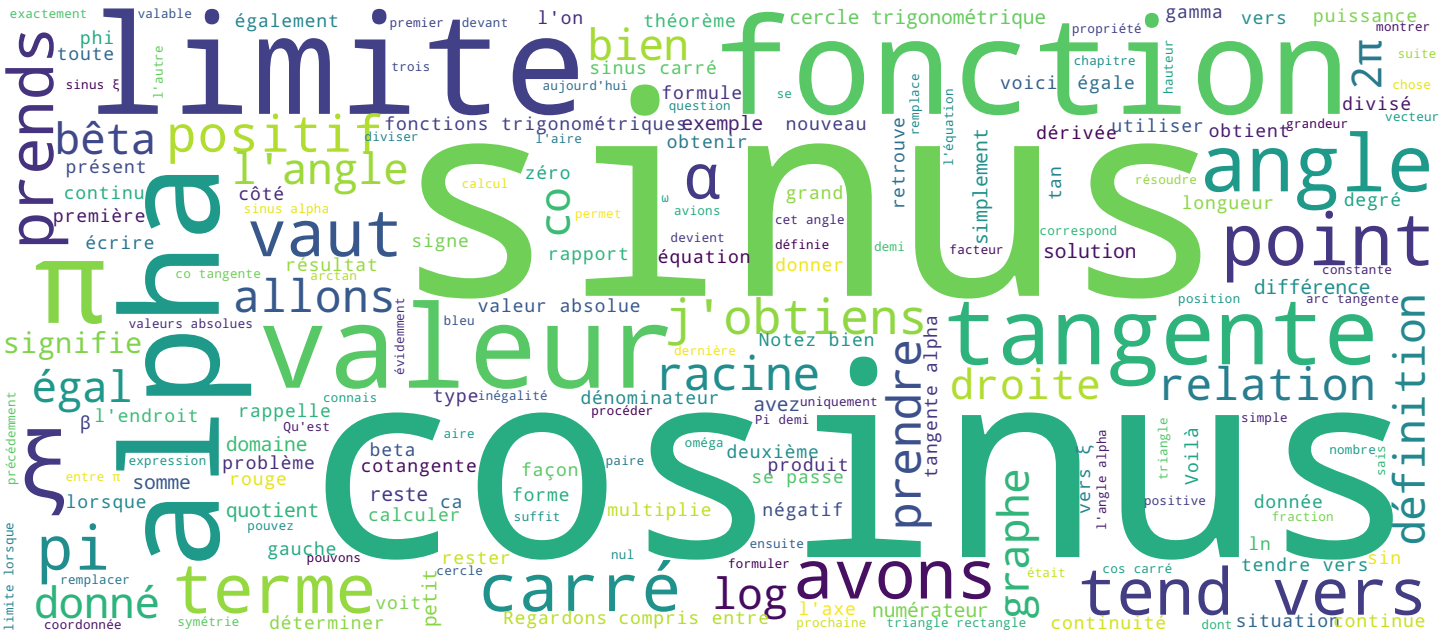
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Continuité et dérivabilité des fonctions trigonométriques

8.1 Continuité des fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Continuité des fonctions trigonométriques : introduction

On cherche à montrer que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour. Soyez la bienvenue à mon cours fonctions trigonométriques logarithmiques et exponentielles. Aujourd'hui, nous entamons le chapitre 8. Il s'agit là du dernier chapitre consacré aux fonctions trigonométriques. La fin du cours sera consacrée aux fonctions logarithmiques et exponentielles mais n'ayez crainte : ces chapitres-là seront beaucoup plus courts. Nous dirons beaucoup moins sur ces fonctions logarithmiques et exponentielles que nous l'avons fait pour les fonctions trigonométriques. Pour clore cette présentation des fonctions trigonométriques, nous allons nous intéresser à la continuité et à la dérivabilité des fonctions trigonométriques. Aujourd'hui, nous allons analyser la continuité et nous remettons la question de la dérivabilité à une prochaine fois. Posons-nous la question de la continuité des fonctions trigonométriques. On va commencer par les deux premières fonctions trigonométriques : le sinus et le cosinus. Nous cherchons à montrer que aussi bien le sinus que le cosinus sont continus sur R. Je vous rappelle que la continuité est une notion ponctuelle : une fonction est continue en un point ξ ou elle ne l'est pas.

Notes

Summary

0m 03s

Continuité des fonctions trigonométriques : introduction

On cherche à montrer que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Pour cela on montre que ces fonctions sont continues en un point donné quelconque ξ de $\mathbb{R}$.

On vérifie donc que

$$\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin \xi \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\xi} \cos x = \cos \xi .$$

Et dire qu'elle est globalement continue signifie qu'elle est continue en chacun des points de son domaine de définition. Si on veut montrer que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur R, il faut montrer que ces fonctions sont continues en tout point ξ de R. On va prendre un point quelconque, s'il est quelconque, cela signifie que cela va être valable pour toutes les valeurs de ξ. La continuité en ξ signifie la chose suivante : il nous faudra donc montrer que la limite lorsque x tend vers ξ du sinus x donne sinus ξ. Pour le cosinus, de façon similaire, on va montrer que la limite lorsque x tend vers ξ, cette fois-ci le cosinus x donne cosinus ξ. Si je reviens peut-être ici à la première limite, on pourrait dire qu'elle exprime le fait que le sinus de presque ξ donnerait quasiment le sinus de ξ mais en fait, de façon plus précise, cela signifie la chose suivante : cela signifie que la différence entre sinus x et sinus ξ est aussi petite qu'on le veut à condition de payer le prix suivant : ce qu'il faut faire est de choisir le x suffisamment proche de ξ. Si on est très exigeant, sur l'approche du sinus x vers sinus ξ, il faudra être d'autant plus exigeant par rapport au fait que le x est proche de ξ. On a la même contrainte ici pour le cosinus.

Notes

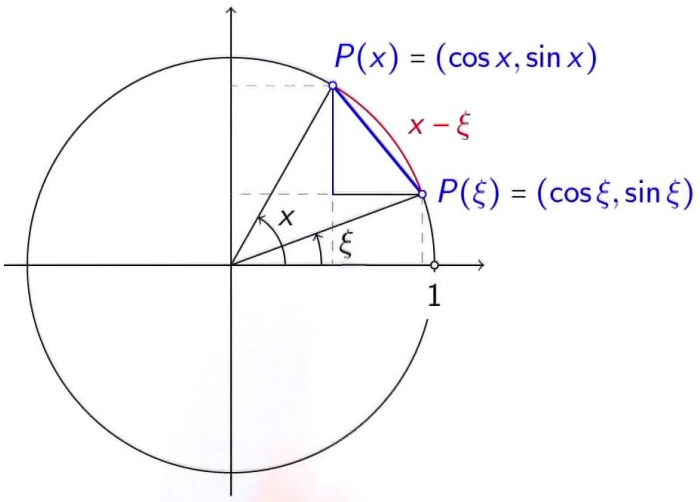
Summary

1m 20s

Continuité des fonctions trigonométriques

Considérons les fonctions sinus et cosinus sur un voisinage de $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $|x - \xi| < \pi$,
alors la longueur de la corde définie par les deux points $P(\xi)$ et $P(x)$ est plus petite que la longueur de l'arc défini par ces deux points.



