ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Continuité et dérivabilité des fonctions trigonométriques

8.2 Dérivées des fonctions trigonométriques

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

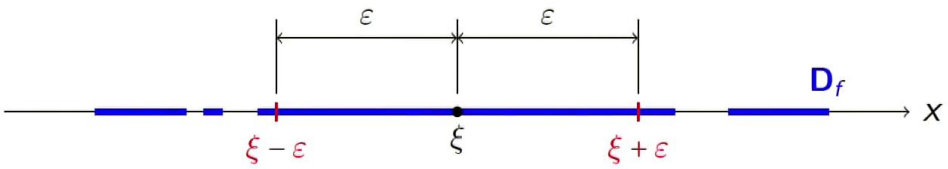
EPFL

Rappel sur la dérivée d'une fonction

Considérons une fonction f en un point ξ situé à l'intérieur du domaine de définition $\mathbf{D}_f$.

Par cela nous voulons dire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset \mathbf{D}_f.$$



Guten Tag! Das letzte Mal haben wir die Stetigkeit trigonometrischer Funktionen untersucht. Heute werden wir uns einer Eigenschaft zuwenden, die als die der Stetigkeit. Wir werden uns mit der Ableitung trigonometrischer Funktionen beschäftigen. Lassen Sie uns erst zusammenfassen, was man unter einer Ableitung versteht. Um eine Ableitung vorzunehmen, betrachten wir eine Funktion, die wir hier f nennen, und untersuchen dieses an einem Punkt xi (ξ) der sich im Definitionsbereich der Funktion befindet. Was genau bedeutet nun "im Definitionsbereich"? Hier haben wir eine Achse reeller Zahlen und in Blau haben wir hier den Definitionsbereich der Funktion f. Der Punkt xi (ξ) befindet sich in diesem Definitionsbereich, weil ich eine positive Zahl Epsilon (ξ) finde - normalerweise ist dies eine kleine Zahl - so wie im Intervall zwischen xi minus Epsilon und xi plus Epsilon, dieses gesamte Intervall liegt im Definitionsbereich. Wir werden uns nun auf einen Punkt xi dieser Art konzentrieren und wir wählen ein weiteres xi, einen zweiten Punkt x irgendwo in diesem Intervall zwischen xi minus Epsilon und xi plus Epsilon.

Notes

Summary

0m 04s

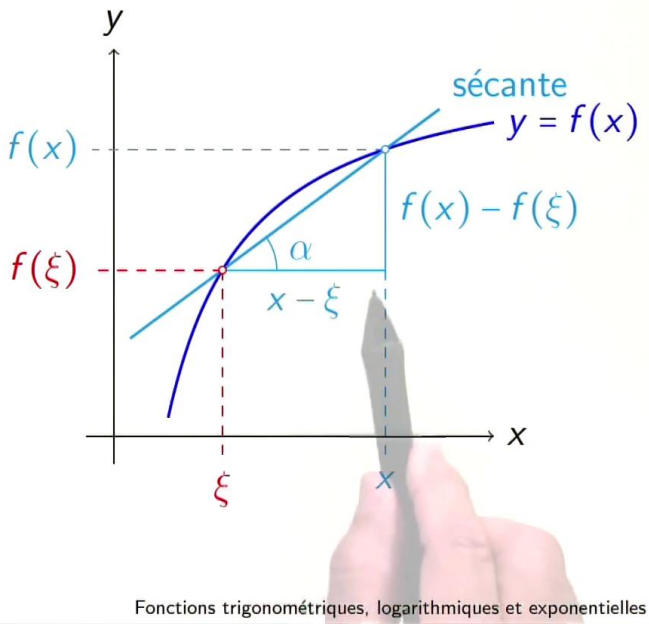
Pente de la sécante

Pour tout $x \in]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[$, on note $m_\xi(x)$ la pente de la sécante qui passe par les deux points

$$(\xi, f(\xi)) \quad \text{et} \quad (x, f(x))$$

du graphe de f :

