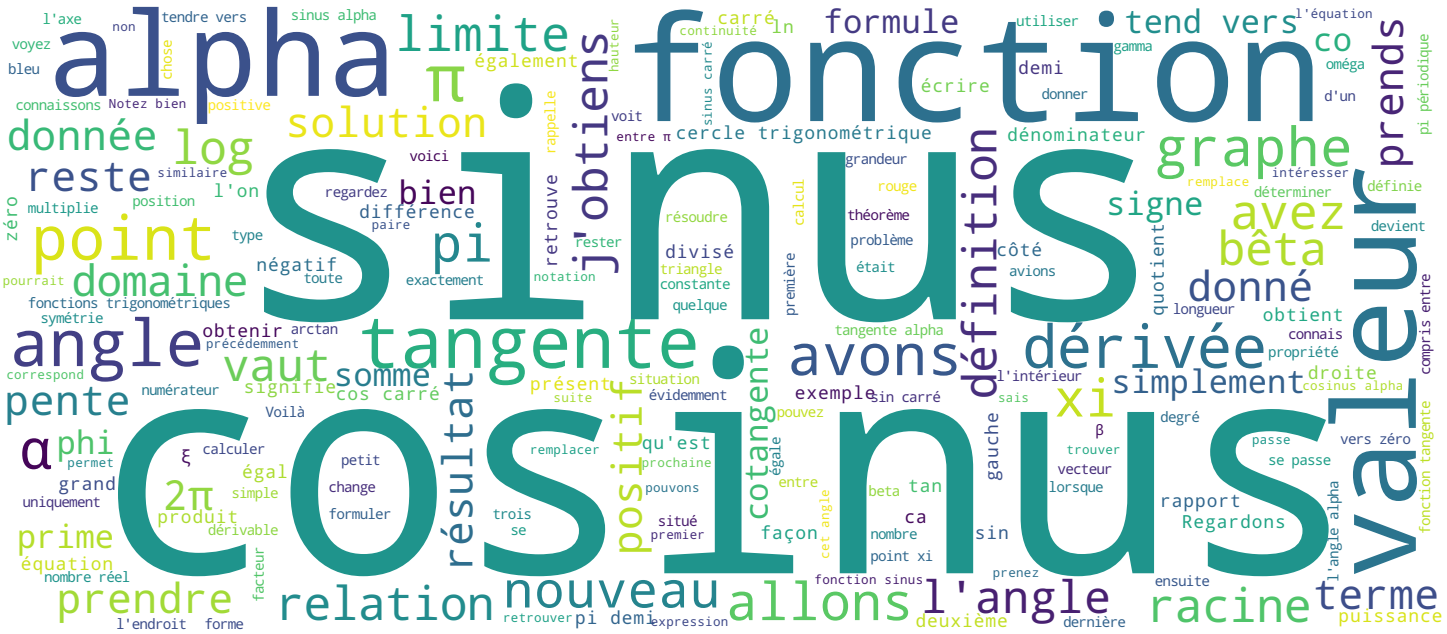
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Continuité et dérivabilité des fonctions trigonométriques

8.2 Dérivées des fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

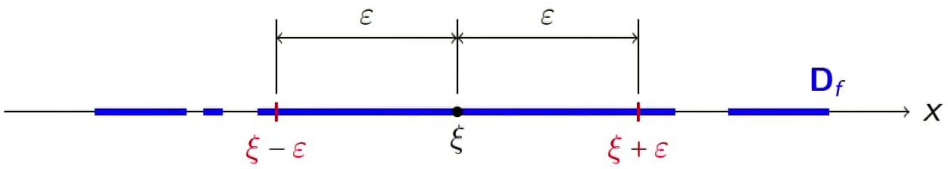


Rappel sur la dérivée d'une fonction

Considérons une fonction f en un point ξ situé à l'intérieur du domaine de définition $\mathbf{D}_f$.

