ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Continuité et dérivabilité des fonctions trigonométriques

8.1 Continuité des fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

EPFL

Continuité des fonctions trigonométriques : introduction

On cherche à montrer que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Guten Tag. Seien Sie willkommen in meinem Kurs trigonometrische, logarithmische und Exponentialfunktionen. Heute beginnen wir in Kapitel 8. Dies ist das letzte Kapitel das den trigonometrischen Funktionen gewidmet ist. Das Ende des Kurses ist den logarithmischen und Exponentialfunktionen gewidmet aber keine Sorge, diese Kapitel werden dann viel kürzer sein. Wir werden weit weniger sagen über diese logarithmischen und Exponentialfunktionen als wir es für die trigonometrischen Funktionen getan haben. Zum Abschluss dieser Präsentation der trigonometrischen Funktionen werden wir uns für die Stetigkeit und Differenzierbarkeit trigonometrischer Funktionen interessieren. Heute werden wir die Stetigkeit analysieren und wir werden die Differenzierbarkeit bei einem nächsten Mal in Frage stellen. Stellen wir uns die Frage der Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen. Wir beginnen mit den ersten beiden trigonometrischen Funktionen: dem Sinus und dem Kosinus. Wir wollen zeigen, dass sowohl der Sinus wie auch der Kosinus auf R kontinuierlich sind. Ich erinnere Sie daran, dass die Stetigkeit eine punktueller Begriff ist: eine Funktion ist stetig in einem Punkt ξ oder sie ist es nicht.

Notes

Summary

0m 03s

Continuité des fonctions trigonométriques : introduction

On cherche à montrer que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Pour cela on montre que ces fonctions sont continues en un point donné quelconque ξ de $\mathbb{R}$.

On vérifie donc que

$$\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin \xi \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\xi} \cos x = \cos \xi .$$

Und sagen, dass es in der Regel stetig ist bedeutet, dass sie an jedem der Punkte seines Definitionsbereichs stetig ist. Wenn wir zeigen wollen, dass die Funktionen Sinus und Cosinus stetig sind auf R, muss man zeigen, dass diese Funktionen in jedem Punkt ξ von R stetig sind. Wir werden einen beliebigen Punkt nehmen, wenn er beliebig ist, bedeutet es, dass er gültig sein wird für alle Werte von ξ. Die Stetigkeit in ξ bedeutet Folgendes: Wir müssen dann nur die Grenze zeigen, wenn x zu ξ tendiert Sinus x ergibt Sinus ξ. Für den Kosinus ist es gleich, wir werden nur die Grenze zeigen, wenn x nach ξ tendiert, dieses Mal Kosinus x ergibt Kosinus ξ. Wenn ich vielleicht hierher zurückkomme zur ersten Grenze, kann man sagen, dass sie die Tatsache ausdrückt, dass der Sinus von fast ξ ergibt quasi den Sinus von ξ aber in der Tat genauer, das bedeutet Folgendes: dies bedeutet, dass die Differenz zwischen Sinus x und Sinus ξ ist genauso klein wie wir es wollen vorausgesetzt, man zahlt dafür folgenden Preis: das, was zu tun ist, ist x nah genug von ξ zu wählen. Wenn man sehr anspruchsvoll hinsichtlich des Ansatzes von Sinus x zu Sinus ξ ist, muss man noch anspruchsvoller sein hinsichtlich der Tatsache, dass das x in der Nähe von ξ ist. Es gibt die gleiche Einschränkung hier für den Kosinus.

Notes

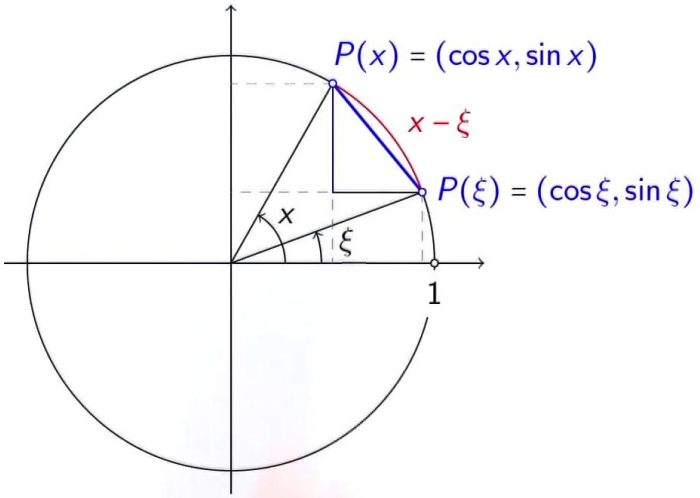
Summary

1m 20s

Continuité des fonctions trigonométriques

Considérons les fonctions sinus et cosinus sur un voisinage de $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $|x - \xi| < \pi$,
alors la longueur de la corde définie par les deux points $P(\xi)$ et $P(x)$ est plus petite que la longueur de l'arc défini par ces deux points.



Um die Situation zu analysieren, muss man auf den trigonometrischen Kreis zurückkommen. Hier haben Sie die Koordinatenachse, Sie haben diesen trigonometrischen Kreis, dieser Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung. Wir wählen ein echtes ξ, hier und wir wählen einen zweiten Wert x der nah von ξ ist. Für die Zeichenzwecke habe ich ein x genommen, das etwas höher ist, ich sage sogar ziemlich höher als ξ. Ich lasse Sie eine ähnliche Zeichnung für x etwas kleiner als ξ erstellen. Wir werden etwas näher rücken, um es abzuschließen, in dieser Zeichnung, x von ξ. Die Gültigkeitsgrenze für die Zeichnung ist hier gegeben, also die Differenz zwischen x und ξ darf π im absoluten Wert nicht überschreiten. Wenn x zu ξ neigt, dies ist keine Einschränkung. Hier für ξ, betrachte ich diesen Punkt den man als P von ξ bezeichnet, für den Winkel ξ. Er besitzt die Koordinaten Kosinus ξ und Sinus ξ. Für den Winkel x habe ich den Punkt P(x) mit den Koordinaten Kosinus x und Sinus x. Darüber hinaus entlang des trigonometrischen Kreises, hier, dieser Bogen wird durch den Winkel x gegeben minus Winkel ξ, also wird er durch x minus ξ gegeben und die Bemerkung die ich jetzt benutzen werde in der Folge meiner Berechnungen ist, dass die Länge des Seils, die die beiden Punkte P(x) und P(ξ) verbindet kleiner ist als der Bogen, hier in rot.

Notes

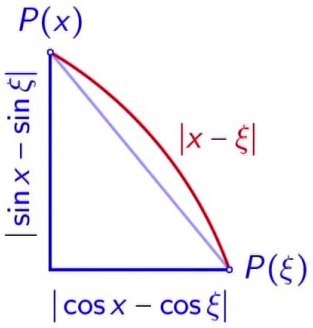
Summary

2m 54s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| \, .$$



Lassen Sie uns die Situation hier ein wenig vergrößern. Ich habe hier den Punkt P(x), P(ξ), ich habe hier den Bogen, ich habe hier das Seil.