$$m_\xi(x) = \tan\alpha = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir haben hier also eine Situation, für xi ist das x ist einfach nur im Intervall zwischen xi minus Epsilon und xi plus Epsilon. Hier haben Sie den Graphen der Funktion f, y ist gleich f(x) und wir werden uns auf zwei Punkte konzentrieren: den ersten Punkt hier, xi, f von xi; er liegt auf dem Graphen der Funktion und ein zweiter Punkt x, f von x, der sich hier befindet. Und wir betrachten eine Gerade, die durch diese zwei Punkte geht. Dies ist eine Sekante, die üblicherweise den Graphen der Funktion f schneidet. Wir werden uns nun der Steigung dieser Sekante zuwenden, eine Steigung, die wir m xi von x nennen. Offensichtlich ist diese Steigung von der Wahl von xi und x abhängig. Wir werden nun allerdings xi fest bestimmen und x wird variabel sein. Aus diesem Grund haben wir eine Asymmetrie in unserer Notation. rDiese Steigung, per definitionem, diese Tangens Alpha (α) - der Winkel Alpha befindet sich hier - ist die Differenz f von x minus f von xi. Hier ist sie positiv, sie könnte allerdings negativ sein, geteilt durch die Differenz zwischen x und xi. Erneut: dieses Differenz ist hier positiv, könnte aber absolut auch negativ sein, und dieser Quotient gibt uns eine reelle Zahl, welche exakt dem Tangens Alpha entspricht.

Notes

Summary

1m 34s

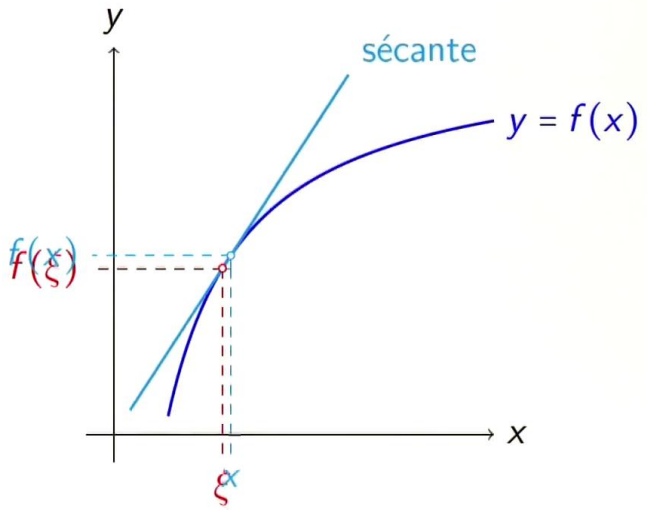
Définition

On dit que la fonction f est *dérivable au point* ξ, si la limite

$$\lim_{x\to\xi} m_\xi(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

existe.

Cette limite, notée $f'(\xi)$, s'appelle le *nombre dérivé de la fonction* f *au point* ξ.



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Wir sagen - und dies ist eine Definition - dass die Funktion f ableitbar am Punkt xi ist, dieser fixe Punkt im Innenbereich, wenn sein Limes - also nehmen wir diese Steigung mit festem xi und variablem x, das xi zustrebt - wenn also dies der Limes der Differenz der Funktionswerte ist, geteilt durch die Differenz zwischen x und xi, wobei x Richtung xi strebt. Wenn diese Grenze existiert, sagen wir die Funktion ist ableitbar. Wir stellen fest, dass die Grenze f' von x der Ableitungswert der Funktion f im Punkt xi oder die Ableitung der Funktion f im Punkt xi ist. Schauen wir uns also an, was passiert. Hier haben wir x, das sich xi annähert.

Notes

Summary

3m 05s

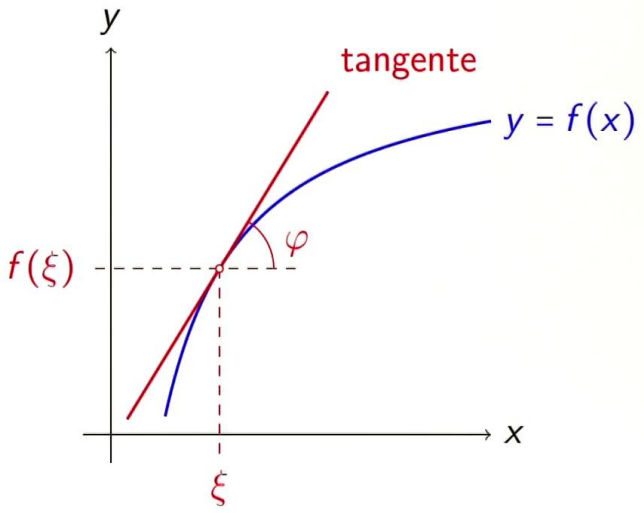
Interprétation géométrique

Le nombre dérivé $f'(\xi)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(\xi, f(\xi))$:

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \tan \varphi \,.$$

L'équation de cette tangente est donnée par

$$y = f'(\xi)\,(x - \xi) + f(\xi)\,.$$



Die Sekante führt also zu einer stabilen Position und wir erhalten als Grenzwert einen Tangens der Kurve und können nun sagen f' von xi ist tatsächlich die Steigung der Tangente der Funktionsgraphen. Und dieses hier beschriebene Verhältnis, die Grenze dieses Verhältnisses, ist dieser Tangens Phi mit Phi als Winkel, der die Tangente der Kurve bestimmt. Wir können also die Gleichung dieser Tangente suchen. Was wissen wir? Wir kennen den Punkt xi f von xi, was ein Punkt auf der Tangente ist und wir kennen deren Steigung, die durch f' von xi gegeben ist. Wir können also ableiten, dass y minus f von xi durch die Steigung f' x multipliziert mit x minus xi ist. Oder, wenn Sie f von xi der anderen Seite nehmen, was vielleicht die Standardversion der Notation dieser Gleichung der Tangente ist, dann ist y gegeben durch eine Steigung f' von xi, die mit x minus xi multipliziert und man fügt die Konstante plus f am Punkt xi hinzu.

Notes

Summary

3m 59s

Fonction dérivée

Définition

En regroupant dans l'ensemble $\mathbf{D}_{f'}$ tous les points ξ pour lesquels la dérivée de f existe, on obtient la *fonction dérivée* de f :

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

En changeant de notations :

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

ou en posant $t = x + h$:

$$f' : \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Wir haben hier eine Ableitung in einem gegebenen Punkt xi, der sich innerhalb des Definitionsbereichs befindet. Für jedes xi dieses Typs kann man die Grenze berechnen und wenn nötig. die Grenze f' von xi. Wir werden nun die Menge D f' umstellen, das wird also nun der Bereich einer Funkion f' aller Punkte xi, für die man eine Ableitung berechnen kann. Folglich wird f' diese Menge D f' in reelle Zahlen umwandeln, xi wird immer in f' von xi umgewandelt, was einfach der Grenze entspricht, die wir bereits erarbeitet hatten und die auf dem Funktionsgraphen als Sekante liegt. Die Grenze ist also die Tangente, die Steigung der Tangente. Diese Notationsart ist einfach, denn was normalerweise stört, ist dass sich die Namen der Variablen ändern. Vorher haben wir eine Funktion gehabt, die x zu f von x wandelt. Nun haben wir eine Funktion, die xi zu f' von xi wandelt. Nun kann man dieses xi mit x ersetzen, was das Verhalten der Funktion nicht verändert. Das Problem ist, dass hier bei dieser Grenze ein anderer Buchstabe für x gewählt werden muss. Man kann zum Beispiel t wählen und die Grenze dann so formulieren, wie es hier geschehen ist. Häufig wird bevorzugt, t glich x plus h zu bestimmen, das heißt h misst, wie weit sich von diesem Wert x entfernt wird und wir kommen zu der letzten Formel: Am Punkt x haben wir f plus h minus f von x und wir teilen durch diese Differenz, die nur h ist.

Notes

Summary

5m 11s

Notation de Leibniz

Soit $f : \mathbf{D}_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$, une fonction dérivable.

