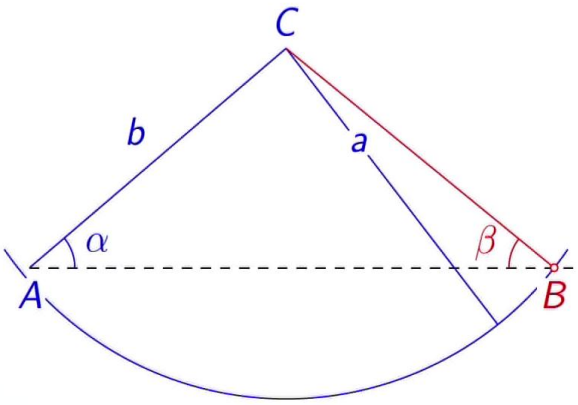
On cherche à déterminer β par le théorème du sinus

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}.$$

- Si $b\,\frac{\sin\alpha}{a} < 1 \iff a > b\sin\alpha$,

  on distingue deux cas :

  - $b > a > b\sin\alpha$, deux solutions,
  - $a \geq b > b\sin\alpha$, une solution.



Ist a aber größer als b, dann findet sich der zweite Schnittpunkt auf der Linken zu a. Gehen wir zurück: wenn a kleiner bleibt als b, haben wir zwei Lösungen, zwei Winkel Beta, hier bezeichnet als Beta und Beta Strich, die den gleichen Sinus haben und zusätzlich zu Sinus Beta gleich zwischen 0 und 1 liegen. Ich bestimme zwei Winkel b und Beta und für jeden dieser zwei Winkel kann ich die fehlenden Elemente bestimmen. Beachten Sie, dass ich dieses Mal in der richtigen Position bin. sobald ich tatsächlich Beta und b und Alpha und a habe, stellt sich kein Problem mehr, den dritten Winkel und die dritte fehlende Seite zu bestimmen. Wenn die Seite a hingegen größer ist als b, in diesem Fall kann es nicht einen einzige Lösung geben. Wenn sie von den zwei Winkeln Beta ausgehen, erhalten Sie schnell einen Widerspruch in den Berechnungen.

Notes

Summary

24m 25s

Exemple 4

Exemple

Considérons un triangle ABC (en notations standard) dont on connaît

$$a = 4.2 \qquad b = 5.7 \qquad \alpha = 39.4°.$$

Déterminons le côté c et les angles β et γ manquants.

Betrachten wir dies anhand eines Beispiels: ein Beispiel, das nicht das letzte Problem zeigt, sondern bei dem b mit 5,7, Alpha mit 39,4° und a mit 4,2 angegeben ist. Wir werden die fehlenden Elemente bestimmen, das heißt Beta und Gamma.

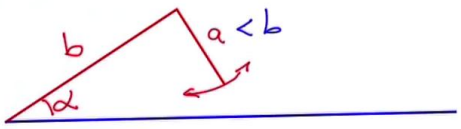
Notes

Summary

25m 17s

Exemple 4 : solution

Sont donnés : $a = 4.2$
$b = 5.7$
$\alpha = 39.4°$



1) $\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} \approx 0.86142...$

Erinnern wir uns, was gegeben ist: ich habe a gleich 4,2, b gleich 5,7 und ich kenne den Winkel Alpha mit 39,4°. Eine Skizze verdeutlicht das ganze: hier habe ich die Seite b, hier ist die Horizontale, dort die Seite a, eine Seite a, die wir versuchen werden in die richtige Position zu bewegen. Beachten Sie, dass obwohl a tatsächlich kleiner ist als b, wir gar keine, eine einzige oder zwei Lösungen haben. Ich kann außerdem noch den Winkel Alpha eintragen, der ebenfalls bekannt ist. Die anderen Elemente möchten wir ermitteln, also die noch fehlenden Elemente. Erster Schritt: Ich habe das Paar a Alpha, im zweiten Paar fehlt mir Beta. Ich kann also den Sinus von Beta berechnen oder versuchen, ihn zu berechnen, indem ich notiere Beta ist gleich: b multipliziert mit dem Quotienten der bekannten Paare, sin alpha zu a. Das Ergebnis ist 0,86142..., eventuell noch weitere Dezimalstellen. Hier kann ich den Winkel Beta nicht eindeutig bestimmen, stattdessen haben wir zwei Lösungen, wie wir bereits wissen. Wir erhalten also eine erste Lösung Beta, die wir Beta 1 nennen, bestimmt durch den arc Sinus, werden wir den Winkel nehmen, der nicht stumpf ist, also einen Winkel zwischen 0° und 90°.