Notes

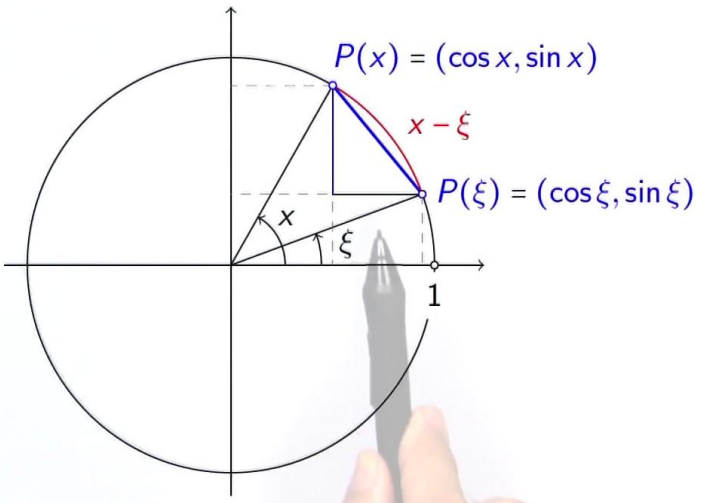
Summary

4m 22s

Continuité des fonctions trigonométriques

Considérons les fonctions sinus et cosinus sur un voisinage de $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $|x - \xi| < \pi$,
alors la longueur de la corde définie par les deux points $P(\xi)$ et $P(x)$ est plus petite que la longueur de l'arc défini par ces deux points.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wenn Sie sich es ein wenig näher ansehen was sind die Werte der Längen dieses rechtwinkligen Dreiecks, ich erlaube mir vielleicht zurückzugehen, hier, erinnere ich Sie daran, dass das P(ξ) die X-Koordinaten hatte gegeben durch Cosinus ξ, für P(x) ist es Kosinus x, daher hier die Differenz, es ist die Differenz Kosinus Das, was ich hier mache, ist, dass ich absolute Werte nehme weil ich den Fall generell behandeln möchte, ob X größer oder kleiner ist als ξ.

Notes

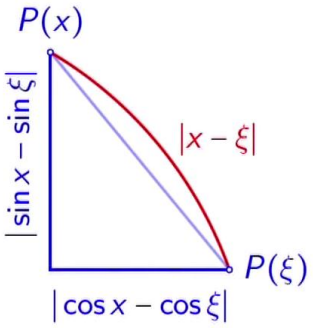
Summary

4m 31s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| \,.$$



Notes

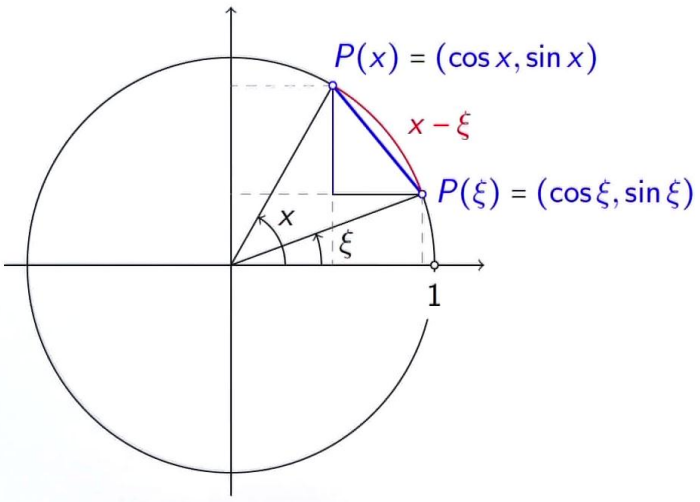
Summary

4m 52s

Continuité des fonctions trigonométriques

Considérons les fonctions sinus et cosinus sur un voisinage de $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $|x - \xi| < \pi$,
alors la longueur de la corde définie par les deux points $P(\xi)$ et $P(x)$ est plus petite que la longueur de l'arc défini par ces deux points.



Auf die gleiche Weise der Sinus, ich gehe noch einmal zurück, man sieht sehr gut, dass wenn ich den Sinus von x minus Sinus von ξ nehme, dann erhalte ich diese vertikale Distanz und ich nehme absolute Werte um auf der richtigen Seite zu sein.

Notes

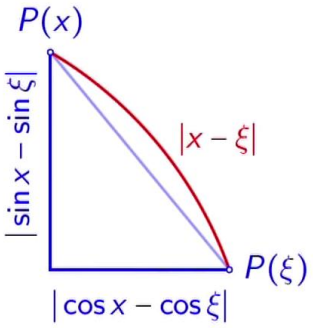
Summary

5m 01s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| .$$



On a donc

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2} \leq \sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi|$$

$$\Rightarrow \quad |\sin x - \sin \xi| \leq |x - \xi| .$$

Also, wenn ich den Satz des Pythagoras auf diesem rechtwinkligen Dreieck anwende, dann habe ich die Differenz des Sinus in absoluten Werten im Quadrat, das ist hier plus die Differenz des Kosinus in absoluten Werten im Quadrat. Ich ziehe die Wurzel und ich erhalte das Seil, die Länge des Seils und dies kann nicht weniger sein also ist es kleiner oder gleich wie die Länge des Bogens, wir haben gesagt, dass es x minus ξ war. Ich benutze absolute Werte, einfach deshalb weil ich die Hypothese verlassen möchte, dass x größer ist als ξ wie in der vorherigen Zeichnung.. Ich kann jetzt die folgenden Beziehungen aufschreiben: hier finden Sie die Beziehung, die wir gerade hier entwickelt haben. Diese Wurzel, die die Summe der zwei positiven Terme enthält kann ich senken, indem ich eine der beiden Terme lösche. Also lösche ich zum Beispiel den cos, es bleibt die Wurzel des absoluten Werts im Quadrat von einer Differenz von Sinus. Das erleichtert es und man erhält, um es abzuschließen, nur in einem absoluten Wert, die Differenz zwischen Sinus x und Sinus ξ ist kleiner oder gleich wie der absolute Wert der Differenz x minus ξ. Das, was ich getan habe, indem ich hier den Kosinus gelöscht habe, kann ich auch machen, indem ich den Sinus lösche.

Notes

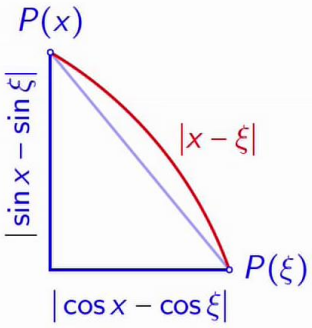
Summary

5m 15s

Continuité des fonctions trigonométriques

La longueur de la corde est plus petite que celle de l'arc :

$$\sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi| \,.$$



De même

$$\sqrt{|\cos x - \cos \xi|^2} \leq \sqrt{|\sin x - \sin \xi|^2 + |\cos x - \cos \xi|^2} \leq |x - \xi|$$

$$\Rightarrow \quad |\cos x - \cos \xi| \leq |x - \xi| \,.$$

Fertig, und hier das entsprechende Ergebnis. Man erhält eine ähnliche Einschätzung, dieses Mal für die Differenz des Kosinus. Der Kosinus am Ort x minus den Kosinus am Ort ξ. Als absoluter Wert kann er nicht größer sein als die Differenz x minus ξ in absolutem Wert.