On note souvent la fonction dérivée de f sous la forme $\frac{d}{dx} f$ au lieu de f'

$$\frac{d}{dx} f : \quad \mathbf{D}_{f'} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{d}{dx} f(x).$$

Le nombre dérivé $f'(\xi)$ se note alors

$$\left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=\xi}.$$

Wenn ich eine ableitbare Funktion habe, dann schreibe ich diese wie folgt: das bedeutet, dass sie Ableitungen an mindestens mehreren Punkten hat. Man erhält also eine Funktion, die f' heißt, die aber auch häufig mit dem Symbol hier, d zu dx von f geschrieben wird. Und Sie finden hier die entsprechende Schreibweise, x ist umgeformt zu d über dx von f von x. Wenn Sie in dieser Notation den Wert in einem gegebenen Punkt xi berechnen wollen, schlage ich Ihnen die folgende Notation vor: hier haben Sie x, man sagt, man leitet in Bezug auf eine Variable x ab und dann wählt man ein festes x xi, wenn man die Steigung der Tangente in einem gegebenen Punkt erlangen will.

Notes

Summary

6m 52s

Dérivée de la fonction sinus

La fonction dérivée de la fonction sinus est définie par

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)\cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\end{aligned}$$

Lassen Sie uns nun die Ableitung der Minusfunktion untersuchen. Ich möchte also die Ableitung vom Sinus berechnen, das heißt ich nehme den Sinus am Punkt x plus ein h, das positiv oder negativ sein kann, minus den sinus von x und ich teile durch h, welches die Differenz zwischen diesem x plus h und x ist, h strebt dabei gegen 0. Wir werden nun die Verhältnisse verwenden, die Verhältnisse rund um die trigonometrischen Funktionen. Wir hatten eine der Gleichungen, die uns erlaubt, eine Differenz in ein Produkt zu wandeln. Eine Differenz von Sinus lässt sich als 2 mal Sinus der Hälfte der Differenz der Winkel schreiben. Cosinus ist die Halbsumme der Winkel. Hier addieren Sie die zwei Winkel, x plus h plus x, Verzeihung, Sie subtrahieren zunächst die Winkel, x plus h minus x, das ist die Hälfte der Differenz geteilt durch 2. Erst dann addieren Sie sie, x plus h plus x und nehmen die Hälfte und haben nun die Halbsumme. x plus h minus x wird sich hier ein wenig vereinfachen. Sie haben hier ein halbes h. Wenn Sie dies ein wenig näher betrachten, was hier passiert, wenn h sich Null sehr stark nähert, wird sich die Stetigkeit dem cosinus von x nähern.

Notes

Summary

7m 38s

Dérivée de la fonction sinus

La fonction dérivée de la fonction sinus est définie par

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)\cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x\,.
\end{aligned}$$

Im Gegenzug ist es hier ein bisschen problematischer, Sie haben einen Sinus, der sich Null nähert und der durch Null geteilt wird. Hier finden wir einen bekannten Limes, Sie sehen es schon besser, wenn Sie die 2 im Nenner lassen und den Limes Faktor um Faktor nehmen. Sie erhalten also einen ersten Faktor, einen Limes von Sinus h Halbe über h Halbe, wenn h zu Null strebt und einen halben Limes, der der Limes von cosinus x plus h Halbe ist, wenn h Null anstrebt. Der erste Limes strebt zu 1 und der zweite strebt zu Cosinus x und es bleibt Cosinus x.