Par cela nous voulons dire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset \mathbf{D}_f.$$



Bonjour! La dernière fois, nous avions étudié la continuité des fonctions trigonométriques. Aujourd'hui, nous allons nous intéresser à une propriété qui est plus forte que celle d'être continue. Nous allons nous intéresser aux dérivées des fonctions trigonométriques. Mais rappelons d'abord ce que l'on entend par une dérivée. Pour le faire, je vais considérer une fonction que j'appelle f et je vais considérer cette fonction f en un point xi (ξ) qui est situé à l'intérieur du domaine de définition de cette fonction f. Alors, qu'est-ce que cela veut dire "être à l'intérieur du domaine de définition"? Nous avons ici l'axe réel et, en bleu, nous avons le domaine de définition d'une fonction f. Le point xi (ξ) ici est situé à l'intérieur de ce domaine de définition parce que je peux trouver un nombre epsilon (ε) positif - d'ordinaire, c'est un petit nombre - tel que l'intervalle qui va depuis xi moins epsilon jusqu'à xi plus epsilon l'intervalle entier, ouvert reste dans le domaine de définition. Nous allons nous placer en un point xi de ce type là et nous allons choisir, outre xi, un deuxième point x quelque part sur cet intervalle xi moins epsilon xi plus epsilon.

Notes

Summary

0m 04s

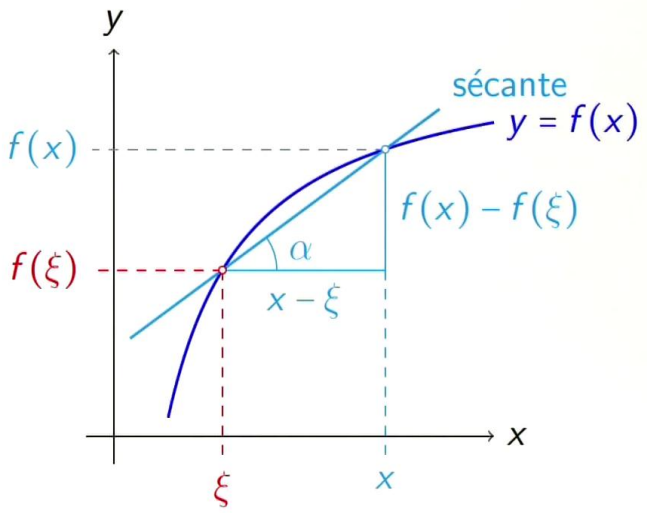
Pente de la sécante

Pour tout $x \in]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[$, on note $m_\xi(x)$ la pente de la sécante qui passe par les deux points

$$(\xi, f(\xi)) \quad \text{et} \quad (x, f(x))$$

du graphe de f :

$$m_\xi(x) = \tan\alpha = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$



Alors, nous avons ici la situation donc xi, le x qui est justement dans cet intervalle entre xi moins epsilon et xi plus epsilon. Vous avez ici le graphe de la fonction f, y égale f de x, et nous allons considérer donc 2 points : le premier point ici xi, f de xi; il est situé sur le graphe de la fonction et un deuxième point x, f de x qui est situé ici en ce point. Et nous allons considérer une droite qui passe par ces 2 points. C'est une sécante qui coupe usuellement le graphe de la fonction f. Alors, nous allons nous intéresser à la pente de cette sécante, une pente que nous dénommons m xi de x. Evidemment, cette pente dépend du choix de xi et de x. Mais nous allons à présent fixer xi et c'est x qui va être variable. C'est pour ça que nous avons ici une asymétrie dans la notation. Alors, cette pente, par définition, cette tangente alpha (α) - l'angle alpha étant ici - c'est la différence f de x moins f de xi, elle est positive ici, elle pourrait être négative, divisée par la différence entre x et xi - de nouveau, cette différence est ici positive, elle pourrait être tout à fait négative - et ce quotient nous donne un nombre réel et ce nombre réel, c'est exactement tangente de alpha.