Notes

Summary

6m 34s

Continuité des fonctions trigonométriques

$$\begin{cases} 0 \le |\sin x - \sin \xi| \le |x - \xi| \\ 0 \le |\cos x - \cos \xi| \le |x - \xi| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \\ 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| = 0 \\ \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| = 0 \end{cases}$$

Fassen wir die beiden Ergebnisse zusammen: wir haben sie hier. Für den Sinus kleiner oder gleich Sinus minus ξ, und für den Kosinus, kleiner oder gleich... die gleiche Einschätzung. Die absoluten Werte, wie auch immer, können nicht negativ sein. Man erhält eine Ungleichheit, eine Kette von Ungleichheiten, eine für die Differenz des Sinus, die andere für die Differenz des Kosinus. Das, was mich interessiert ist der Abschnitt an der Grenze, ich möchte aktuell x zu ξ tendieren lassen. Hier wird dieses x zu ξ tendierten, dieses da auch. Wenn wir dies machen, schreibe ich hier Grenze x zu ξ. Ich erinnere Sie daran, dass eine Grenze die Ungleichheiten behält, also statt die Grenze hier des linken Terms zu nehmen, nehme ich die Grenze des rechten Terms. Wenn ich die Grenze nehme, ist die Konstante 0 0, also diese Ungleichheiten, die erste Linie genauso wie die zweite Linie die beiden Linien werden beibehalten wenn ich diese Grenze von x nach ξ hinzufüge. Hier rechts haben Sie zwei Mal die gleiche Grenze und diese Grenze hat den Wert 0. So dass der Term der Mitte genau zwischen 0 und dann einem Term, der Richtung 0 tendiert, eingeklemmt ist Also ist der Grenzwert zweier Terme hier in der Mitte 0, was bedeutet, dass die Grenze von Sinus x bei Sinus von ξ wiederkehrt.

Notes

Summary

6m 54s

Continuité des fonctions trigonométriques

$$\begin{cases} 0 \le |\sin x - \sin \xi| \le |x - \xi| \\ 0 \le |\cos x - \cos \xi| \le |x - \xi| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \\ 0 \le \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| \le \lim\limits_{x \to \xi} |x - \xi| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi} |\sin x - \sin \xi| = 0 \\ \lim\limits_{x \to \xi} |\cos x - \cos \xi| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi} \sin x = \sin \xi \\ \lim\limits_{x \to \xi} \cos x = \cos \xi \,. \end{cases}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont donc continues en ξ, $(\xi \in \mathbb{R})$; elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Und die Grenze von Kosinus x ist genau der Kosinus von ξ. In anderen Termen sind der Sinus und der Kosinus in ξ stetig, und ξ war ein beliebiger Wert, also kann man sagen, dass diese Funktionen stetig sind auf der reellen Geraden und ich möchte dies in einem Vorschlag formulieren, indem ich sage dass der Sinus und der Kosinus stetig sind zu R.

Notes

Summary

8m 14s

Continuité des fonctions trigonométriques

Proposition

Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Diese Funktionen sind in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig.

Notes

Summary

8m 39s

Continuité des fonctions trigonométriques

Le quotient de deux fonctions continues est continu sur son domaine de définition. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition

Les fonctions tangente et cotangente sont continues en tout point de leur domaine de définition :

$$\lim_{x\to\xi} \tan x = \tan\xi, \qquad (\xi \in \mathbf{D}_{\tan}) \quad \textit{et}$$
$$\lim_{x\to\xi} \cot x = \cot\xi, \qquad (\xi \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Wir wissen, dass der Quotient der beiden stetigen Funktionen in seinem Definitionsbereich stetig ist. Wir folgern sofort daraus, dass die Tangente der Quotient von Sinus durch Kosinus ist, und Kotangens, ist der Quotient aus Kosinus zu Sinus, diese beiden Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig. Das heißt, dass ich schreiben kann, dass die Grenze der Tangente x, wenn x nach ξ tendiert, die Tangente ξ ergibt. Und das ist für alle ξ im Definitionsbereich der Tangente gültig. Auf gleiche Weise kann ich schreiben, dass die Grenze des Kotangens x, wenn x nach ξ tendiert, Kotangens ξ ist. Und dieses Mal ist es für alle ξ im Definitionsbereich der Kotangensfunktion gültig.

Notes

Summary

8m 45s

Exemple

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}.$$

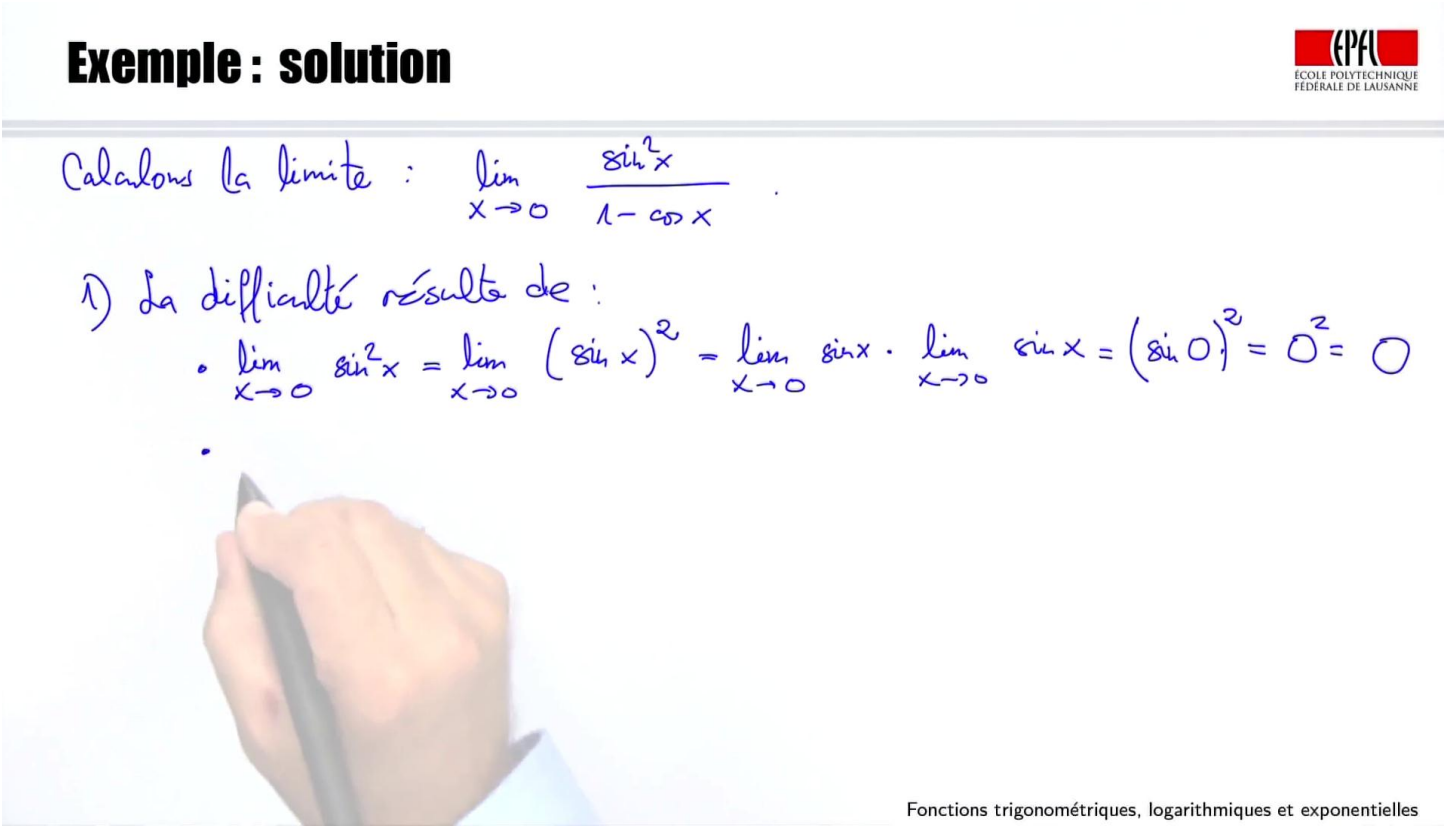
Führen wir das, was wir gelernt haben, an einem Beispiel durch, das daraus besteht, eine Grenze zu berechnen, die Grenze, die wir betrachten ist eine Grenze für x gegen 0 eines Quotienten. Im Zähler haben wir ein Sinus von x zum Quadrat, und im Nenner haben wir 1 minus Kosinus x.