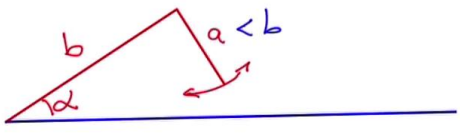
Notes

Summary

25m 33s

Exemple 4 : solution

Sont donnés : $a = 4.2$, $b = 5.7$, $\alpha = 39.4°$



1) $\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} \approx 0.86142\ldots \Rightarrow \beta_1 = \frac{180°}{\pi} \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin\alpha}{a}\right) \approx 59.48°$

$\beta_2 = 180 - \beta_1 \approx 120.52°$

2) $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 81.12°$

$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 20.08°$

3) $c_1 = \sin\gamma_1 \cdot \frac{a}{\sin\alpha}$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier habe ich die Menge b multipliziert mit Sinus alpha zu a, die bekannt ist, arc Sinus gibt mir den Radianten. Diesen rechne ich ihn Grad um und wenn Sie dies in Ihren Taschenrechner eingeben, erhalten Sie 59,48°. Die andere Möglichkeit ist, 180° minus Beta. Dies führt zum Ergebnis 120,52 Grad. Ich habe damit zwei mögliche Winkel Beta, soweit a kleiner ist als b. Das heißt insgesamt haben wir zwei Lösungen. Nun kann ich den dritten Winkel Gamma bestimmen. Auch hier werden wir zwei Lösungen haben, abhängig davon, welchen Wert für Beta wir wählen. Das heißt, wir werden Gamma 1 haben, das gleich 180° minus Alpha - Alpha ist gegeben - und minus Beta 1 ist. Ich erhalte den Wert 81,12°. Die zweite Möglichkeit ist, Beta 2 zu wählen. Das heißt wieder 180° minus Alpha minus Beta 2, wofür ich 20,08° erhalte. Nun fehlt mir noch die Seite c. Erneut habe ich zwei Möglichkeiten, ich habe eine Seite c1, die den gewählten Werten für Beta 1 und Gamma 1 entspricht, diese kann ich mit Hilfe des Sinussatzes ermitteln. Ich nehme den Sinus von Gamma 1 und multipliziere ihn mit dem Quotienten eines bekannten Paares. Ich wähle hier das Paar a zu Sinus Alpha. Und erhalte für diesen Fall den Wert 6,54.

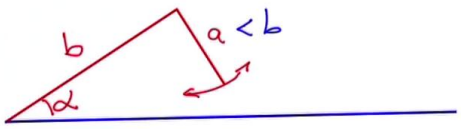
Notes

Summary

27m 15s

Exemple 4 : solution

Sont donnés : $a = 4.2$
$b = 5.7$
$\alpha = 39.4°$



1) $\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a} \approx 0.86142... \Rightarrow \beta_1 = \frac{180°}{\pi} \arcsin\left(b \cdot \frac{\sin\alpha}{a}\right) \approx 59.48°$
$\beta_2 = 180 - \beta_1 \approx 120.52°$

2) $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 \approx 81.12°$
$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2 \approx 20.08°$

$\exists$ 2 solutions

3) $c_1 = \sin\gamma_1 \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \approx 6.54$
$c_2 = \sin\gamma_2 \frac{a}{\sin\alpha} \approx 2.27$

Nehme ich den anderen Wert für Gamma, das heißt für Gamma 2, erhalte ich mit der gleichen Rechnung den Wert 2,27. Ich habe also erneut zwei Lösungen, dieses Dreieck ist also nicht eindeutig definiert. Es gibt zwei mögliche Dreiecke für die Werte a, b und Alpha.