Notes

Summary

1m 34s

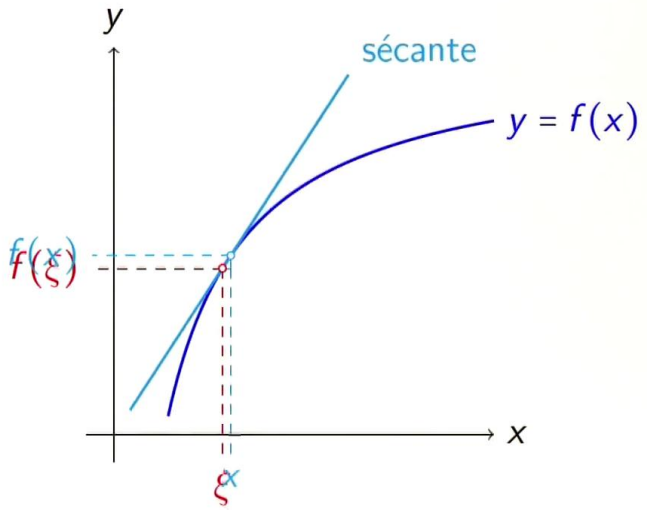
Définition

On dit que la fonction f est *dérivable au point* ξ, si la limite

$$\lim_{x\to\xi} m_\xi(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

existe.

Cette limite, notée $f'(\xi)$, s'appelle le *nombre dérivé de la fonction* f *au point* ξ.



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous allons dire - et c'est une définition - que la fonction f est dérivable au point xi donc ce point fixé à l'intérieur du domaine si la limite, alors nous prenons maintenant cette pente avec xi fixe et x est variable mais va tendre vers xi donc c'est la limite de la différence des valeurs de la fonction divisée par la différence entre l'entrée, x et xi et nous faisons tendre x vers xi. Et si cette limite existe, nous allons dire que la fonction est dérivable. Et nous allons noter cette limite f prime de xi cette limite s'appelle le nombre dérivé de la fonction f au point xi ou la dérivée de la fonction f au point xi. Alors, regardons ce qui se passe, donc ici je vais à présent rapprocher ce x de xi.

Notes

Summary

3m 05s

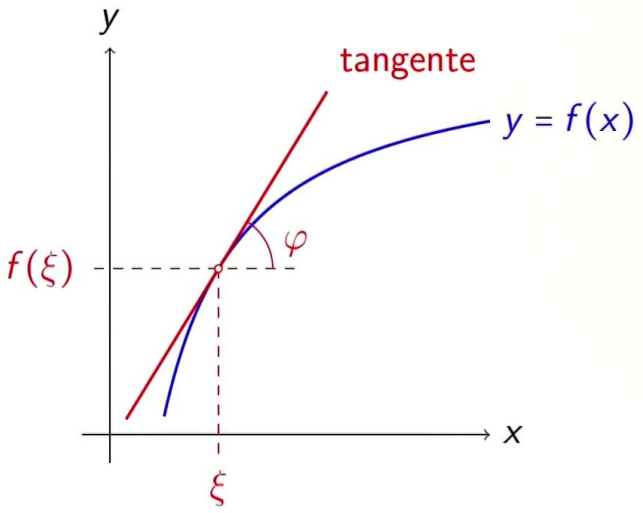
Interprétation géométrique

Le nombre dérivé $f'(\xi)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(\xi, f(\xi))$:

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \tan \varphi \,.$$

L'équation de cette tangente est donnée par

$$y = f'(\xi)\,(x - \xi) + f(\xi)\,.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors, la sécante se met dans une position stabilisée et nous obtenons comme position limite une tangente à la courbe et nous pouvons donc dire que f prime de xi est en fait la pente de la tangente au graphe de la fonction. Et c'est ce qui est écrit ici, ce rapport, cette limite de ce rapport, cette tangente phi, avec phi l'angle qui détermine la tangente à la courbe. Alors on peut rechercher l'équation de cette tangente. Qu'est-ce que nous connaissons ? Nous connaissons donc un point xi f de xi, ça, c'est un point sur la tangente, nous connaissons sa pente qui est donné par f prime de xi, donc on peut en déduire que y moins f de xi est donné par la pente f prime que multiplie x fois x moins xi ou, si vous prenez le f de xi de l'autre côté, c'est peut-être la façon standard de noter l'équation de cette tangente, c'est que y est donné par une pente, f prime de xi qui multiplie x moins xi et on a à rajouter cette constante plus f à l'endroit xi.