Notes

Summary

9m 29s

Exemple : solution



Berechnen wir den Grenzwert. Ich erinnere Sie daran, dies ist die Grenze für x gegen 0. Im Zähler haben wir Sinus Quadrat x, im Nenner haben wir 1 minus Kosinus x. Dieses Problem ist ein schwieriges Problem. Warum? Analysieren wir die Schwierigkeit in einer ersten Etappe. Man muss zuerst verstehen, warum dieses vorliegende Problem eine Schwierigkeit ist. Nun, wenn ich die Grenze im Zähler berechne, weil Sie in der Tat sehen, wenn ich eine Grenze eines Quotienten habe, kann ich die Grenzen des Zählers und Nenners einzeln nehmen. Schauen wir, was passiert, wenn ich die Grenze des Zählers nehme, das ist der Sinus Quadrat von x. Wenn Sie wollen, expliziter, bedeutet es, dass ich Sinus von x im Quadrat nehme. Das ist Sinus x mal Sinus x. In einem Produkt kann man Grenzen Faktor für Faktor nehmen, also erhalte ich den Sinus von x mal die Grenze, für x gegen 0, Sinus von x. Der Sinus ist stetig. die erste Grenze gibt mir Sinus von 0 mal...und die zweite Grenze gibt mir die gleiche Sache. Also, es ist der Sinus von 0 im Quadrat. Der Sinus von 0 ist 0, also erhalte ich 0 im Zähler. Das ist überhaupt nicht schlimm, das ist keine Schwierigkeit. Das Problem erscheint, wenn man mit der Grenze des Nenners zu rechnen beginnt.

Notes

Summary

9m 49s

Exemple : solution

Calculons la limite : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$.

1) La difficulté résulte de :

- $\lim_{x \to 0} \sin^2 x = \lim_{x \to 0} (\sin x)^2 = \lim_{x \to 0} \sin x \cdot \lim_{x \to 0} \sin x = (\sin 0)^2 = 0^2 = 0$
- $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} \cos x = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$

Indétermination du type "$\frac{0}{0}$"

Für den Nenner muss ich die Grenze für x gegen 0 berechnen, von 1 minus Kosinus x. Ich erinnere Sie daran, dass man eine Grenze berechnen kann...die Grenze ist eine Summe, eine Differenz und kann berechnet werden durch die Summe beziehungsweise die Differenz der Grenzen. Also nehme ich die Grenze der Konstanten 1 und die Grenze des Kosinus x. Die Konstante 1 stabilisert bei 1 daraus ergibt sich kein Problem, die Zweite...der Kosinus ist stetig, also ist die Grenze für x gegen 0 des Kosinus x der Kosinus 0. Aber hier, der Kosinus 0 ist 1, so dass wie im Nenner ich auch 0 erhalte. Also kann ich daraus schließen, dass ich eine Unbestimmtheit habe. Die Unbestimmtheit ist der Typ 0 auf 0.

Notes

Summary

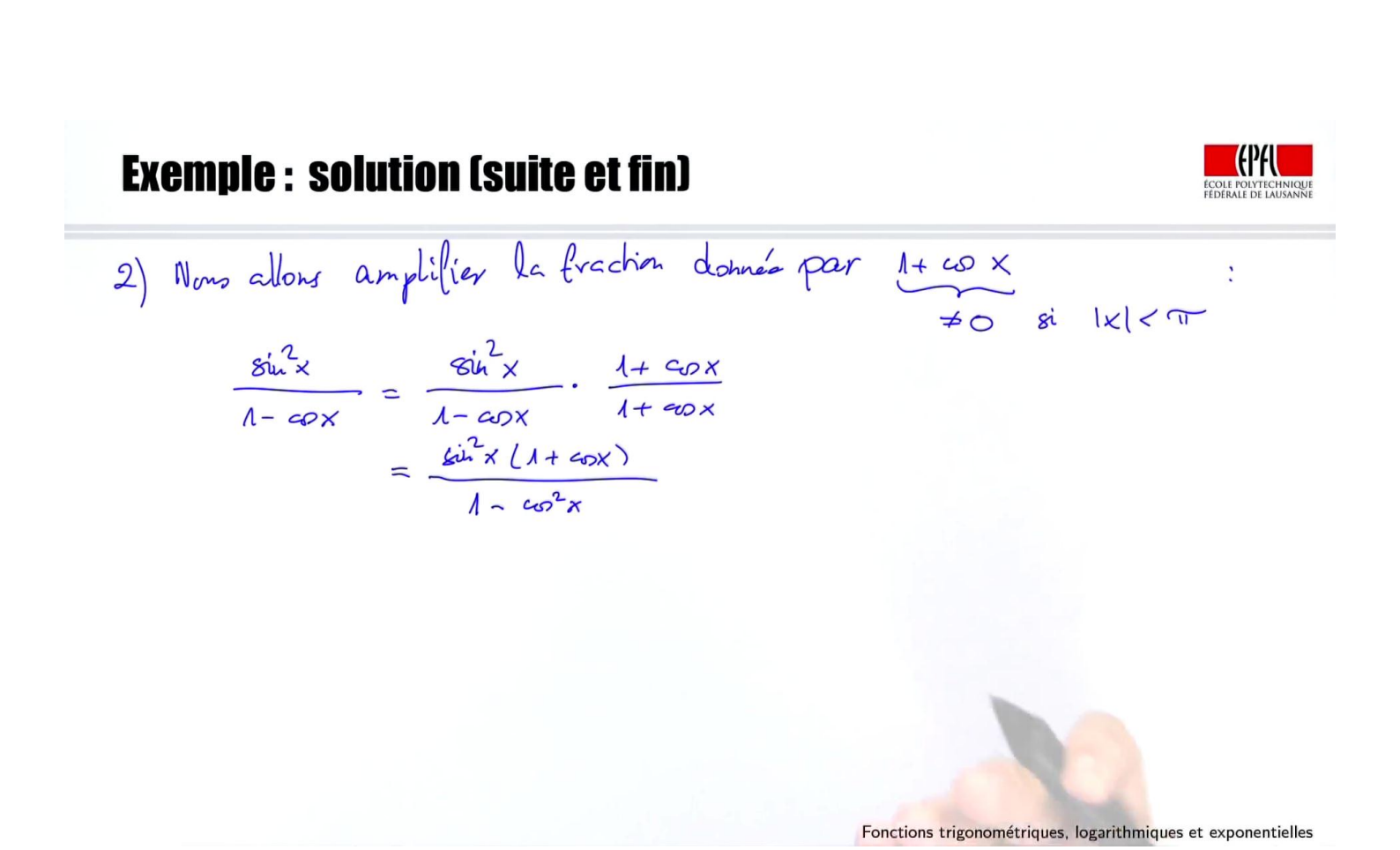
11m 36s

Exemple : solution (suite et fin)