Pour analyser la situation, il faut revenir au cercle trigonométrique. Ici, vous avez l'axe des coordonnées, vous avez ce cercle trigonométrique, ce cercle de rayon 1 autour de l'origine. Nous choisissons un ξ réel, le voilà et nous choisissons une deuxième valeur x qui est proche de ξ. Pour les besoins du dessin, j'ai pris un x qui est quelque peu supérieur, même, je dirais, passablement supérieur à ξ. Je vous laisse faire un dessin similaire pour x un peu inférieur à ξ. Nous allons rapprocher, pour finir, dans ce dessin, x de ξ. La limite de validité pour le dessin est donnée ici, donc la différence entre x et ξ ne doit pas dépasser π en valeur absolue. Que x tende vers ξ, cela n'est pas une contrainte. Ici, pour ξ, je considère ce point qu'on a appelé P de ξ, pour l'angle ξ. Il a les coordonnées cosinus ξ et sinus ξ. Pour l'angle x, j'ai le point P(x) de coordonnées cosinus x sinus x. En outre, le long du cercle trigonométrique, ici, cet arc est donné par l'angle x moins l'angle ξ, donc il est donné par x moins ξ et la remarque que je vais utiliser maintenant dans la suite de mes calculs est que la longueur de la corde qui relie les deux points P(x) et P(ξ) est inférieure à l'arc, en rouge ici.

Notes

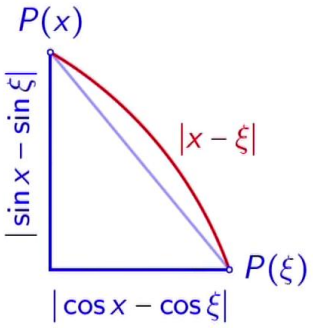
Summary

2m 54s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| .$$



Agrandissons un peu la situation, la voilà. J'ai ici le point P(x), P(ξ), j'ai ici l'arc, j'ai ici la corde.

Notes

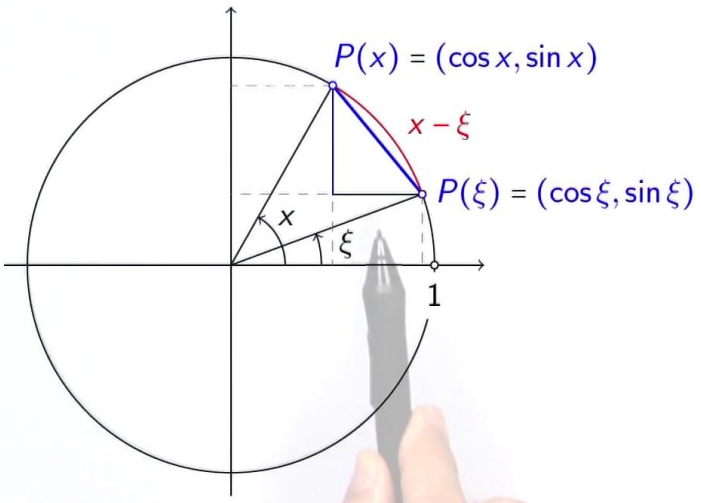
Summary

4m 22s

Continuité des fonctions trigonométriques

Considérons les fonctions sinus et cosinus sur un voisinage de $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $|x - \xi| < \pi$,
alors la longueur de la corde définie par les deux points $P(\xi)$ et $P(x)$ est plus petite que la longueur de l'arc défini par ces deux points.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Si vous regardez d'un peu plus près quelles sont les valeurs des longueurs de ce triangle rectangle, je me permets peut-être de revenir en arrière, ici, je vous rappelle que le P(ξ) avait les coordonnées X données par cosinus ξ, pour P(x) c'est cosinus x, donc ici la différence, c'est la différence des cosinus.

Notes

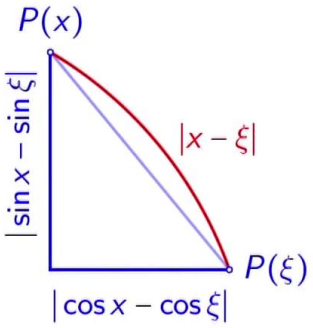
Summary

4m 31s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| \, .$$



Ce que je mets ici, je mets des valeurs absolues parce que j'aimerais traiter le cas général, que X soit plus grand ou plus petit que ξ.

Notes

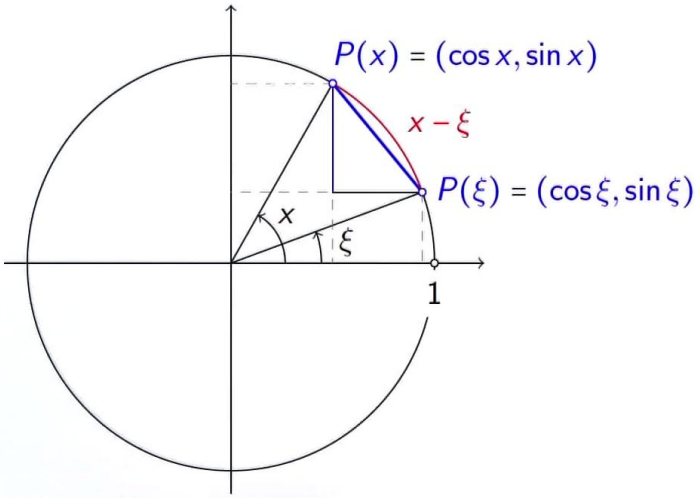
Summary

4m 53s

Continuité des fonctions trigonométriques

Considérons les fonctions sinus et cosinus sur un voisinage de $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $|x - \xi| < \pi$,
alors la longueur de la corde définie par les deux points $P(\xi)$ et $P(x)$ est plus petite que la longueur de l'arc défini par ces deux points.



De façon similaire, pour le sinus, je reviens encore une fois en arrière, on voit très bien que si je prends le sinus de x moins sinus de ξ, j'ai cette distance verticale et je mets des valeurs absolues pour être du côté sûr.