Notes

Summary

3m 59s

Fonction dérivée

Définition

En regroupant dans l'ensemble $\mathbf{D}_{f'}$ tous les points ξ pour lesquels la dérivée de f existe, on obtient la *fonction dérivée* de f :

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

En changeant de notations :

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

Nous avons à présent une dérivée en un point donné xi qui est à l'intérieur du domaine de définition. Alors, pour chaque xi de ce type, on peut calculer cette limite et obtenir le cas échéant cette limite f prime de xi. Alors, on va regrouper dans l'ensemble D f prime donc ça va être le domaine d'une fonction f prime tous les points xi pour lesquels on peut calculer une dérivée. Donc f prime va transformer cet ensemble D f prime en des nombres réels, toujours le xi, alors il sera transformé en f prime de xi qui est justement cette limite que nous avons précédemment retrouvée sur le graphe de la fonction comme sécante, la limite étant donc la tangente, la pente de la tangente. Alors, cette façon de noter est peu commode, Parce que ce qui dérange, usuellement, c'est que le nom de la variable a changé. Avant, nous avions une fonction qui transforme x en f de x. A présent, nous avons une fonction qui transforme xi en f prime de xi. Alors, évidemment, on peut remplacer formellement ce xi par x, cela ne change pas le comportement de la fonction. Le problème, c'est que ici alors dans la limite, il faut choisir une autre lettre pour x. On peut choisir par exemple t et donc formuler cette limite comme nous l'avons ici.

Notes

Summary

5m 11s

Fonction dérivée

Définition

En regroupant dans l'ensemble $\mathbf{D}_{f'}$ tous les points ξ pour lesquels la dérivée de f existe, on obtient la *fonction dérivée* de f :

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

En changeant de notations :

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

ou en posant $t = x + h$:

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Fréquemment, on préfère poser t égale x plus h, donc h mesure de combien on s'écarte depuis cette valeur de x, et alors vous trouvez cette dernière formule donc vous avez f à l'endroit x plus h moins f de x et on divise par cette différence qui est à présent uniquement h.

Notes

Summary

6m 34s

Notation de Leibniz

Soit $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, une fonction dérivable.

On note souvent la fonction dérivée de f sous la forme $\frac{d}{dx} f$ au lieu de f'

$$\frac{d}{dx} f : \quad \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{d}{dx} f(x).$$

Le nombre dérivé $f'(\xi)$ se note alors

$$\left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=\xi}.$$

Si on a une fonction qui est dérivable, c'est-à-dire que si je l'écris comme ça, ça signifie qu'elle a des dérivées en certains points au moins. Alors on obtient une fonction qu'on appelle f prime, mais souvent on note cette fonction aussi avec le symbole que voici, d sur dx de f. Et vous retrouvez donc ici l'écriture correspondante, le x est transformé en d sur dx de f de x. Si, danc cette notation, vous voulez calculer la valeur en un point donné, xi, je vous propose la notation que voici : vous voyez ici le x est le même, c'est-à-dire qu'on dit, on incite ici à dire qu'on dérive par rapport à une variable x et ensuite, on choisit un x fixé xi si l'on veut avoir la pente de la tangente en un point donné.

Notes

Summary

6m 52s

Dérivée de la fonction sinus

La fonction dérivée de la fonction sinus est définie par

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)\cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\end{aligned}$$

Venons-en à étudier la dérivée de la fonction sinus. Donc j'aimerais calculer la dérivée du sinus, c'est-à-dire que je vais prendre le sinus à l'endroit x plus un h qui peut être du reste positif ou négatif moins le sinus de x et je divise par h qui est la différence entre ce x plus h et le x et je fais tendre h vers zéro. On va utiliser à présent des relations, des relations autour des fonctions trigonométriques, nous avions une des relations qui permet de transformer une différence en un produit. Alors, faisons-le. Donc une différence de sinus peut s'écrire comme 2 fois le sinus de la demi-différence des angles et le cosinus de la demi-somme des angles. Donc ici, vous additionnez les 2 angles, x plus h plus x, pardon, vous soustrayez d'abord les angles, x plus h moins x, c'est la demi-différence ici divisé par 2, ensuite vous les additionnez, x plus h plus x, et vous prenez la moitié et vous avez la demi-somme. Ici, évidemment, x plus h moins x, cela va se simplifier quelque peu. Vous avez ici un h demi qui apparaît. Si vous regardez d'un peu près ce qu'il se passe, si h est très très proche de zéro, par continuité, si h tend vers zéro, ici ce terme va tendre vers cosinus de x.