Notes

Summary

9m 03s

Dérivée de la fonction sinus

Proposition

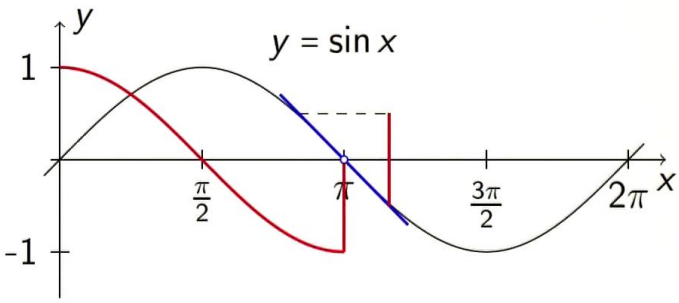
La fonction

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

est dérivable en tout point

et

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad (x \in \mathbb{R}).}$$



REPLAY

Wir erhalten folglich ein simples Ergebnis, die Sinusfunktion ist überall ableitbar. Und ihre Ableitung ist durch den cosinus bestimmt. Sie können also dieses Resultat am Sinusgraphen sehen. Hier haben Sie das System x y, den Sinusgraphen mit Null bei Pi und 2 Pi, mit den Höchstwerten 1, minus 1 am Punkt Pi Halbe und 3 Pi Halbe. Wenn Sie nun eine Tangente betrachten... wir werden hier gestrichelt eine Größe 1 einzeichnen, sodass an der Vertikalen die Größe exakt die Ableitung ist und wir nehmen diese Größe als Wert der Ableitung am Punkt Null. Wenn wir nun hier x ein wenig erhöhen, haben wir das gleiche: an diesem Punkt ist die Tangente 1, die Steigung dieser Tangente und dieser Wert, ich nehme sie am Punkt x, wo ich die Ableitung berechnet habe. Wenn ich x nach und nach erhöhe erhält man eine Tangente, die abflacht. Man sieht außerdem, dass ihre Ableitung nun immer kleiner wird. Ich erreiche das Maximum hier bei Pi Halbe und dort ist die Tangente sehr flach und die Ableitung von Sinus, die der Cosinus ist, man sieht nun, dass dieser cosinus sich Null nähert. Indem ich x erhöhe, erhalte ich nun Tangenten, die abfallen, und immer weiter abfallen. Für x gleich Pi habe ich ein maximales Gefälle nach unten.

Notes

Summary

9m 44s

Dérivée de la fonction sinus

Proposition

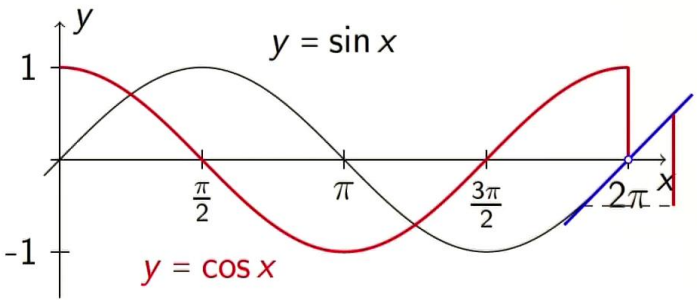
La fonction

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

est dérivable en tout point

et

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



REPLAY

Die Steigung ist nun minus 1 und ist de Wert des Cosinus am Punkt Pi. Wenn ich dann weiter x erhöhe, nimmt der Sinus weiter ab, die Tangente hat aber erneut die Tendenz flacher zu werden. Die Steigung nimmt also zu und am niedrigsten Wert, der bei x gleich 3 Pi Halbe ist, ist die Tangente sehr flach, die Steigung ist dort gleich Null. Der Cosinus geht hier gegen Null und Sie können hier bis 2 Pi gehen. Es ist klar, dass sich diese Periodisierung wiederholen wird. Und man erkennt nun sehr gut anhand der Punkte der Grafik, dass die Ableitung von Sinus durch Cosinus bestimmt ist.

Notes

Summary

11m 31s

Dérivée de la fonction cosinus

La fonction dérivée de la fonction cosinus est définie par

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)}{h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = -\sin x\,.
\end{aligned}$$

Wir können also das Ganze nochmal wiederholen für den Cosinus, was sich allerdings nicht grundlegend ändert. Wir haben die gleichen Schritte, um den Cosinus abzuleiten. Ich nehme diesen Quotienten cosinus x + h minus cosinus x geteilt durch h und ich werde sehen, dass h gegen Null strebt. Erneut, eine Differenz von Cosinus kann als Produkt geschrieben werden. Dieses Mal, minus 2 mal sin sin die Hälfte der Differenz und die Halbsumme der Winkel. Man erhält für die Winkel die gleichen Werte h Halbe und x plus h Halbe. Dieses Mal haben wir aber 2 Mal Sinus. Wir stellen erneut den Sinus h Halbe mit h um, wie wir es bereits zuvor gemacht haben. Und dieses Mal, geht der erste Limes zu 1, es bleibt ein negatives Vorzeichen, also habe ich minus 1 hier. Für den zweiten Limes, geht die Stetigkeit der Sinusfunktion gegen Sinus x. Mir bleibt also nur minus minus x.