Notes

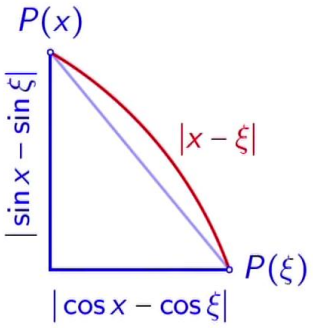
Summary

5m 01s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| .$$



De même

$$\sqrt{|\cos x - \cos \xi|^2} \leq \sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi|$$

Donc, si j'applique le théorème de Pythagore sur ce triangle rectangle, j'ai la différence des sinus en valeur absolue au carré, c'est ici, plus la différence des cosinus en valeur absolue au carré. Je tire la racine, j'obtiens la corde, la longueur de la corde et cela ne peut pas être moins donc c'est plus petit ou égal que la longueur de l'arc, nous avions dit que c'était x moins ξ. Je remets des valeurs absolues, simplement parce que j'aimerais quitter l'hypothèse que x est plus grand que ξ tel que dans le dessin précédent. Je peux à présent écrire les relations suivantes : ici vous retrouvez la relation qu'on vient de développer, ici. Cette racine qui contient une somme de deux termes positifs, je peux la minorer en supprimant un des deux termes. Donc je supprime, par exemple, le cos, il va me rester la racine de la valeur absolue au carré d'une différence de sinus. Ça, ça se simplifie et on obtient, pour finir, qu'en valeur absolue, la différence entre sinus x et sinus ξ est plus petite ou égale que la valeur absolue de la différence x moins ξ. Ce que j'ai pu faire en supprimant ici le cosinus, je peux aussi le faire en supprimant le sinus. Chose faite, et voici le résultat correspondant.

Notes

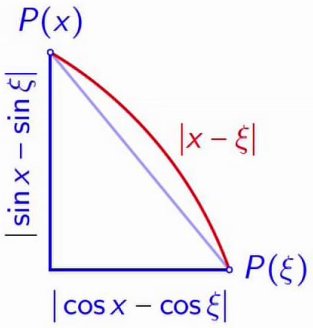
Summary

5m 15s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| \,.$$



De même

$$\sqrt{|\cos x - \cos \xi|^2} \leq \sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi|$$

$$\Rightarrow \quad |\cos x - \cos \xi| \leq |x - \xi| \,.$$

On obtient une estimation similaire, cette fois-ci pour la différence des cosinus. Le cosinus à l'endroit x moins le cosinus à l'endroit ξ. En valeur absolue, il ne peut pas être supérieur à la différence x moins ξ en valeur absolue.

Notes

Summary

6m 36s

Continuité des fonctions trigonométriques

$$\begin{cases} 0 \le |\sin x - \sin \xi| \le |x - \xi| \\ 0 \le |\cos x - \cos \xi| \le |x - \xi| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \\ 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| = 0 \\ \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| = 0 \end{cases}$$

Résumons ces deux résultats : nous les avons ici. Pour le sinus, plus petit ou égal à sinus moins ξ, et pour le cosinus, plus petit ou égal... la même estimation. Les valeurs absolues, de toute façon, ne peuvent pas être négatives. On obtient des inégalités, une chaîne d'inégalités, l'une pour la différence des sinus, l'autre pour la différence des cosinus. Ce qui m'intéresse, c'est le passage à la limite. J'aimerais à présent faire tendre x vers ξ. Ici, ce x va tendre vers ξ, celui-là aussi. Faisons cela, j'écris ici limite x vers ξ. Je vous rappelle qu'une limite conserve les inégalités, donc au lieu de prendre la limite ici sur le terme à gauche, je prends la limite sur le terme à droite. Si je prends la limite, la constante 0 elle est 0, donc ces inégalités, la 1re ligne aussi bien que la 2ème ligne, les deux lignes restent conservées si je rajoute cette limite de x vers ξ. Voilà, sur la droite, vous avez deux fois la même limite et cette limite vaut 0. Si bien que le terme du milieu se retrouve coincé entre exactement 0 et puis un terme qui tend vers 0. Donc la limite des deux termes ici au milieu vaut 0, ce qui revient à dire que la limite du sinus x revient à sinus de ξ.

Notes

Summary

6m 54s

Continuité des fonctions trigonométriques

$$\begin{cases} 0 \le |\sin x - \sin \xi| \le |x - \xi| \\ 0 \le |\cos x - \cos \xi| \le |x - \xi| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \\ 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| = 0 \\ \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi} \sin x = \sin \xi \\ \lim\limits_{x \to \xi} \cos x = \cos \xi \,. \end{cases}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont donc continues en ξ, $(\xi \in \mathbb{R})$; elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Et la limite du cosinus x est bien le cosinus de ξ. En d'autres termes, le sinus et le cosinus sont continus en ξ et ξ était une valeur quelconque, donc on peut dire que ces fonctions sont continues sur la droite réelle et j'aimerais formuler cela dans une proposition en disant que le sinus et le cosinus sont continus sur R.

Notes

Summary

8m 14s

Continuité des fonctions trigonométriques

Proposition

Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Ces fonctions sont continues en tout point de leur domaine de définition.

Notes

Summary

8m 39s

Continuité des fonctions trigonométriques

Le quotient de deux fonctions continues est continu sur son domaine de définition. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition

Les fonctions tangente et cotangente sont continues en tout point de leur domaine de définition :

$$\lim_{x\to\xi} \tan x = \tan\xi, \qquad (\xi \in \mathbf{D}_{\tan}) \quad \textit{et}$$
$$\lim_{x\to\xi} \cot x = \cot\xi, \qquad (\xi \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

On sait que le quotient de deux fonctions continues est continu sur le domaine de définition. On en déduit immédiatement que la tangente c'est le quotient du sinus par le cosinus, et co-tangente, c'est le quotient de cosinus sur sinus, ces deux fonctions sont continues sur leur domaine de définition. C'est-à-dire que je peux écrire que la limite de tangente x, lorsque x tend vers ξ, donne tangente ξ. Et ça, c'est valable pour tous les ξ dans le domaine de définition tangente. De façon similaire, je peux écrire que la limite de co-tangente x lorsque x tend vers ξ est co-tangente ξ. Et cette fois-ci c'est valable pour tous les ξ dans le domaine de définition de la fonction co-tangente.