Notes

Summary

7m 38s

Dérivée de la fonction sinus

La fonction dérivée de la fonction sinus est définie par

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)\cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x\,.
\end{aligned}$$

En revanche ici, c'est un peu plus problématique, vous allez avoir un sinus qui tend vers zéro, qui est divisé par un zéro. Mais on retrouve ici une limite connue, vous la voyez encore mieux si vous passez le 2 au dénominateur et si vous prenez la limite facteur par facteur. Alors vous obtenez ici comme premier facteur une limite de sinus h demi sur h demi, lorsque h tend vers zéro et une deuxième limite, qui est la limite du cosinus x plus h demi si h tend vers zéro. Alors, la première limite tend vers 1 et la deuxième va tendre vers cosinus x et il reste cosinus x.

Notes

Summary

9m 03s

Dérivée de la fonction sinus

Proposition

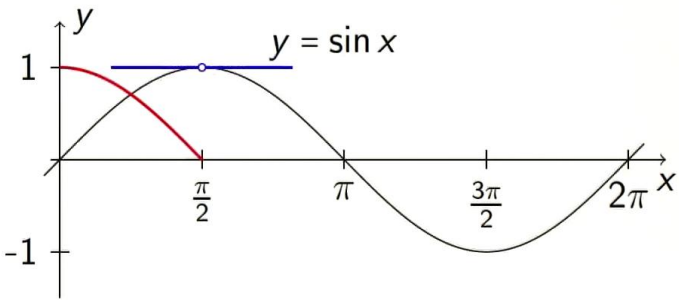
La fonction

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

est dérivable en tout point

et

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad (x \in \mathbb{R}).}$$



REPLAY

Nous obtenons donc un résultat très simple pour finir, la fonction sinus est partout dérivable. Et sa dérivée est donnée par le cosinus. Alors vous pouvez observer ce résultat sur le graphe du sinus. Ici, vous avez donc le système x y, vous avez le graphe du sinus avec les zéros en pi, 2 pi, avec les valeurs maximales 1, moins 1 pris à l'endroit pi demi, 3 pi demi. Alors si vous regardez ici une tangente... nous allons toujours mettre ici en pointillé ici une largeur de 1, si bien que, à la verticale, la grandeur lue va être exactement la dérivée et nous reportons cette grandeur comme valeur de la dérivée à l'endroit zéro. Alors si j'augmente ici un peu le x, vous avez toujours le même jeu : en cet endroit, la tangente est ici 1, ici, donc la pente de cette tangente, et cette valeur, je la reprends à l'endroit x considéré où je calcule la dérivée. Alors si j'augmente le x au fur et à mesure, on s'aperçoit que la tangente s'aplatit. On voit aussi que sa dérivée maintenant devient de plus en plus petite. J'atteins le maximum là en pi demi et là la tangente est à plat et alors effectivement, la dérivée du sinus qui est le cosinus, on le voit apparaitre ici le cosinus, s'annule.

Notes

Summary

9m 44s

Dérivée de la fonction sinus

Proposition

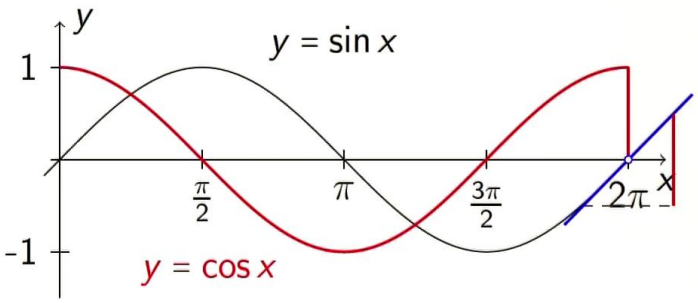
La fonction

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

est dérivable en tout point

et

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad (x \in \mathbb{R}).}$$



REPLAY

En augmentant x, j'obtiens maintenant des tangentes qui sont décroissantes, toujours plus décroissantes. Pour x égale à pi, je suis en pente maximale vers le bas. Cette pente vaut moins 1 qui est la valeur du cosinus à l'endroit pi. Par la suite, en augmentant toujours x, le sinus est toujours décroissant, mais la tangente a tendance à devenir de nouveau plus plate. Donc sa pente augmente, et au minimum, qui est pris pour x égale 3 pi demi, la tangente est à plat, la pente de cette tangente vaut zéro et le cosinus s'annule et vous pouvez terminer ici jusqu'à 2 pi. Il est clair qu'après, par périodicité, cela se renouvelle. Et là on observe donc très finement aussi aux points du graphique que la dérivée du sinus est donnée par le cosinus.