2) Nous allons amplifier la fraction donnée par $\underbrace{1+\cos x}_{\neq 0 \text{ si } |x|<\pi}$:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x (1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$



Um die Unbestimmtheit aufzulösen, werde ich eine Amplifikation benutzen. Wir werden mit wie viel erweitern? Wir werden mit der Summe 1 plus Kosinus x erweitern. Eine Größe, die gut geeignet ist, weil diese Menge sicherlich nicht Null ist. In jedem Fall, so lange wie x ausreichend nahe an 0 ist. Sie können nachdenken, so lange x zwischen -π und +π liegt, kann der Kosinus x nicht -1 werden, und wenn x gegen 0 tendiert, ist diese Amplifikation eine Amplifikation eines Terms, der nicht Null ist. Was erhalte ich, wenn ich erweitere? Ich habe diesen Sinus Quadrat von x auf 1 minus Kosinus x und ich erweitere. Ich erinnere Sie daran, dass die Erweiterung einfach eine Multiplikation mit 1 ist. Eine 1 die ich unter der Form 1 plus Kosinus x schreibe auf 1 plus Kosinus x. Wir führen aus: im Zähler habe ich den Sinus Quadrat von x, den ich mit 1 plus cos x multipliziere. Im Nenner habe ich ein Produkt des Typs A minus B mal A plus B. Also erhalte ich A Quadrat minus B Quadrat, die 1 im Quadrat ergibt 1 minus Kosinus Quadrat von x. Hier vielleicht versteht man, warum ich die Amplifikation benutze mit 1 plus Kosinus x. Das war die Amplifikation, die es ermöglicht, im Nenner die Differenz von 1 minus cos Quadrat erscheinen zu lassen, die in der Tat Sinus Quadrat ist.

Notes

Summary

12m 32s

Exemple : solution (suite et fin)

2) Nous allons amplifier la fraction donnée par $\underbrace{1+\cos x}_{\neq 0 \text{ si } |x|<\pi}$:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{\sin^2 x} = 1+\cos x$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} (1+\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x = 1 + \cos 0 = 1+1$$

$$= 2$$

Also habe ich Sinus Quadrat von x, das ich mit 1 plus Kosinus x multipliziere, auf hier Sinus Quadrat von x. Und da, durch Amplifikation, habe ich einfach 1 + Kosinus x. Beachten Sie, dass x gegen 0 ohne Null zu sein tendiert. das heißt, dass wir hier mit diesem Term nicht Null erweitern können das ist kein Problem. Also, wenn ich sage... Was passiert mit der Grenze x gegen 0 von Sinus Quadrat x auf 1 minus Kosinus x, das eine Grenze des Typs 0 auf 0 ist? Ich kann dieses Problem durch die Grenze x gegen 0 ersetzen mit 1 plus Kosinus x. Ich bestimme diese Grenzen Term für Term. Ich habe die Grenze des ersten Terms plus die Grenze des zweiten Terms. Die Grenze von 1 ergibt 1. Die Grenze des zweiten Terms, das ist die Grenze von x gegen 0 von Kosinus x, der Kosinus ist stetig, also diese Grenze ist gegeben durch Kosinus 0 und Kosinus 0, ergibt 1, so dass ich als finales Ergebnis Antwort 2 erhalte.

Notes

Summary

14m 28s

Continuité des fonctions réciproques

La fonction réciproque d'une fonction continue est continue sur son domaine de définition. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition

Les fonctions

$$\begin{aligned}
\arcsin &: [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin x \\
\arccos &: [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x \\
\arctan &: \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan x \\
\operatorname{arccot} &: \mathbb{R} \to]0,\pi[, \quad x \mapsto \operatorname{arccot} x
\end{aligned}$$

sont continues.

Lassen Sie uns jetzt ein weiteres bekanntes Ergebnis zu den stetigen Funktionen aufrufen. Es ist bekannt, dass die inverse Funktion einer stetigen Funktion in seinem Definitionsbereich stetig ist Für die Funktionen Arkussinus, Arcuskosinus Arcustangens und Arkuscotangens, bedeutet dies, dass diese Funktionen immer stetig sind. Ich erinnere Sie, dass der Arkussinus eine Zahl zwischen -1 und 1 liegend akzeptiert, genauso wie der Arcuskosinus. Der Arkussinus ergibt einen guten Winkel für Sinus zwischen -π/2 und π/2, der Arkuskosinus einen guten Winkel für den Kosinus zwischen 0 und π, der Arkustangens und der Arkuscotangens akzeptieren egal welche Zahl und der Arkustangens ergibt einen guten Winkel für die Tangente das heißt, ein Winkel strikt zwischen -π/2 und strikt π/2, während der Arkuscotangens einen guten Winkel für Cotangens ergibt, das heißt ein Winkel einschließlich strikt zwischen 0 und π.