Notes

Summary

8m 45s

Exemple

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}.$$

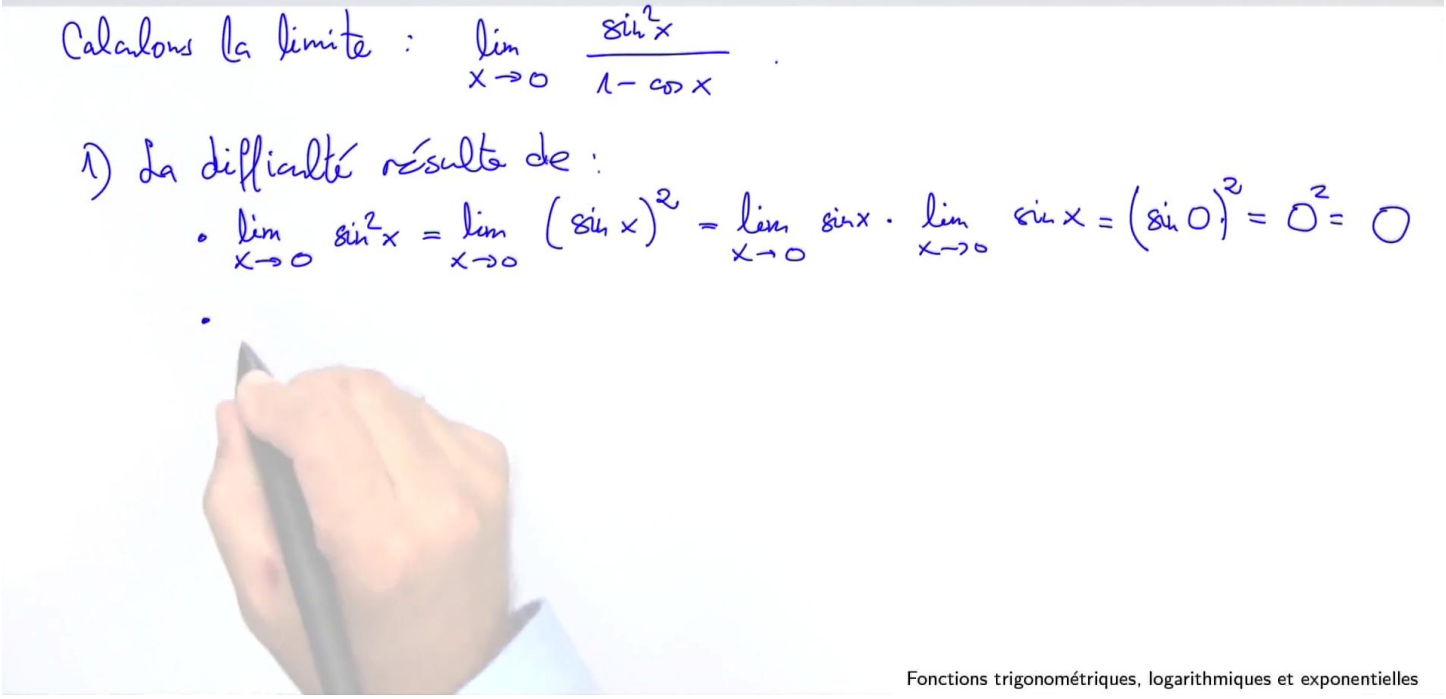
Appliquons ce que nous avons appris à un exemple qui consiste à calculer une limite, la limite que nous considérons est une limite pour x vers 0 d'un quotient. Au numérateur, nous avons un sinus de x au carré, et au dénominateur, nous avons 1 moins cosinus x.

Notes

Summary

9m 29s

Exemple : solution



Calculons la limite. Je vous rappelle, c'est la limite pour x vers 0. Au numérateur, nous avons sinus carré x, au dénominateur, nous avons 1 moins cosinus x. Ce problème est un problème difficile. Pourquoi ? Analysons la difficulté dans une première étape. Il faut d'abord comprendre pourquoi ce problème présente une difficulté. En fait, si je calcule la limite du numérateur, Parce que vous voyez, en fait, si j'ai la limite d'un quotient, je pourrais prendre les limites des numérateur et dénominateur séparément. Regardons ce qu'il se passe si je prends la limite du numérateur, c'est le sinus carré de x. Si vous voulez, de façon plus explicite, ça signifie que je prends sinus de x au carré. Ça, c'est sinus x fois sinus x. Dans un produit, on peut prendre les limites facteur par facteur, donc je vais avoir le sinus de x fois la limite, pour x vers 0, du sinus de x. Le sinus est continu. La première limite va me donner sinus de 0 fois... et la deuxième limite me redonne la même chose. Donc, c'est le sinus de 0 au carré. Le sinus de 0 est 0, donc j'obtiens 0 au numérateur. Ça, ce n'est pas grave du tout, ça ne présente aucune difficulté. Le problème, on le voit apparaître si on commence à calculer la limite du dénominateur.

Notes

Summary

9m 49s

Exemple : solution

Calculons la limite : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$.

1) La difficulté résulte de :

- $\lim_{x \to 0} \sin^2 x = \lim_{x \to 0} (\sin x)^2 = \lim_{x \to 0} \sin x \cdot \lim_{x \to 0} \sin x = (\sin 0)^2 = 0^2 = 0$
- $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} \cos x = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$

Indétermination du type "$\frac{0}{0}$"

Pour le dénominateur, il me faut calculer la limite, pour X vers 0, de 1 moins cosinus x. Je vous rappelle qu'une limite peut se calculer... la limite est une somme, une différence et peut se calculer par la somme respectivement la différence des limites. Donc je prends la limite de la constante 1 et la limite du cosinus x. La constante 1 stabilise à 1, ça, il n'y a pas de problème, la deuxième... Le cosinus est continu, donc la limite pour x vers 0 du cosinus x est cosinus 0. Mais voilà, le cosinus de 0, il vaut 1, si bien qu'au dénominateur, j'obtiens également 0. Donc je peux conclure que j'ai une indétermination. L'indétermination est du type 0 sur 0.