Notes

Summary

29m 14s

Exemple 4 : solution

1ère solution

$\beta_1 = 59,48°$

$\gamma_1 = 81,12°$

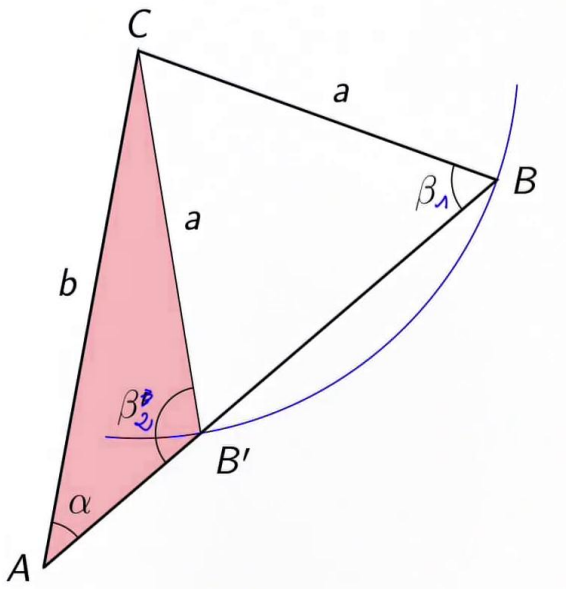
$c_1 = 6.54$

seconde solution :

$\beta_2 = 120,52°$

$\gamma_2 = 20.08°$

$c_2 = 2,27$



Hier finden Sie eine Figur in der richtigen Größe, wir haben eine erste Lösung, für den Winkel Beta nehmen wir 59,48°, für den Winkel Gamma nehmen wir 81,12 ° und für die Seite c1 6,54. Das ist die Lösung für einen spitzen Winkel, also den Winkel Beta 1. Zweite Lösung: der Winkel Beta 2 ist gleich 120,52°. Für Gamma 2 nehme ich den Wert 20,08°, für die Seite c nehme ich den Wert 2,27. Ich würde sagen, dass eher die zweite Möglichkeit für Beta 2 greift. Man kann sofort erkennen, dass alles schlüssig ist, Sie haben den Winkel Beta, der stumpf ist und eine Seite c, die deutlich kleiner ist als im ersten Fall, bei dem die Seite c die größte ist und Beta ein spitzer Winkel ist.

Notes

Summary

29m 43s

La résolution de triangles

Ce que nous avons appris :

- Le théorème du cosinus
- Le théorème du sinus (et le rayon du cercle circonscrit)
- La résolution de triangles

Prochain Chapitre :

- La dérivée des fonctions trigonométriques

Lassen sie uns nun eine Bilanz dieses Kapitels ziehen, ein Kapitel, in dem wir den Cosinussatz und den Sinussatz kennengelernt haben, in dem wir über Halbgeraden und den Umkreis gesprochen haben und gelernt haben, diese Elemente zur Berechnung von Dreiecken einzusetzen. Das nächste Mal werden wir die Stetigkeit analysieren und die Ableitbarkeit trigonometrischer Funktionen.

Notes

Summary

31m 07s

La résolution de triangles

Un grand merci d'avoir suivi ce septième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Ich bedanke mich, dass Sie dieses Kapitel durch gearbeitet haben und möchte mich auch bei meinen Mitarbeitern bedanken; Vielen Dank Guido Burmeister, Roger Hauser und Olivier Voriger. Ich würde mich freuen, Sie im nächsten Kapitel wieder begrüßen zu dürfen, in dem wir über Stetigkeit und Ableitbarkeit trigonometrischer Funktionen sprechen.

Notes

Summary

31m 30s