Notes

Summary

15m 50s

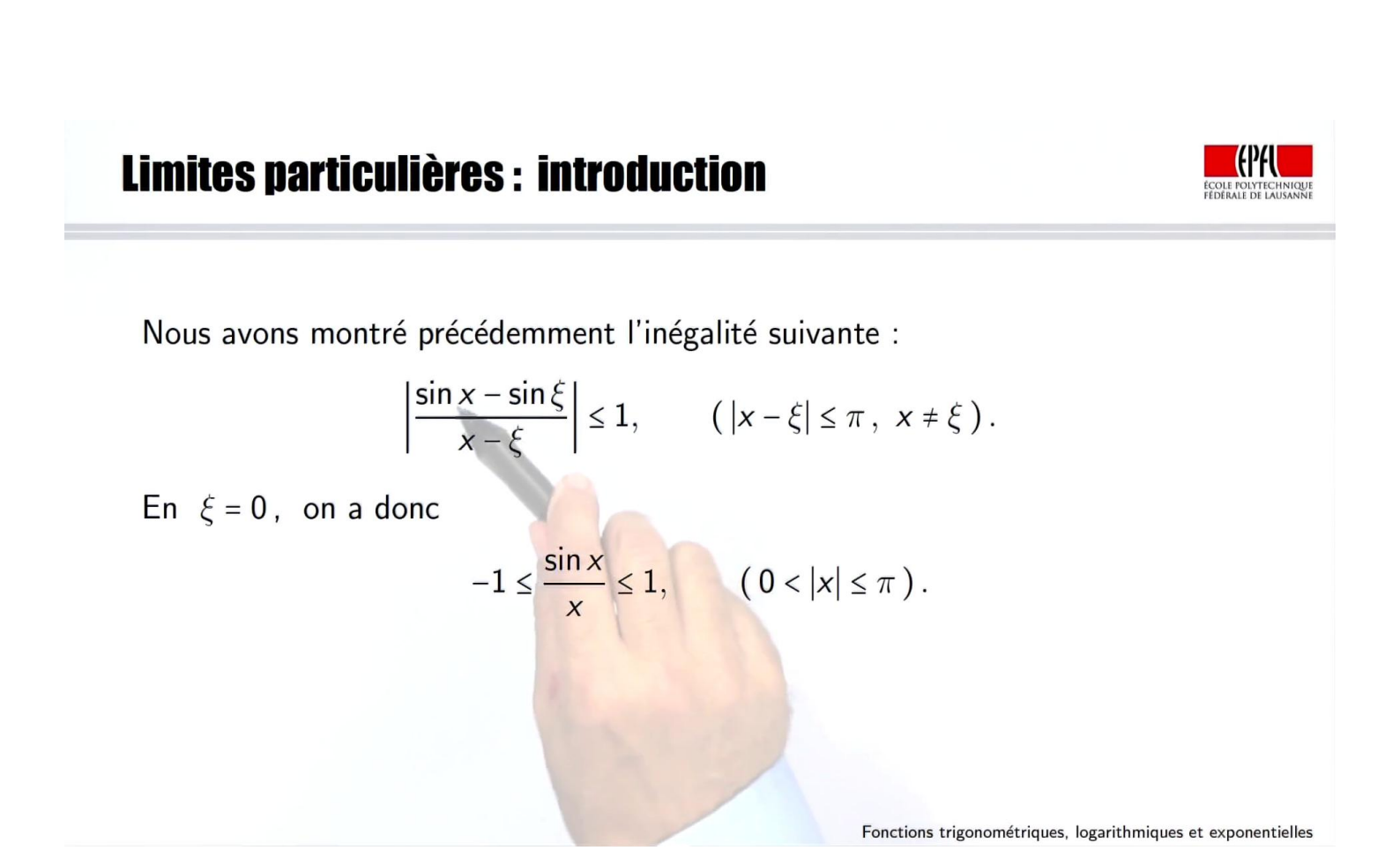
Limites particulières : introduction

Nous avons montré précédemment l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi}\right| \leq 1, \qquad (\,|x - \xi| \leq \pi\,,\ x \neq \xi\,)\,.$$

En $\xi = 0$, on a donc

$$-1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \qquad (\,0 < |x| \leq \pi\,)\,.$$



Nun zurück zur Ungleichheit, die wir früher gezeigt haben und wir werden sie nutzen, um einige besondere Grenzen einzuführen. Man muss nur wenige Grenzen rund um sin und cos kennen, um die Differenzierbarkeit dieser Funktionen zu analysieren. Für heute werde ich diese Grenzen nochmal vorbereiten. Hier wird diese Ungleichung in einer etwas anderen Form geschrieben, wir haben sie unter der Form entwickelt der absolute Wert der Differenz Sinus x minus Sinus ξ ist kleiner bis gleich wie der absolute Wert von x minus ξ. Wir haben sie geteilt durch die positive Zahl x minus ξ und wir bekommen dann den absoluten Wert eines Quotienten kleiner oder gleich 1. Ich erinnere Sie daran, dass x minus ξ kleiner sein musste als π und x ist unterschiedlich zu ξ, sonst kann ich hier nicht dividieren durch x minus ξ. Wir werden einen spezifischen Wert von ξ nehmen, wir werden sie nach der Art wählen, von der ich sage, dass sie intelligent ist: wir nehmen ξ ist gleich 0. Der Vorteil hierbei ist, dass wir im Nenner nur x haben und im Zähler verschwindet auch der Sinus von 0. Es bleibt eine Sinus x auf x und wenn ich die absoluten Werte vergesse, bedeutet es, dass Sinus x auf x immer zwischen -1 und 1 liegen wird.

Notes

Summary

16m 45s

Limites particulières : introduction

Nous avons montré précédemment l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi}\right| \leq 1, \qquad (\,|x - \xi| \leq \pi\,,\ x \neq \xi\,)\,.$$

En $\xi = 0$, on a donc

$$-1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \qquad (\,0 < |x| \leq \pi\,)\,.$$

On va s'intéresser à la limite de ce quotient lorsque x tend vers 0.

Observons qu'il s'agit d'une limite de type $\frac{0}{0}$.

Und ich werde mich dafür interessieren, was passiert, wenn x sich 0 annähert. Man sieht gut, dass x nicht Null sein kann, ohne dass ich durch 0 dividiere, aber wir werden uns dafür interessieren, was passiert, wenn x gegen 0 geht. Beachten Sie hierbei, dass wir eine Unbestimmtheit des Typs 0 auf 0 haben. Der Nenner geht gegen 0 und der Zähler... Der Sinus ist stetig, also, wenn x gegen 0 geht, geht Sinus x gegen Sinus 0, was auch Null ist.

Notes

Summary

18m 01s

Limites particulières

Nous allons montrer que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Remarquons que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est une fonction paire :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x), \qquad (x \neq 0).$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Also haben wir etwas des Typs 0 auf 0 und wir versuchen, diese Unbestimmtheit durch eine Berechnung aufzuheben, die uns zeigen wird, was die Grenze macht, wenn x gegen 0 tendiert von Sinus x auf x ist 1. Um zu zeigen, dass diese Grenze wirklich 1 ist, werden wir zum ersten Mal bemerken, wenn Sie sich die Funktion hier ansehen, von der wir die Grenze nehmen, diese Funktion sin (x/x), dies ist eine Funktion, die für jeden Wert von x, außer für 0, definiert ist. Sie wird jeden Wert umwandeln der nicht Null in einem realen Wert ist, hier fehlt der Pfeil, also f geht gegen die reelle Zahlen, transformiert x in Sinus x auf x und ist eine gerade Funktion. Sie ist gerade, dies bedeutet, dass, wenn ich x durch -x ersetze, bewegt sich nichts. Lassen Sie uns die Rechnung machen, schauen wir, welchen Wert die Funktion f am Ort -x hat, das heißt ich ersetze hier das x durch -x und dort auch. Dann habe ich den Sinus von -x auf -x. Ich erinnere Sie daran, dass der Sinus eine ungerade Funktion ist, das heißt, dass der Sinus von -x minus Sinus x ergibt, was ermöglicht, diese Fraktion unter der Form -Sinus x auf -x zu schreiben. Die beiden Minus vereinfachen, es bleibt Sinus x auf x, was schließlich f von x ist.

Notes

Summary

18m 26s

Limites particulières

Nous allons montrer que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Remarquons que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est une fonction paire :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x), \qquad (x \neq 0).$$

Le graphe de f étant symétrique par rapport à l'axe des y, il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Das gilt für alle Werte von x, mit Ausnahme von x gleich 0 wo nichts definiert ist. Also diese Funktion ist toll und gerade und die Folge davon ist, dass ich in der Tat nur zeigen muss, dass diese Grenze hier eingerahmt ist, ich muss nur zeigen, dass die Grenze von Sinus x auf x, wenn x gegen 0 von rechts geht 1 ergibt, weil die Grenze die gleiche durch die Symmetrie sein wird.

Notes

Summary

19m 35s

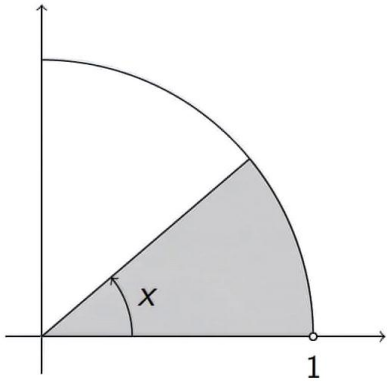
Limites particulières

L'aire du secteur circulaire est égale à

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}.$$

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on majore et on minore l'aire de ce secteur circulaire de la façon suivante :

$$\leq \frac{x}{2} \leq$$



Um jetzt diese Grenze x gegen 0 von der rechten Seite zu bestimmen, werden wir uns in den trigonometrischen Kreis paltzieren, ich habe nur ein Viertel von diesem trigonometrischen Kreis gezeichnet weil x in der Tat x gegen 0 auf der rechten Seite geht, und x dann positiv sein wird, aber gegen 0 geht. Der erste Quadrant reicht mir völlig. Ich interessiere mich nun für den Bereich dieses Sektors, der hier in grau ist. Der Radius ist 1, der Winkel hier ist x, der Bereich des Vollkreises wäre gegeben durch π r Quadrat, also π mal 1 im Quadrat und da ich keinen Winkel von 2π habe, nehme ich nur den Winkel von x, hier habe ich durch den Anteil ein x dividiert durch 2π. Die π vereinfachen es und was bleibt, ist x/2. Der Bereich dieses Sektors wird durch x/2 gegeben. Wir erhöhen und erniedrigen diesen Bereich. Wir werden es unter der Annahme tun, dass x zwischen 0 und π/2 liegt, also auf dem ersten Quadranten. Noch einmal, x geht gegen 0, also die Tatsache, dass wir uns nach oben an π/2 begrenzen, ist durchaus akzeptabel. Wie?