Notes

Summary

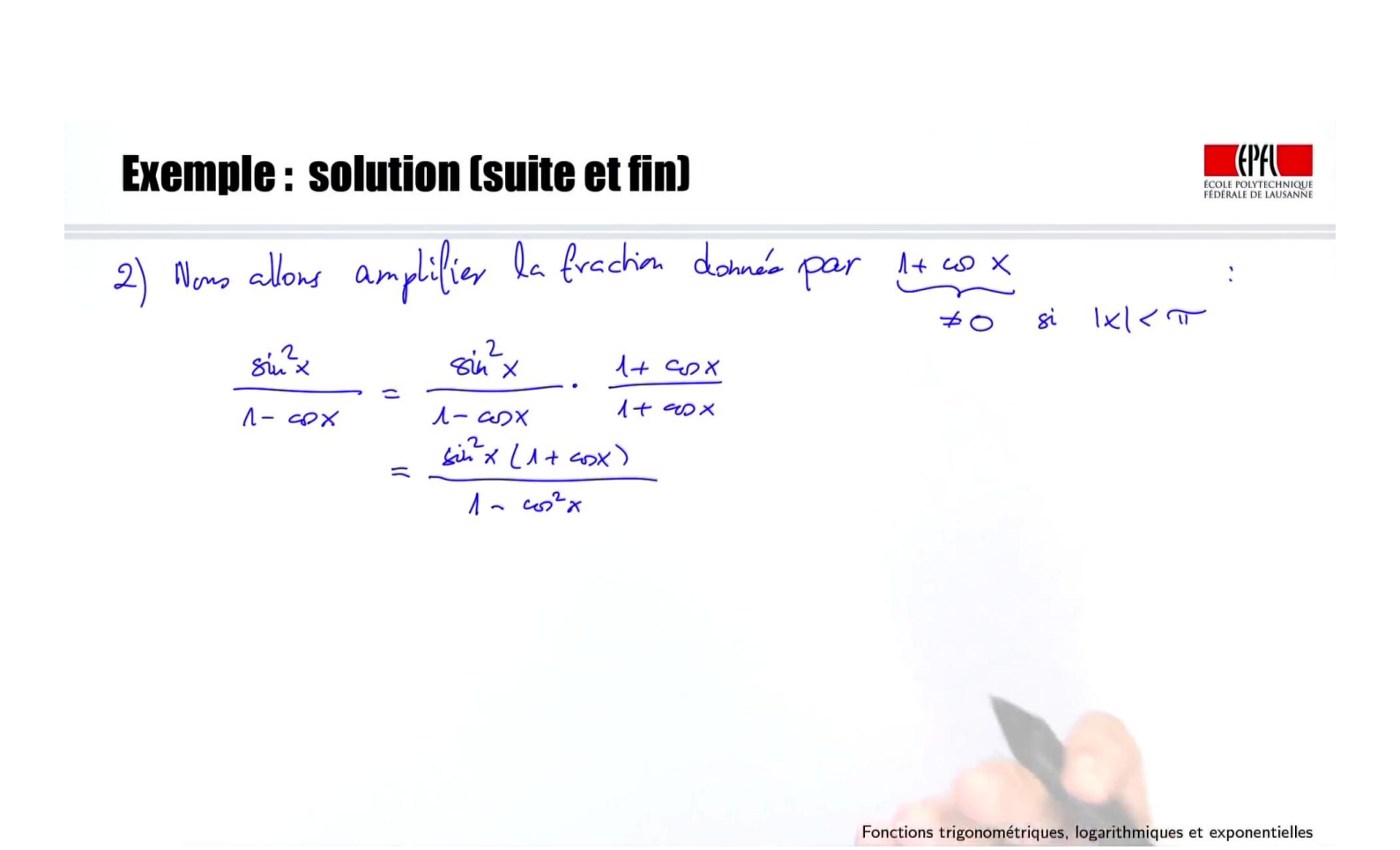
11m 36s

Exemple : solution (suite et fin)

2) Nous allons amplifier la fraction donnée par $\underbrace{1+\cos x}_{\neq 0 \text{ si } |x|<\pi}$:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x (1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Pour lever l'indétermination, je vais utiliser une amplification. Par combien allons-nous l'amplifier ? Nous allons amplifier par la somme 1 plus cosinus x. Une grandeur qui est bien adaptée parce que cette quantité-là n'est certainement pas nulle. En tout cas, si longtemps que le x est suffisamment proche de 0. Vous pouvez réfléchir, tant que x est situé entre -π et +π, le cosinus x ne peut pas valoir -1, et donc si x va tendre vers 0, cette amplification est une amplification par un terme qui n'est pas nul. Qu'est-ce que j'obtiens si j'amplifie ? J'ai ce sinus carré de x sur 1 moins cosinus x et j'amplifie. Je vous rappelle qu'une amplification, c'est simplement une multiplication par 1. Un 1 que j'écris sous la forme 1 plus cosinus x sur 1 plus cosinus x. Effectuons : au numérateur, j'ai le sinus carré de x qui multiplie 1 plus cos x. Au dénominateur, j'ai un produit du type A moins B fois A plus B. Donc, je vais obtenir A carré moins B carré, le 1 au carré donne 1 moins cosinus carré de x. Ici, peut-être, on comprend pourquoi j'ai utilisé l'amplification par 1 plus cosinus x. C'était l'amplification qui permettait de faire apparaître au dénominateur la différence de 1 moins cos carré qui est en fait le sinus carré.

Notes

Summary

12m 32s

Exemple : solution (suite et fin)

2) Nous allons amplifier la fraction donnée par $\underbrace{1+\cos x}_{\neq 0 \text{ si } |x|<\pi}$:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{\sin^2 x} = 1+\cos x$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} (1+\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x = 1 + \cos 0 = 1+1$$

$$= 2$$

Donc, j'ai sinus carré de x qui multiplie 1 plus cosinus x, sur, en fait ici, le sinus carré de x. Et là, par simplification, j'ai simplement 1 + cosinus x. Notez bien que x tend vers 0 sans être nul c'est-à-dire qu'ici, on va pouvoir simplifier par ce terme, non nul ça ne pose aucun problème. Donc, si je dis... Qu'est-ce qui se passe avec la limite x vers 0 de sinus carré x sur 1 moins cosinus x qui est une limite du type 0 sur 0 ? Je peux remplacer ce problème par la limite de x vers 0 de 1 plus cosinus x. Je détermine ces limites terme par terme. J'ai la limite du premier terme plus la limite du deuxième terme. La limite de 1 donne 1. La limite du deuxième terme, c'est la limite de x vers 0 de cosinus x, le cosinus est continu, donc cette limite est donnée par cosinus 0 et le cosinus 0 vaut 1, si bien que j'obtiens comme résultat final la réponse 2.

Notes

Summary

14m 28s

Continuité des fonctions réciproques

La fonction réciproque d'une fonction continue est continue sur son domaine de définition. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition

Les fonctions

$$\begin{aligned}
\arcsin &: [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin x \\
\arccos &: [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x \\
\arctan &: \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan x \\
\operatorname{arccot} &: \mathbb{R} \to]0,\pi[, \quad x \mapsto \operatorname{arccot} x
\end{aligned}$$

sont continues.

Faisons à présent appel à un autre résultat connu sur les fonctions continues. On sait que la fonction réciproque d'une fonction continue est continue sur son domaine de définition. Pour les fonctions arc-sinus, arc-cosinus, arc-tangentes et arc-cotangentes, ça signifie que ces fonctions sont toujours continues. Je vous rappelle qu'arc-sinus accepte un nombre entre -1 et 1, tout comme arc-cosinus. L'arc-sinus rend un bon angle pour sinus entre -π/2 et π/2, L'arc-cos un bon angle pour le cosinus entre 0 et π, Arc-tangente et arc-cotangente acceptent n'importe quel nombre et arc-tangente va vous rendre un bon angle pour tangente, c'est-à-dire un angle entre strictement -π/2 et strictement π/2, alors qu'arc-cotangente rend un angle bon pour co-tangente, c'est-à-dire un angle compris entre strictement 0 et π.