Notes

Summary

11m 19s

Dérivée de la fonction cosinus

La fonction dérivée de la fonction cosinus est définie par

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)}{h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = -\sin x\,.
\end{aligned}$$

Alors on peut refaire le même jeu avec le cosinus, cela ne change pas fondamentalement. On a les mêmes pas, donc pour dériver le cosinus, je prends ce quotient, cosinus x + h moins cosinus x divisé par h, et je vais tendre h vers zéro. De nouveau, une différence de cosinus, je peux l'écrire comme un produit. Cette fois-ci, c'est moins 2 fois sin sin, demi différence et demi somme des angles. On retrouve pour les angles ces mêmes expressions h demi et x plus h demi, mais cette fois-ci on a les 2 fois un sinus. On regroupe de nouveau ce sinus h demi avec le h, comme nous l'avons fait précédemment. Et cette fois-ci, la première limite tend vers 1, il reste un signe moins, donc j'ai moins 1 ici. Pour la deuxième limite, la continuité de la fonction sinus va me dire que cela va tendre vers sinus x, donc il me restera uniquement en tout moins sinus x.

Notes

Summary

12m 20s

Dérivée de la fonction cosinus

Proposition

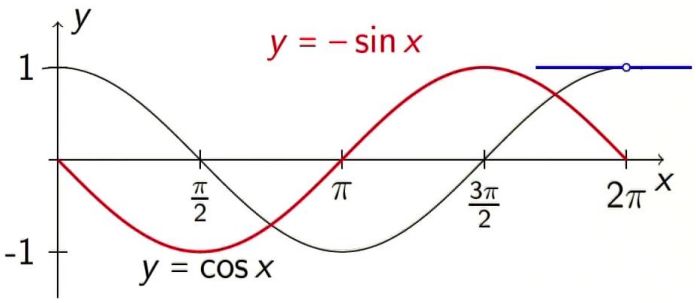
La fonction

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos x$$

est dérivable en tout point

et

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

À nouveau, je peux formuler une deuxième proposition, c'est que la fonction cosinus, tout comme la fonction sinus, est toujours dérivable, en tout point elle est dérivable, et sa dérivée est donnée cette fois-ci non pas par sinus, il y a une certaine symétrie qui se perd, mais la dérivée du cosinus est donnée par moins le sinus. De nouveau, vous pouvez observer le tout sur le graphe. Donc vous avez ici le graphe du cosinus. Au départ, la tangente est horizontale et le sinus vaut zéro. Vous pouvez ensuite augmenter le x. Là, vous avez une pente vers le bas maximale de moins 1. Là, au minimum, la pente s'annule à nouveau. Là, la pente maximale vers le haut de 1 qui correspond à la valeur de moins sinus à l'endroit 3 pi demi et pour finir vous aboutissez avec votre cosinus 1 maximum, de valeur maximale de nouveau avec une tangente horizontale et moins sinus va s'annuler en ce point.

Notes

Summary

13m 17s

Dérivée de la fonction tangente

On peut obtenir la fonction dérivée de la fonction tangente

$$\tan : \mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$$

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous avons trouvé les dérivées de sinus et de cosinus, qu'en est-il de la fonction tangente ? Alors, je vous rappelle que la fonction tangente est définie sur un ensemble qu'on a dénommé D tangente, donc il faut admettre uniquement des valeurs où le cosinus ne s'annule pas et tangente est simplement le quotient entre sinus et cosinus. Pour dériver un quotient, on connait des règles, on sait dériver des quotients de fonction. Nous allons utiliser cette règle de dérivation du quotient pour dériver ce quotient sinus sur cosinus. Pour le faire, nous allons simplement dériver le numérateur donc sinus dérivé de cosinus fois le dénominateur cosinus moins le numérateur sinus qui multiplie la dérivée du cosinus qui est moins sinus. Le tout divisé par le carré du dénominateur, donc cos carré. Les 2 signes moins se neutralisent, il me reste donc un cosinus carré plus sinus carré au numérateur.