Notes

Summary

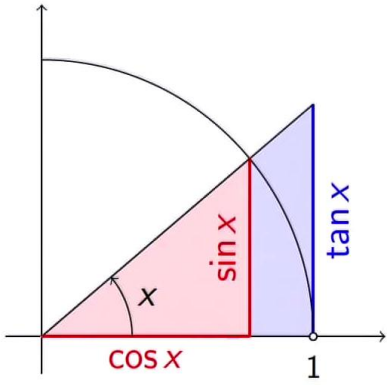
19m 58s

Limites particulières

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \tan x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \cdot \cos x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$



Lassen Sie uns zuerst erhöhen, wir sehen hier gut, dass ich ein Dreieck genommen habe, das einen größeren Bereich besitzt. Wenn ich die Basis mal die Höhe geteilt durch 2 berechne, bleibt 1 mal Tangente x/2, also Tangente x/2. Ich kann auch durch ein rechtwinkliges Dreieck herabsetzen. Dieses Dreieck in rot hat hier eine Seite Kosinus x und Sinus x, beide sind positiv, das x befindet sich im ersten Quadranten. Also werde ich die Hälfte des Produkts 1/2 Sinus mal Kosinus x haben. Das ist eine Beziehung, die ich einfach erhalte, indem ich 3 Bereiche beobachte. Von dieser Beziehung habe ich sie hier wieder geschrieben, von dieser Beziehung erhalten wir den Quotienten, der uns interessiert, das heißt 1 Sinus x auf x. Wir werden wie folgt vorgehen: ich sehe hier 1/2, 1/2, 1/2. Wir können eine Ungleichheit durch einen positiven Term, hier die 2 multiplizieren, also auf äquivalente Weise kann ich sagen, dass der Sinus x mal den Kosinus x kleiner oder gleich x, kleiner oder gleich... ist und Tangente x, ich schreibe es Sinus auf Kosinus. Ich sehe jetzt auf der linken Seite ein Sinus erscheinen und auf der rechten Seite auch ein Sinus. Ein Sinus x, das positiv ist, ich erinnere Sie daran, dass x zwischen 0 und π/2 liegt.

Notes

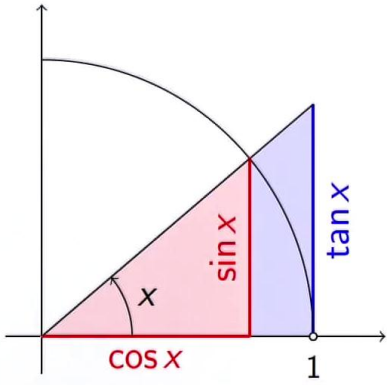
Summary

21m 15s

Limites particulières

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \tan x \\
\Leftrightarrow \quad & \sin x \cdot \cos x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\
\Leftrightarrow \quad & \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \\
\Leftrightarrow \quad & \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.
\end{aligned}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich kann durch den Term Sinus x dividieren. Was bleibt, ist auf der linken Seite 1 Kosinus x, das Sinus...ich habe durch Sinus x hier den Quotienten x auf Sinus x dividiert und schließlich den Quotienten 1 auf Kosinus x. Wir sind relativ nahe am Ziel, in der Tat wollen wir die Grenze berechnen nicht von x auf Sinus x, sondern von Sinus x auf x. Das, was wir tun werden, wir werden einfach den Kehrwert von jedem dieser Terme nehmen. Ich erinnere Sie daran, dass diese 3 Terme positiv sind, der Kosinus x ist positiv, das x auf Sinus x ist positiv und die 1 auf Kosinus x ist positiv. Ich erinnere Sie daran, dass das x zwischen 0 und π/2 liegt. Wenn ich drei klassifizierte Zahlen so aufgeführt habe, wenn ich den Umkehrwert nehme, also die Funktion 1 auf x, bedeutet es, dass sich die Ordnung der 3 Terme ändert. Das heißt, dass die 1 auf Kosinus x die ich links erhalte der größere Term sein wird. Hier nehme ich Sinus x auf x und die 1 auf 1 auf Kosinus x, wird Kosinus x in der Tat der kleinere Term, also kann man auch diese Ungleichheiten dort schreiben.

Notes

Summary

22m 32s

Limites particulières

A partir de

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad \left(0 < x < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

et sachant que

$$\lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1,$$

le théorème du gendarme nous permet de conclure que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Wenn wir diese Ungleichheiten haben, gültig für x zwischen 0 und π/2, dann kann leicht geschlossen werden. Warum? Der Term links, Kosinus x ist stetig, also wenn x gegen 0 geht von der rechten Seite, für Kosinus x erhalte ich Kosinus 0. Ich erhalten den gleichen Wert, als wenn x gegen 0 kurz gesagt gehen würde, und der Kosinus von 0 den Wert 1 hätte, also links, die Grenze 1 ist. Auf der rechten Seite habe ich 1 auf Kosinus x also seine Grenze, wenn x gegen 0 geht, ist... dann nehme ich die Grenzen getrennt im Zähler und im Nenner. Im Zähler wird mir dies 1 ergeben Im Nenner erhalte ich Kosinus 0 das auch 1 ergibt und der Quotient 1 auf 1 ergibt 1, das heißt, das der rechte Term gegen 1 geht, der linke Term gegen 1 geht so dass der Sinus x auf x sich zwischen 2 Größen befindet, die den gleichen Wert einnehmen, wenn x gegen 0 geht und der Sinus x auf x dann diesen gemeinsamen Wert einnimmt, der 1 ist.

Notes

Summary

23m 43s

Limites particulières

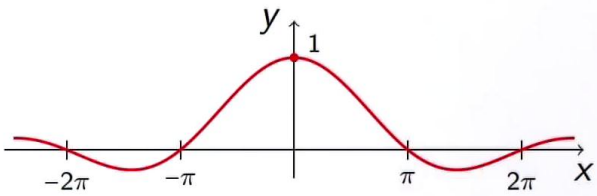
Proposition

On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *peut donc être prolongée par continuité :*

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$



So können wir einen Vorschlag machen wie folgt: die Grenze, wenn x gegen 0 geht, von Sinus x auf x ist gleich 1. Das heißt, wenn ich die Funktion nehme, die x in Sinus x auf x transformiert, eine Funktion, die für alle x außer für 0 definiert ist, dann ist es eine Funktion die von R ohne 0... leider fehlt hier wieder einmal der Pfeil nach R, also, wenn ich die Funktion f nehme, kann sie durch die Stetigkeit verlängert werden. Das bedeutet, dass die Verlängerung dadurch gegeben ist solange x nicht Null ist, ich nehme den alten Wert, Sinus x auf x, und wenn x den Wert 0 annimmt, habe ich 1 Hier finden Sie in rot die Kurve der Startfunktion f, also Sinus x auf x, und wir sehen sehr gut, für x gleich 0, ist diese Funktion nicht definiert. Dagegen wenn ich mich der 0 annähere, stabilisiert sich dieses Sinus x auf x an der Höhe 1 und wenn ich die Verlängerung durch 1 nehme, dann erhalte ich eine verlängerte Funktion. Schauen Sie, wir werden in der Lage sein, dieses Loch durch den Wert 1 zu füllen wenn x 0wert ist und man erhält dann eine Funktion, die überall stetig ist auf der reellen Achse.