Notes

Summary

15m 50s

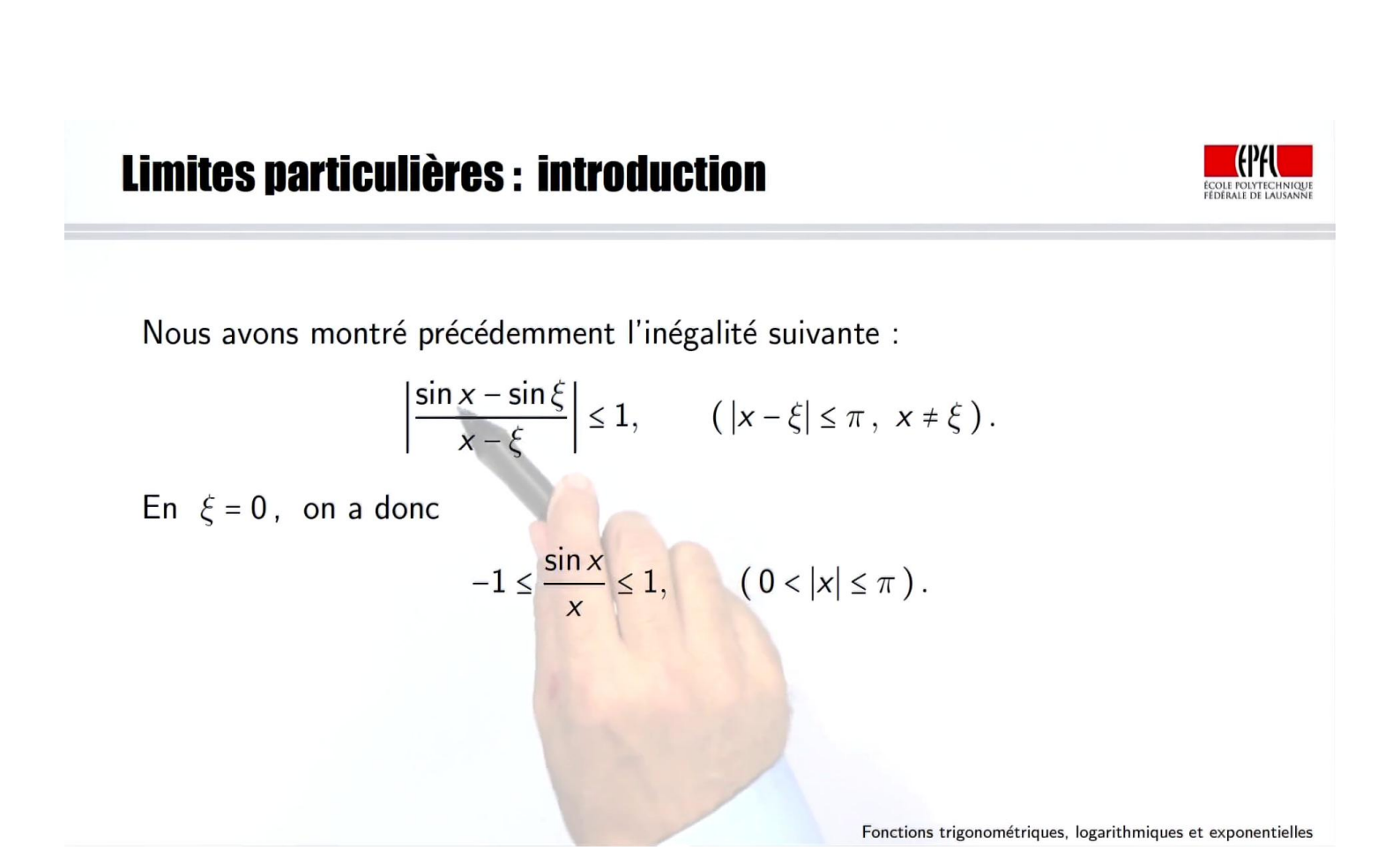
Limites particulières : introduction

Nous avons montré précédemment l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi}\right| \leq 1, \qquad (\,|x - \xi| \leq \pi\,,\ x \neq \xi\,)\,.$$

En $\xi = 0$, on a donc

$$-1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \qquad (\,0 < |x| \leq \pi\,)\,.$$



Revenons maintenant à l'inégalité que nous avons précédemment démontrée et nous allons l'utiliser pour introduire quelques limites particulières. Il faut connaître quelques limites autour de sin et de cos pour pouvoir analyser la dérivabilité de ces fonctions. Pour aujourd'hui, je vais encore préparer ces limites. Ici, cette inégalité est écrite sous une forme un peu différente, nous l'avions développée sous la forme la valeur absolue de la différence sinus x moins sinus ξ est plus petite à égale que la valeur absolue de x moins ξ. Nous l'avons divisée par ce nombre positif x moins ξ et nous obtenons donc la valeur absolue d'un quotient plus petit ou égal à 1. Je vous rappelle que x moins ξ devait être plus petit que π et x est différent de ξ, sinon je ne peux pas diviser ici par x moins ξ. On va prendre une valeur spécifique de ξ, on va la choisir de façon, je dirais, intelligente : on va prendre ξ est égal à 0. L'avantage est qu'ici au dénominateur, nous avons uniquement x et au numérateur, le sinus de 0 va disparaître aussi. Il reste donc un sinus x sur x et si je laisse tomber les valeurs absolues, cela signifie que le sinus x sur x sera toujours compris entre -1et 1.

Notes

Summary

16m 45s

Limites particulières : introduction

Nous avons montré précédemment l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi}\right| \leq 1, \qquad (\,|x - \xi| \leq \pi\,,\ x \neq \xi\,)\,.$$

En $\xi = 0$, on a donc

$$-1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \qquad (\,0 < |x| \leq \pi\,)\,.$$

On va s'intéresser à la limite de ce quotient lorsque x tend vers 0.

Observons qu'il s'agit d'une limite de type $\frac{0}{0}$.

Et je vais m'intéresser à ce qu'il se passe lorsque x s'approche de 0. On voit bien que x ne peut pas être nul, sans ça je divise par 0, mais on va s'intéresser à ce qu'il se passe si x tend vers 0. Notez bien que là, nous avons une indétermination du type 0 sur 0. Le dénominateur tend vers 0 et le numérateur... Le sinus est continu, donc si x tend vers 0, sinus x tend vers sinus 0 qui est nul aussi.

Notes

Summary

18m 01s

Limites particulières

Nous allons montrer que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Remarquons que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est une fonction paire :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x), \qquad (x \neq 0).$$

Donc on a quelque chose du type 0 sur 0 et nous essayons de lever cette indétermination par un calcul qui va nous montrer qu'en fait la limite lorsque x tend vers 0 de sinus x sur x vaut 1. Pour démontrer que cette limite vaut effectivement 1, nous allons d'abord remarquer que, si vous regardez la fonction ici dont on prend la limite, cette fonction sin (x/x), c'est une fonction qui est définie pour toute valeur de x, sauf pour 0. Elle va transformer toute valeur qui est non nulle en une valeur réelle, ici, la flèche manque, donc f va vers les nombres réels, transforme x en sinus x sur x est une fonction paire. Elle est paire, cela signifie que si je remplace x par - x, rien ne bouge. Faisons les calculs, regardons quelle est la valeur de la fonction f à l'endroit - x, c'est-à-dire je remplace ici le x par - x et là aussi. Donc j'ai le sinus de - x sur - x. Je vous rappelle que le sinus est une fonction impaire, c'est-à-dire que le sinus de - x redonne moins sinus x, ce qui permet d'écrire cette fraction sous la forme -sinus x sur -x. Les deux moins se simplifient, il reste sinus x sur x, qui est en fait f de x. Ça, c'est vrai pour toutes les valeurs de x, sauf pour x égal à 0 où rien n'est défini.

Notes

Summary

18m 26s

Limites particulières

Nous allons montrer que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Remarquons que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est une fonction paire :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x), \qquad (x \neq 0).$$

Le graphe de f étant symétrique par rapport à l'axe des y, il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Donc, cette fonction est bel et bien paire et la conséquence est qu'en fait, je dois, uniquement pour montrer que cette limite est encadrée ici, je dois uniquement montrer que la limite de sinus x sur x lorsque x tend vers 0 depuis la droite vaut 1, parce que la limite sera la même à gauche par symétrie.