Notes

Summary

14m 18s

Dérivée de la fonction tangente

On peut obtenir la fonction dérivée de la fonction tangente

$$\tan : \mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (x \in \mathbf{D}_{\tan}).}$$

On voit immédiatement que l'on peut à présent donner un résultat pour la dérivée. Je vais peut-être commencer par cette deuxième variante, c'est que cosinus carré plus sinus carré donne 1 donc il reste un 1 sur cos carré et on s'aperçoit qu'en fait tous nos calculs sont valables partout sauf où le cosinus s'annule, donc le domaine de définition de la dérivée de tangente est le domaine de définition de la fonction tangente. Cette fonction tangente est donc dérivable elle aussi partout où elle est définie. On peut formuler aussi le résultat d'une autre façon. Et là, je serai catégorique, la question n'est pas de choisir une des 2 variantes qui vous semblent plus sympathiques, il est important de mémoriser les 2 résultats parce que du point de vue technique de calcul, tantôt c'est un résultat qui va mieux, tantôt l'autre. Mais nous savons déjà, et c'était une des relations que j'avais qualifié de Pythagore, c'est que un 1 sur cos carré, je peux aussi l'écrire comme un 1 plus tangente carré. Vous le retrouvez du reste à partir d'ici : c'est que simplement cette somme, vous la divisez par cos carré, terme par terme. Donc vous avez cos carré par cos carré qui donne 1 et sin carré sur cos carré qui donne tangente carré. Donc on peut aussi dire que la dérivée de tangente est 1 plus tangente carré.

Notes

Summary

15m 14s

Dérivée de la fonction tangente

Proposition

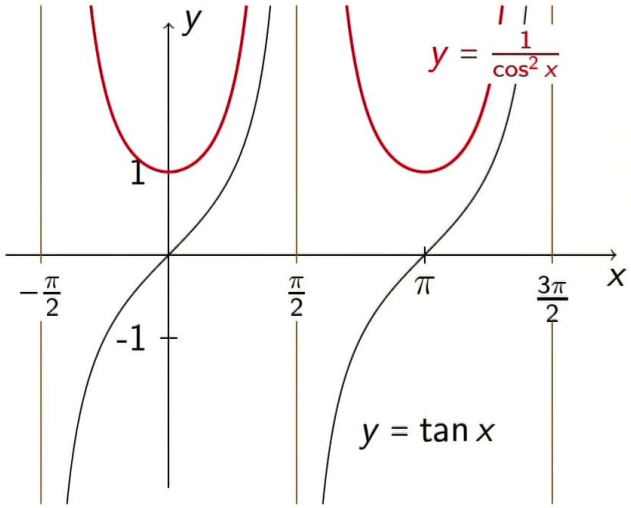
La fonction

$\tan : \mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x$

est dérivable en tout point de

$\mathbf{D}_{\tan}$ *et*

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Formulons le tout, donc la fonction tangente qui est ici, elle est dérivable partout où elle est définie, et sa dérivée est donnée par 1 plus tangente carré ou 1 sur cos carré. On peut évidemment essayer de retrouver cela sur le graphe, donc ici vous avez le graphe tangente qui est pi périodique, pas 2 pi périodique, enfin... aussi 2 pi périodique. Mais ce qui est important, c'est pi périodique. Notez bien que le cosinus lui est 2 pi périodique, mais grâce au carré, le 1 sur cos carré va être aussi pi périodique. Alors si vous regardez, donc commençant avec des valeurs de x très proches de moins pi demi, juste un peu au-dessus Là, nous avons une tangente qui va être fortement positive montante, donc là, vous voyez, elle était très positive. La pente s'aplatit. Ici, la pente est maximale, sa valeur maximale est donnée par 1 sur cos carré de zéro donc par 1. J'ai une pente maximale de 1 et ensuite, la pente augmente à nouveau et vous avez le jeu similaire qui se répète, période par période.