Notes

Summary

12m 20s

Dérivée de la fonction cosinus

Proposition

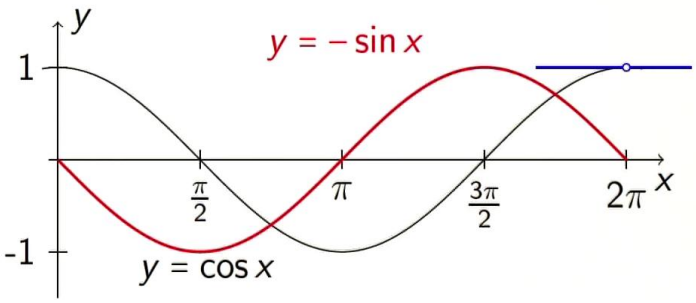
La fonction

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos x$$

est dérivable en tout point

et

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



REPLAY

Erneut kann ich die zweite Annahme festhalten, die Cosinusfunktion genau wie die Sinusfunktion ist immer ableitbar in jedem Punkt und die Ableitung wird dieses Mal nicht bestimmt durch Sinus, hier geht nun eine gewisse Symmetrie verloren, sondern die Cosinusfunktion ist durch minus minus gegeben. Erneut können Sie dies alles auf dem Graphen wieder erkennen. Hier haben sie den Cosinusgraphen. Am Ausgangspunkt ist die Tangente horizontal und der Sinus gleich Null. Sie können hier ebenfalls x erhöhen. Hier haben Sie ein Gefälle nach unten, als eine Steigung von maximal minus 1. Hier, ist die Steigung mindestens aufgelöst. Dort geht die Maximalsteigung nach oben, Richtung 1, was dem Wert von minus Sinus am Punkt 3 Pi Halbe entspricht. Zum Schluss führt der Cosinus zu maximal 1, der Maximalwert erneut mit einer horizontalen Tangente und minus Sinus löst sich in diesem Punkt auf.

Notes

Summary

13m 17s

Dérivée de la fonction tangente

On peut obtenir la fonction dérivée de la fonction tangente

$$\tan : \mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$$

Wir haben die Ableitungen von Sinus und von Cosinus gefunden, was ist dann mit der Tangensfunktion? Ich erinnere Sie daran, dass die Tangensfunktion durch die Menge D Tangens definiert ist. Es können also nur Werte verwendet werden, bei denen der Cosinus sich nicht auflöst und Tangens einfach der Quotient von Sinus und Cosinus ist. Um einen Quotienten abzuleiten, muss man die Regeln kennen, wir können die Quotienten der Funktion ableiten. Diese Ableitungsregel von Quotienten werden wir nutzen, um den Quotient von Sinus über Cosinus abzuleiten. Um dies zu tun, leiten wir einfach den Zähler ab, das hießt, Sinus abgeleitet von Cosinus mal Zähler Cosinus minus Zähler Sinus, der mit der Ableitung von Cosinus multipliziert wird und minus Sinus ist. Das ganze wird durch das Quadrat des Nenners geteilt, also cosinus zum Quadrat. Die beiden negativen Vorzeichen neutralisieren sich und mir bleibt also ein Cosinus zum Quadrat oku Sinus zum Quadrat im Zähler.

Notes

Summary

14m 18s

Dérivée de la fonction tangente

On peut obtenir la fonction dérivée de la fonction tangente

$$\tan : \mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (x \in \mathbf{D}_{\tan}).}$$

Man sieht sofort, was wir nun für ein Ableitungsergebnis erhalten haben. Ich beginne vielleicht mit der zweiten Variante, bei der Cosinus zum Quadrat plus Sinus zum Quadrat 1 ergibt. Es bleibt also 1 über Cosinus Quadrat und man sieht, dass alle Berechnungen überall richtig sind, außer dort, wo der Kosinus sich auflöst, der Definitionsbereich der Ableitung des Tangens ist also der Definitionsbereich der Tangensfunktion. Diese Tangensfunktion ist also auch ableitbar, überall dort, wo sie definiert ist. Wir können das Ergebnis auch anders festhalten. Ich möchte hier unmissverständlich deutlich machen, dass es keine Frage ist, eine der 2 Varianten zu wählen, die Ihnen sympathischer erscheint, sondern Sie müssen sich beide Ergebnisse merken. Von einem technischen Punkt der Berechnungen aus betrachtet, ist manchmal das eine besser, manchmal das andere. Wir wissen aber schon, und das war eine der Verhältnisse, die wir Pythagoras zuordnen können, dass 1 zu Cosinus zum Quadrat auch als 1 plus Tangens zu Quadrat geschrieben werden kann. Sie finden dies hier: es ist einfach diese Summe, die Sie durch Cosinus zum Quadrat teilen müssen, Term für Term. Sie haben also Cosinus zum Quadrat durch Cosinus zum Quadrat, was 1 ergibt. Und Sinus zum Quadrat zu Cosinus zum Quadrat, was Tangens zum Quadrat ergibt. Man könnte also auch sagen, die Ableitung des Tangens ist 1 plus Tangens zum Quadrat.