Notes

Summary

19m 40s

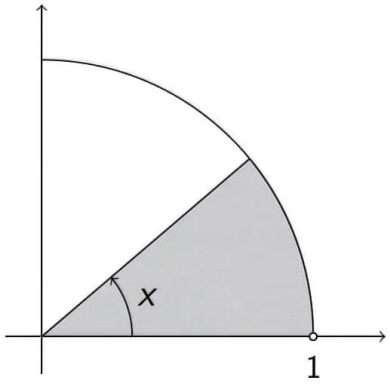
Limites particulières

L'aire du secteur circulaire est égale à

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}.$$

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on majore et on minore l'aire de ce secteur circulaire de la façon suivante :

$$\leq \frac{x}{2} \leq$$



Pour déterminer maintenant cette limite x vers 0 depuis la droite, nous allons nous placer dans le cercle trigonométrique, je n'ai dessiné qu'un quart de ce cercle trigonométrique parce qu'en fait x va tendre vers 0 du côté droit, donc x va être positif mais tendre vers 0. Le premier quadrant me suffit largement. Je vais m'intéresser à l'aire de ce secteur qui est ici en gris. Le rayon vaut 1, l'angle ici vaut x, l'aire du cercle complet serait donnée par π r carré, donc π fois 1 au carré et vu que je n'ai pas un angle de 2π, que je prends uniquement l'angle de x, j'ai ici par proportion un x divisé par 2π. Les π se simplifient et ce qu'il reste, c'est x/2. L'aire de ce secteur est donnée par x/2. On va majorer et minorer cette aire. On va le faire sous l'hypothèse que x est compris entre 0 et π/2, donc sur le premier quadrant. Encore une fois, x va tendre vers 0 donc le fait de nous limiter vers le haut à π/2 est tout à fait acceptable. Comment faire ?

Notes

Summary

19m 58s

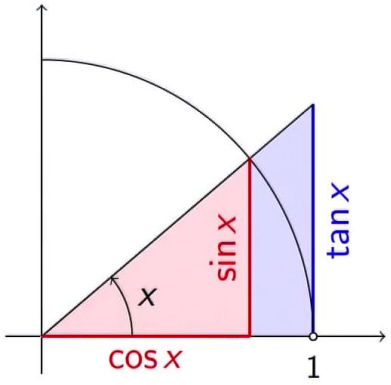
Limites particulières

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \tan x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \cdot \cos x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$



Majorons d'abord, on voit bien ici que j'ai pris un triangle qui a une aire plus grande. Si je calcule base fois hauteur divisé par 2, il va me rester 1 fois tangente x/2 donc tangente x/2. Je peux aussi minorer par un triangle rectangle. Ce triangle rectangle en rouge il a ici un côté cosinus x et sinus x, les deux sont positifs, le x est sur le premier quadrant. Donc, je vais avoir la moitié du produit 1/2 sinus x fois cosinus x. Ça, c'est une relation que j'obtiens simplement en observant 3 aires. Depuis cette relation, je l'ai réécrite ici, Depuis cette relation, nous allons obtenir le quotient qui nous intéresse, c'est-à-dire 1 sinus x sur x. On va procéder de la façon suivante : je vois ici 1/2, 1/2, 1/2. On peut multiplier une inéquation par un terme positif, ici le 2, donc de façon équivalente je peux dire que le sinus x fois cosinus x est plus petit ou égal à x, plus petit ou égal à... et tangente x, je l'écris comme sinus sur cosinus. Je vois à présent apparaître sur la gauche un sinus et sur la droite également un sinus. Un sinus x qui est positif, je vous rappelle que x est compris entre 0 et π/2. Je peux diviser par ce terme sinus x. Ce qu'il va me rester est, sur la gauche, 1 cosinus x, le sinus...

Notes

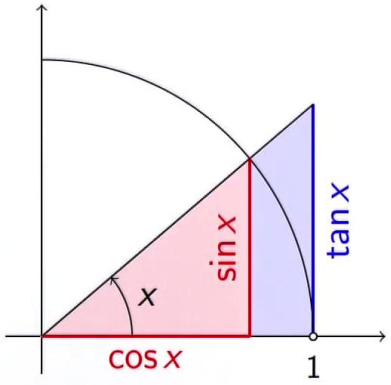
Summary

21m 15s

Limites particulières

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \tan x \\
\Leftrightarrow \quad & \sin x \cdot \cos x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\
\Leftrightarrow \quad & \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \\
\Leftrightarrow \quad & \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.
\end{aligned}$$



j'ai divisé par sinus x ici le quotient x sur sinus x et finalement le quotient 1 sur cosinus x. On est relativement proche de l'objectif, en fait on veut calculer la limite non pas de x sur sinus x, mais de sinus x sur x. Ce que l'on va faire, on va simplement prendre la valeur réciproque de chacun de ces termes. Je vous rappelle que ces 3 termes sont positifs, le cosinus x est positif, le x sur sinus x est positif et le 1 sur cosinus x est positif. Je vous rappelle que le x est compris entre 0 et π/2. Si j'ai 3 nombres classés comme ça, si je prends la valeur réciproque, donc la fonction 1 sur x, cela signifie que l'ordre des trois termes change. C'est-à-dire que le 1 sur cosinus x que j'obtiens sur la gauche va être le terme le plus grand. Ici, je prends sinus x sur x et le 1 sur 1 sur cosinus x, en fait cosinus x devient le terme le plus petit, donc on peut aussi écrire ces inégalités là.

Notes

Summary

22m 40s

Limites particulières

A partir de

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad \left(0 < x < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

et sachant que

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1,$$

le théorème du gendarme nous permet de conclure que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Une fois que l'on a ces inégalités, valables pour x entre 0 et π/2, on peut conclure facilement. Pourquoi ? Le terme à gauche, cosinus x est continu, donc si x tend vers 0 depuis la droite, pour cosinus x, je vais obtenir cosinus 0. J'obtiens la même valeur que si x tendait vers 0 tout court, et le cosinus de 0 vaut 1, donc sur la gauche, la limite vaut 1. Sur la droite, j'ai un 1 sur cosinus x alors sa limite lorsque x tend vers 0 est... alors je prends les limites séparément au numérateur et au dénominateur. Au numérateur, cela va me donner 1 Au dénominateur, j'obtiens cosinus 0 qui vaut aussi 1 et le quotient 1 sur 1 donne 1, c'est-à-dire que le terme à droite tend vers 1, le terme à gauche tend vers 1 si bien que le sinus x sur x se retrouve coincé entre 2 grandeurs qui prennent la même valeur, lorsque x tend vers 0 et donc le sinus x sur x doit prendre cette valeur commune qui est de 1.