Notes

Summary

16m 26s

Dérivée de la fonction cotangente

De même, on obtient la fonction dérivée de la fonction cotangente

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot x := \frac{\cos x}{\sin x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(-\sin x)\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x$$

Pour co-tangente, la démarche est tout à fait similaire. Simplement, ce qui change cette fois-ci, c'est évidemment le domaine admissible, il a changé et nous avons le quotient cosinus sur sinus, donc cette fois-ci il faut admettre uniquement des x où le sinus ne s'annule pas. Mais à nouveau, on dérive un quotient, ça fait la dérivée de cosinus fois le sinus moins cosinus fois la dérivée du sinus divisé par le sinus au carré. De nouveau, si vous regardez un peu ici, là vous avez cette fois-ci toujours un signe moins, je le mets en évidence, il reste un sin carré plus cos carré qui vaut en fait 1 et on voit immédiatement que, au fond, je peux écrire un résultat.

Notes

Summary

17m 33s

Dérivée de la fonction cotangente

De même, on obtient la fonction dérivée de la fonction cotangente

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot x := \frac{\cos x}{\sin x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(-\sin x)\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (x \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

C'est que la dérivée de cotangente, c'est moins 1 sur sin carré, partout. Donc, partout où cotangente existe, la dérivée existe aussi. Ou bien, et c'est de nouveau une des relations que j'avais appelé Pythagore, ce moins 1 sur sin carré, vous pouvez l'écrire comme un moins 1 moins cotangente carré. A nouveau, vous pouvez simplement diviser le numérateur ici qui est une somme terme par terme et vous obtenez donc le un et le un sur sin carré ici, pardon, le un et le cotangente ici.

Notes

Summary

18m 12s

Dérivée de la fonction cotangente

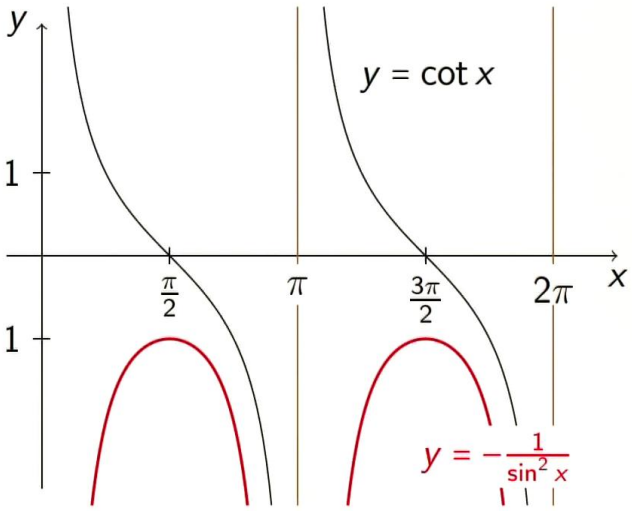
Proposition

La fonction

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot x$$

est dérivable en tout point de $\mathbf{D}_{\cot}$ *et*

$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Donc la proposition est la suivante : la fonction cotangente, elle aussi est toujours dérivable partout, sa dérivée vaut moins un sur sin carré ou moins un moins cotangente carré et vous pouvez également observer que cela est correct, donc vous avez au début une forte décroissance qui devient moins forte. Vous avez ce moins un sur sin carré qui devient de plus en plus grand. La pente ici de moins un est la plus grande pente possible. Et ensuite, vous retournez vers le pôle et cela se répète pi par... sur chaque période.

Notes

Summary

18m 42s

Dérivée des fonctions trigonométriques

Ce que nous avons vu ou revu :

- la notion de dérivabilité ;
- les fonctions dérivées des fonctions trigonométriques.

Prochaine étape :

- la dérivée des fonctions trigonométriques inverses.

Bilan, donc, qu'est-ce que nous avons appris aujourd'hui ? Nous avons rappelé quand même la notion de dérivabilité, c'est-à-dire son interprétation comme pente d'une tangente et nous avons montré que, en fait, toutes les fonctions trigonométriques sont dérivables, donc le sinus, le cosinus, tangente, cotangente, et nous avons retrouvé des formules très simples pour les dérivées de ces fonctions. C'est ainsi que la dérivée du sinus est donnée par simplement le cosinus. La prochaine fois, nous allons nous intéresser à la dérivée des fonctions trigonométriques inverses. Je vous remercie et à la prochaine.

Notes

Summary

19m 18s