Notes

Summary

15m 14s

Dérivée de la fonction tangente

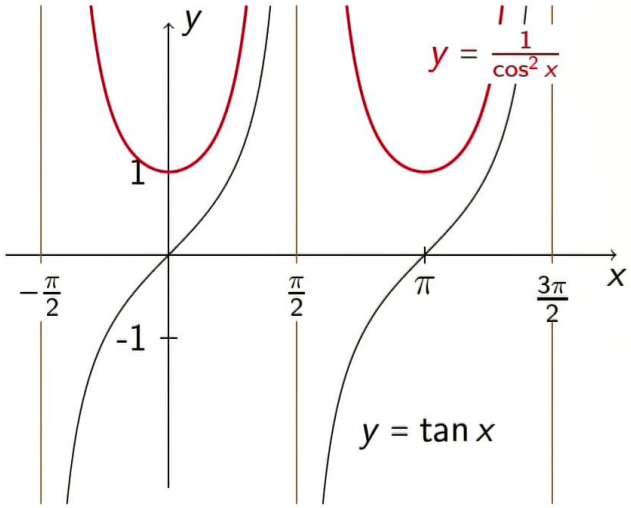
Proposition

La fonction

$\tan : \mathbf{D}_{\tan} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x$

est dérivable en tout point de $\mathbf{D}_{\tan}$ *et*

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Fassen wir alles zusammen, das heißt die Tangensfunktion, welch hier ist, ist überall, wo sie definiert ist, auch ableitbar und ihre Ableitung ist durch 1 plus Tangens zum Quadrat bestimmt oder durch 1 zu Cosinus zum Quadrat. Man kann natürlich versuchen, dies im Graphen wiederzufinden, hier also haben Sie den Tangsgraphen, der Pi periodisch ist, nicht 2 Pi periodisch, obwohl... auch 2 Pi periodisch. Was wichtig ist, Pi ist periodisch. Beachten Sie, dass der Cosinus hier 2 Pi periodisch ist, aber dank des Quadrats, ist 1 zu Cosinus Quadrat ebenfalls Pi periodisch. Wenn Sie sich das nun also ansehen, fangen wir also an mit den Werten von x an, die minus Pi Halbe, nur ein bisschen darüber. Hier haben wir eine Tangente, die sehr stark positiv aufsteigt, Hier sehen Sie, dass sie sehr positiv ist. Die Steigung flacht ab. Hier ist die Steigung maximal, der Höchstwert ist dann gegeben bei 1 zu Cosinus Quadrat von Null, also 1. Ich habe hier eine maximale Steigung von 1 und die Steigung erhöht sich aufs Neue und das gleiche wiederholt sich immer wieder.

Notes

Summary

16m 26s

Dérivée de la fonction cotangente

De même, on obtient la fonction dérivée de la fonction cotangente

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot x := \frac{\cos x}{\sin x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(-\sin x)\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x$$

Für den Kotangens ist die Vorgehensweise die gleiche. Was sich hier geändert hat, ist offensichtlich der zulässige Bereich, der sich geändert hat und wir haben den Quotient von Cosinus zu Sinus, also es muss dieses Mal zugegeben werden, dass nur x, wo der Sinus sich nicht auflöst. Aber aufs Neue, wir leiten einen Quotienten ab, also die Ableitung von Cosinus mal Sinus minus Cosinus mal die Ableitung von Sinus, geteilt durch Sinus zum Quadrat. Wenn sie ein wenig hier hinschauen, dann sehen Sie aufs neue, dass hier immer ein negatives Vorzeichen ist. ich hebe das einmal hervor, es bleibt Sinus Quadrat plus Cosinus Quadrat, was gleich 1 ergibt.