Notes

Summary

23m 43s

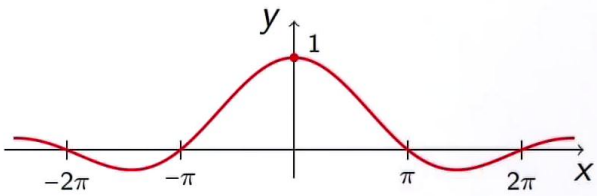
Limites particulières

Proposition

On a $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.}$

La fonction $f : \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *peut donc être prolongée par continuité :*

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous pouvons donc formuler une proposition qui est la suivante : la limite, lorsque x tend vers 0, de sinus x sur x est égale à 1. C'est-à-dire si je prends la fonction qui transforme x en sinus x sur x, fonction qui est définie pour tous les x sauf pour 0, donc c'est une fonction qui va de R sans 0... il manque malheureusement ici une fois encore la flèche vers R, donc si je prends cette fonction f, elle peut être prolongée par continuité. Cela signifie que le prolongement est donné par tant que x est non nul, je prends l'ancienne valeur, sinus x sur x, et si x vaut 0, j'ai 1. Ici vous trouvez en rouge le graphe de la fonction f de départ, donc sinus x sur x, et on voit très bien, pour x égal à 0, cette fonction n'est pas définie. En revanche, lorsque je m'approche du 0, ce sinus x sur x se stabilise à la hauteur 1 et si je prends le prolongement par 1, alors j'obtiens une fonction prolongée. Regardez bien, on va pouvoir remplir ce trou par la valeur 1 si x vaut 0, et on obtient alors une fonction qui est continue partout, sur tout l'axe réel.

Notes

Summary

24m 41s

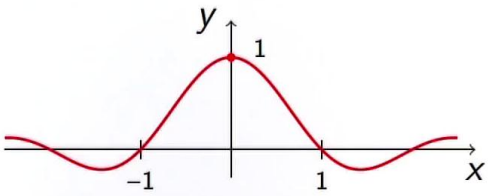
La fonction sinc normalisée

Proposition

Pour tout $\omega \neq 0$, *on a* $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} = 1.}$

Pour $\omega = \pi$, *on note sinc normalisée la fonction*

$$\text{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$



Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

On peut formuler le tout encore de façon un peu plus générale : si vous prenez le quotient de sinus ω t sur ω t avec ω une constante non nulle, et vous dites que t tend vers 0, vous retrouvez cette limite de 1. Pourquoi ? Simplement... ω t est le x, donc vous avez sinus x sur x et si t tend vers 0, le ω t qui est le x tend aussi vers 0. On retrouve cette même limite. Dans les applications, on retrouve très souvent cette fonction sinus ω t sur ω t, on la retrouve particulièrement fréquemment avec ω égal à π et alors on parle de la fonction sinc normalisée. Cette fonction sinc normalisée, elle prend, si t est non nul, la valeur sinus π t sur π t et elle prend la valeur de 1 si t est nul. Vous avez ici le graphe. C'est une fonction continue sur tout l'axe réel. Notez bien que le choix d'ω égal à π est intéressant parce que si vous regardez où la fonction sinc s'annule, on voit très bien qu'il faut, par exemple, que t vaille 1 ici. Vous avez sinus π sur π, sinus π s'annule ou alors, à l'endroit -1, sinus de -π qui s'annule sur -π. Donc, on retrouve ici les 0 à l'endroit + ou -1 et la valeur de 1 à 0.

Notes

Summary

25m 52s

Limites particulières

Proposition

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1\,.$$

On peut encore étendre maintenant le champ des limites particulières. Fondamentalement, c'est la limite sinus x sur x pour x vers 0, mais elle a des conséquences. Par exemple, je peux, si vous voulez, remplacer dans cette limite, sinus x sur x, le sinus par tangente, et la limite ne change pas. Il me reste, donc, pour x vers 0 : tangente x sur x vaut 1. Pourquoi ? C'est facile à voir. Il suffit de prendre tangente x sur x, de remplacer ce tangente par le quotient sinus sur cosinus. Je l'ai fait un peu habilement ici, donc vous avez ici le sinus sur cosinus qui correspond à tangente, vous avez ici le divisé par x. J'ai regroupé le terme sinus x sur x et il reste alors devant un terme 1 sur cosinus x. La limite des produits, c'est le produit des limites, donc je vais prendre la limite de 1 sur cosinus x fois la limite de sinus x sur x. La deuxième limite, on vient de l'analyser, elle vaut 1, elle est multiple de 0 sur 0 mais elle vaut 1. La première, par continuité, cela va donner 1 sur la limite du cosinus x qui est le cosinus 0, donc qui est 1, 1 sur 1. Donc, il reste 1 sur 1 fois 1 et cela nous donne bel et bien 1. Deuxième limite connue, similaire.

Notes

Summary

27m 18s

Limites particulières

Proposition

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1\,.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1-\cos^2 x\right)}{x^2\left(1+\cos x\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Si vous prenez la limite de 1 moins cosinus x sur x carré/2, vous retrouverez également 1. Notez bien que les deux limites ici sont des limites qu'il faut qualifier du type 0 sur 0. Ici vous avez tangente 0 sur 0, donc 0 sur 0, ici vous allez avoir 1 moins cos 0 donc 0 sur 0 de nouveau. De nouveau on peut lever cette indétermination et on peut obtenir un résultat. L'astuce utilisée ici ne devrait pas vous surprendre, nous avons déjà rencontré un terme 1 moins cosinus x qui nous dérangeait parce qu'il s'annulait et nous avons amplifié la fraction par 1 plus cos x. On fait la même chose une deuxième fois : on va placer ce 2 au numérateur, le x carré est là, l'amplificateur 1 plus cos x est là et au numérateur, cela me donne un 1 moins cos carré, un 1 moins cos carré que je reconnais immédiatement comme un sinus carré. Donc, il va me rester, d'une part le 2 sur 1 plus cos x, d'autre part le sinus carré de x sur x carré, qui est là. Regardons ce que cela donne, je prends les limites séparément. Ici, je vais avoir 2/(1+cos 0) qui vaut 1 aussi, donc cette limite donne 1. Ici, notez bien que j'ai simplement sinus x sur x fois sinus x sur x et chacune de ces deux fractions tend vers 1, donc là, je tends vers 1 au carré, donc le tout va tendre vers 1.

Notes

Summary

28m 35s

Continuité des fonctions trigonométriques

Ce que nous avons appris :

- la continuité des fonctions trigonométriques ;
- quelques limites remarquables.

Prochaine étape :

- la dérivée des fonctions trigonométriques.

Voilà ce que je vous ai présenté aujourd'hui : Nous avons parlé de la continuité des fonctions trigonométriques. Le résultat est simple : elles sont toutes continues partout sur leur domaine de définition. On a en revanche établi quelques limites remarquables, des limites qui étaient du type 0 sur 0. La plus importante était la limite de sinus x sur x lorsque x tend vers 0. La prochaine fois, nous allons nous intéresser à une propriété qui est plus forte que celle d'être continue, on va s'intéresser justement à la dérivabilité des fonctions. Nous allons nous interroger sur le fait : est-ce que le sinus a une dérivée ? Et si oui, comment calculer la dérivée de ce sinus. Nous répondrons à ces questions pour toutes les fonctions trigonométriques. Merci de m'avoir suivi et à la prochaine.

Notes

Summary

30m 10s