Notes

Summary

24m 41s

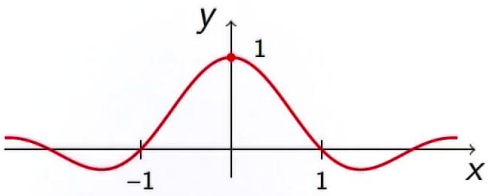
La fonction sinc normalisée

Proposition

Pour tout $\omega \neq 0$, *on a* $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} = 1.}$

Pour $\omega = \pi$, *on note sinc normalisée la fonction*

$$\text{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$



Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Wir können das Ganze auch ein wenig allgemeiner formulieren: wenn Sie den Quotienten von Sinus ω t auf ω t mit ω als Konstante nicht Null nehmen, und Sie sagen, dass t gegen 0 geht, werden Sie diese Grenze von 1 erhalten. Warum? Einfach... ω t ist das x, also haben Sie Sinus x auf x und wenn t gegen 0 geht, das ω t, das das x ist und auch gegen 0 geht. Wir erhalten diese gleiche Grenze. In den Anwendungen finden wir sehr oft diese Funktion Sinus ω t auf ω t, wir finden sie besonders häufig mit ω gleich π und dann sprechen wir von der normalisierten sinc-Funktion. Diese normalisierte sinc-Funktion nimmt, wenn t nicht Null ist, den Wert Sinus π t auf π t und sie nimmt den Wert von 1 ein, wenn t Null ist. Hier haben Sie die Kurve. Es ist eine stetige Funktion auf der ganzen reellen Achse. Beachten Sie, dass die Wahl von ω gleich π interessant ist, weil wenn Sie schauen, wo die sinc-Funktion verschwindet, dann sieht man sehr gut, dass beispielsweise t den Wert 1 hier einnehmen muss. Sie haben Sinus π auf π, Sinus π verschwindet oder am Punkt -1, Sinus von -π, das auf -π verschwindet. Also findet man hier die 0 am Punkt +oder -1 und den Wert von 1 bis 0.

Notes

Summary

25m 52s

Limites particulières

Proposition

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1\,.$$

Wir können jetzt noch das Feld der besonderen Grenzen ausweiten. Grundsätzlich ist dies die Grenze Sinus x auf x für x gegen 0, aber sie hat auch Konsequenzen. Zum Beispiel kann ich, wenn Sie wollen, in dieser Grenze Sinus x auf x, den Sinus durch Tangente ersetzen und die Grenze ändert sich nicht. Es bleibt also für x gegen 0: Tangente x auf x ist 1. Warum? Es ist leicht zu sehen. Es reicht, die Tangente x auf x zu nehmen, diese Tangente durch den Quotienten Sinus auf Kosinus zu ersetzen. Ich habe es hier ein wenig gekonnt gemacht, so haben Sie hier den Sinus auf Kosinus der der Tangente korrespondiert, Sie haben hier die Teilung durch x. Ich habe den Term Sinus x auf x regruppiert und es bleibt nun davor ein Term 1 auf Kosinus x. Die Grenze der Produkte, das ist das Produkt der Grenzen, also werde ich die Grenze von 1 auf Kosinus x mal die Grenze von Sinus x auf x nehmen. Die zweite Grenze haben wir analysiert, sie ist 1, sie ist das Vielfache von 0 auf 0, aber sie ist 1. Die erste, durch die Stetigkeit, diese ergibt 1 auf der Grenze von Kosinus x, die Kosinus 0 ist, also die 1 ist, 1 auf 1. Also bleibt 1 auf 1 mal 1 und das ergibt gut und gern 1. Zweite bekannte Grenze, ähnlich.

Notes

Summary

27m 18s

Limites particulières

Proposition

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1\,.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1-\cos^2 x\right)}{x^2\left(1+\cos x\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Wenn Sie die Grenze von 1 minus Kosinus x auf x Quadrat/2 nehmen, dann finden Sie auch die 1. Beachten Sie, dass die beiden Grenzen hier die Grenzen sind, die qualifiziert werden müssen als Typ 0 auf 0. Hier haben Sie Tangente 0 auf 0, also 0 auf 0, hier werden Sie 1 minus cos 0 also 0 auf 0 erneut haben. Erneut kann man diese Unbestimmtheit erkennen und man kann ein Ergebnis erhalten. Der benutzte Trick hier sollte Sie nicht einem Term 1 minus Kosinus x begegnet, der uns störte, weil er verschwindet und wir haben die Fraktion erweitert durch 1 plus cos x. Wir machen das Gleiche ein zweites Mal: wir werden diese 2 im Zähler platzieren, das x Quadrat ist da, der Verstärker 1 plus cos x ist da und im Zähler, gibt es mir ein 1 minus cos Quadrat, eine 1 minus cos Quadrat, das ich sofort wiedererkenne als ein Sinus Quadrat. Es bleibt mir also auf der einen Seite die 2 auf 1 plus cos x, auf der anderen Seite das Sinus Quadrat von x auf x Quadrat, das da ist. Schauen wir, was passiert, Ich nehme die Grenzen getrennt. Hier habe ich 2/(1+cos0), das auch 1 ergibt, also diese Grenze ergibt 1. Hier beachten Sie, dass ich einfach Sinus x auf x habe mal Sinus x auf x und jede dieser zwei Fraktionen geht gegen 1, also da tendiere ich gegen 1 im Quadrat, also geht das Ganze gegen 1.

Notes

Summary

28m 35s

Continuité des fonctions trigonométriques

Ce que nous avons appris :

- la continuité des fonctions trigonométriques ;
- quelques limites remarquables.

Prochaine étape :

- la dérivée des fonctions trigonométriques.

Das ist das, was ich Ihnen heute präsentiert habe: Wir sprachen über die Stetigkeit von trigonometrischen Funktionen. Das Ergebnis ist einfach: sie sind alle überall stetig in ihrem Definitionsbereich. Wir haben dagegen einige bemerkenswerte Einschränkungen festgestellt, Grenzen, die vom Typ 0 auf 0 waren. Die wichtigste war die Grenze von Sinus x auf x, wenn x gegen 0 tendiert. Das nächste Mal werden wir uns für eine Eigenschaft interessieren, die stärker ist als die, stetig zu sein, wir werden uns genau mit der Differenzierbarkeit von Funktionen beschäftigen. Wir werden uns die Frage stellen zur Tatsache: hat der Sinus a ein Derivat? Und wenn ja, wie kann man das Derivat dieses Sinus, berechnen. Wir werden diese Fragen zu allen trigonometrischen Funktionen beantworten. Vielen Dank, dass Sie mich verfolgt haben und bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

30m 10s