Notes

Summary

17m 33s

Dérivée de la fonction cotangente

De même, on obtient la fonction dérivée de la fonction cotangente

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot x := \frac{\cos x}{\sin x},$$

en utilisant la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(-\sin x)\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (x \in \mathbf{D}_{\cot}).$$

Und wir sehen sofort, dass ich ein Ergebnis festhalten kann. Das ist die Ableitung des Kotangens, überall also minus 1 zu Sinus Quadrat. Daraus folgt, überall, wo der Kotangens existiert, gibt es auch eine Ableitung. Oder auch, erneut, eine der Beziehungen, die wir von Pythagoras haben, also minus 1 zu Sinus Quadrat, Sie können sehen, dass ich es hier als minus 1 minus Kotangens Quadrat schreibe. Sie können also wieder einfach den Zähler, der hier eine Summe ist, Term für Term eingeben und erhalten dann eins und eins zu Sinus Quadrat, Verzeihung, eins und den Kotangens hier.

Notes

Summary

18m 09s

Dérivée de la fonction cotangente

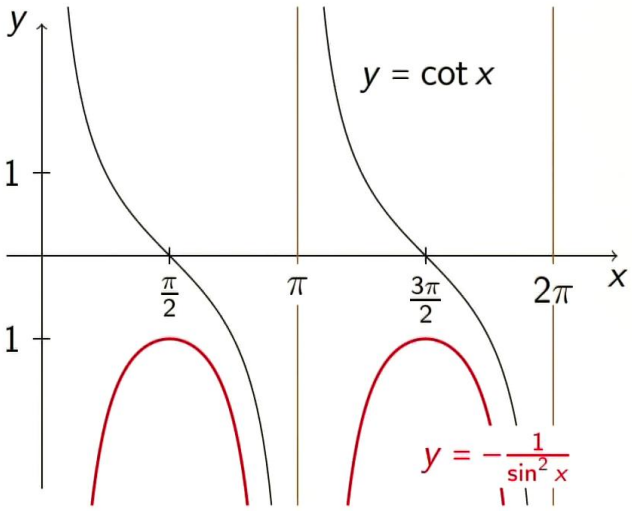
Proposition

La fonction

$$\cot : \mathbf{D}_{\cot} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot x$$

est dérivable en tout point de $\mathbf{D}_{\cot}$ *et*

$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Die Annahme ist also folgende: die Kotangensfunktion ist ebenfalls überall ableitbar, ihre Ableitung ist gleich minus eins zu Sinus Quadrat oder minus eins minus Kotangens Quadrat. Sie können auch hier sehen, dass dies korrekt ist, zunächst haben Sie also einen starken Abfall, der zunehmen weniger stark wird. Dieses minus eins zu Sinus Quadrat, das zunehmend größer wird, haben Sie hier. Die Steigung von minus eins ist hier die größtmögliche Steigung. Und dann, wenn Sie zurück zum Pol kommen und dies sich Pi mal wiederholt... bei jeder Periode.

Notes

Summary

18m 42s

Dérivée des fonctions trigonométriques

Ce que nous avons vu ou revu :

- la notion de dérivabilité ;
- les fonctions dérivées des fonctions trigonométriques.

Prochaine étape :

- la dérivée des fonctions trigonométriques inverses.

Was ziehen wir also als heutige Bilanz? Wir haben uns noch einmal die Ableitbarkeit in Erinnerung gerufen, das hießt die Interpretation als die Steigung einer Tangente und wir haben zeigen können, dass alle trigonometrischen Funktionen ableitbar sind. Also Sinus, Cosinus, Tangens und Kotangens und wir haben einfach Formeln gefunden, um diese Funktionen abzuleiten sowie dass die Ableitung des Sinus einfach durch den Cosinus bestimmt ist. Das nächste Mal werden wir uns mit der Ableitung umgekehrter trigonometrischer Funktionen befassen. Ich danke Ihnen - bis zum nächsten Mal!

Notes

Summary

19m 18s