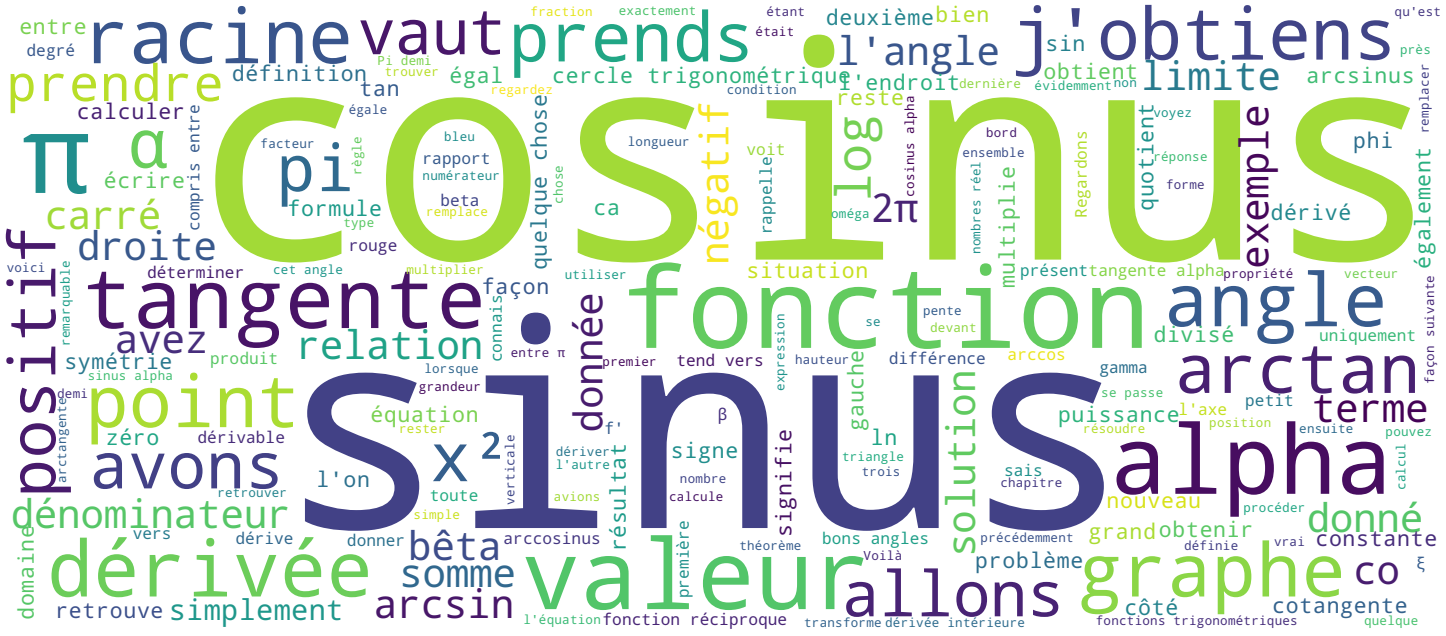
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Continuité et dérivabilité des fonctions trigonométriques

8.3 Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Composée de deux fonctions

Soient deux fonctions

$$f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto f(x) \qquad \text{et} \qquad g:\ J \to \mathbb{R},\quad x \mapsto g(x)\,,$$

avec $f(I) \subset J$.

On considère la fonction composée

$$g \circ f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right).$$

Bonjour. La dernière fois, nous avons déterminé les dérivés des fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente. Aujourd'hui, nous allons faire le même travail, mais cette fois-ci avec les fonctions trigonométriques inverses. Pour le faire, rappelons d'abord ce que l'on entend par la composition de deux fonctions. Je considère une première fonction *f*, qui est définie sur un ensemble *I*, un sous-ensemble des nombres réels dans ℝ, qui transforme *x* en *f(x)*, et j'ai une deuxième fonction *g* qui elle, est définie sur un ensemble *J* et qui transforme *x* en *g(x)*. Supposons que lorsque je prends une valeur de *x* qui est dans *I* et que je calcule *f(x)*, le résultat se retrouve dans *J*, donc dans le domaine de la fonction *g*. Dans ce cas-là, on peut composer ces deux fonctions : on obtient donc une fonction que l'on peut dénommer ici *g* rond (*o*) *f* -je propose souvent aux étudiants de dire que c'est "*g* après *f*" et alors de lire ce petit rond comme un "après" qui transforme un *I* dans ℝ- et de la façon suivante, je prends le *x*, je calcule d'abord *f(x)*, et au résultat, j'applique *g*.

Notes

Summary

0m 04s

Composée de deux fonctions

Soient deux fonctions

$$f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto f(x) \qquad \text{et} \qquad g:\ J \to \mathbb{R},\quad x \mapsto g(x)\,,$$

avec $f(I) \subset J$.

On considère la fonction composée

$$g \circ f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right).$$

Il faut donc bien mémoriser que nous écrivons de gauche à droite, et là, dans cette notation, nous écrivons d'abord la fonction qui agit en deuxième position, pas en première; l'ordre est en quelque sorte renversé, c'est pour cela que *g* est après *f*.

Notes

Summary

1m 19s

Dérivée de la composée de deux fonctions

Soient

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right)$$

et x un point situé à l'intérieur de I.

Supposons que

- la fonction f soit dérivable en x et que
- la fonction g soit dérivable en $f(x)$.

Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x et on a

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x).}$$

Dans cette situation, si je prends un point *x* qui est à l'intérieur du domaine *I*, je suppose que les deux fonctions *f* et *g* sont dérivables -pour être plus précis,je suppose que *f* est dérivable en *x*, et si je calcule *f(x)*, que je retrouve un point qui est à l'intérieur de *J* et la fonction *g* est alors dérivable dans ce point *f(x)*. Si j'ai chaque étape qui est dérivable, alors la composée est également dérivable; je peux calculer la dérivée de la composée de la façon suivante : je prends *g'* à l'endroit *f(x)*, et je multiplie par *f'(x)*. Pour mémoriser, on peut dire la chose suivante : la dérivé de *g(x)*, c'est *g'(x)*, et si je prends la dérivé de *g*, non pas de *x* mais de quelque chose -disons "bidule", *g[f(bidule)]*- j'ai *g'[f(bidule)]*. *f'(bidule)*.

Notes

Summary

1m 38s

Exemples

- $\frac{d}{dx}\sin\left[f(x)\right] = \cos\left[f(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\cos\left[f(x)\right] = -\sin\left[f(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\tan\left[f(x)\right] = (1+\tan^2\left[f(x)\right]) \cdot \frac{d}{dx} f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\sin\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)$

Appliquons cette règle *f(bidule)*; *f'(bidule)* une fois ici : donc, j'ai la dérivée de *sin[f(x)]* et pour dériver, je fais comme s'il y avait *sin(x)* simplement; j'écris *cos [f(x)]* et je multiplie par la dérivé intérieure *f'(x)*. Pour le cosinus de *f(x)*, c'est la même chose : je dérive d'abord le cosinus, qui me donne simplement *-sin [f(x)]*, et je multiplie par la dérivé intérieure *f'(x)*. Pour tangente, encore une fois la même chose : je dérive tangente. Là, la situation est peut-être moins simple à la notation car la dérivé de tangente est *1+tan²*. Il faut bien prendre *1 + tan² [f(x)]*, mais il faut multiplier la somme entière par la dérivé intérieure *f'(x)*. Terminons par un autre exemple : j'ai le sinus du cosinus de *tan(x)*; j'ai donc en fait trois étapes : j'ai le sinus, qui agit après le cosinus, qui lui agit après tangente. On peut dériver cela avec la règle que l'on vient d'énoncer : j'ai ici un sinus de quelque chose, donc je dérive le sinus qui donne cosinus, et j'ai le cosinus de quelque chose fois quelque chose prime : la dérivée intérieure.

Notes

Summary

2m 38s

Exemples

- $\frac{d}{dx}\sin\left[f(x)\right] = \cos\left[f(x)\right]\cdot\frac{d}{dx}f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\cos\left[f(x)\right] = -\sin\left[f(x)\right]\cdot\frac{d}{dx}f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\tan\left[f(x)\right] = \left(1+\tan^2\left[f(x)\right]\right)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\sin\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right) = \cos\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)$
  $= \cos\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\left(-\sin\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\frac{d}{dx}\tan(x)$
  $= -\cos\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\sin\left[\tan(x)\right]\cdot\left[1+\tan^2(x)\right].$

Pour la dérivée intérieure, je reprends cette même règle : j'ai le cosinus de quelque chose; j'ai le *cos(cos[tan(x)])* que j'avais déjà, et ici pour la dérivée du cosinus, j'ai *-sin*, à l'endroit de tangente, multiplié par la dérivée de tangente, et la dérivée de tangente est $1+\tan^2$, on obtient donc cette grande expression que vous découvrez ici en fin de page.

Notes

Summary

3m 44s

Dérivée d'une fonction inverse

Soit $f: A \to B$, une fonction bijective et dérivable. La fonction réciproque

$$f^{-1}: B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

vérifie la relation suivante

$$f\left[f^{-1}(x)\right] \equiv x, \qquad (x \in B).$$

En dérivant cette identité par rapport à x, à l'aide de la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$f'\left[f^{-1}(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}, \qquad f'\left[f^{-1}(x)\right] \neq 0.$$

On sait composer les fonctions alors appliquons maintenant cette composition de fonctions à une situation où j'ai une fonction qui est bijective, une fonction qui part depuis un ensemble *A* vers un ensemble *B*, *A* et *B* étant des sous-ensembles typiques de nombres réels. On va supposer qu'elle est bijective et dérivable. Je peux passer à la fonction réciproque, c'est-à-dire la fonction qui va de *B* vers *A*, donc non pas comme *f : A → B* mais de *B → A*, et qui transforme *x* en *f-1(x)*; alors, on sait que dans ce cas-là, si je prends un *x*, je lui applique d'abord la fonction réciproque et ensuite la fonction, je retrouve *x*, et ça c'est vrai pour tous les *x* dans *B*. On peut dériver cette relation par rapport à *x*; on peut dériver séparément à gauche et à droite et on devrait obtenir deux fois la même chose. Pour dériver le *x*, cela est chose facile; si je dérive le *x*, j'obtiens simplement 1; ce qui est plus intéressant, c'est de dériver à gauche. J'ai *f(bidule)*, qui donne *f'(bidule). bidule'* donc *f'* à l'endroit *f-1(x)* multiplié par la dérivé de *f-1(x)*.

Notes

Summary

4m 04s

Dérivée d'une fonction inverse

Soit $f: A \to B$, une fonction bijective et dérivable. La fonction réciproque

$$f^{-1}: B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

vérifie la relation suivante

$$f\left[f^{-1}(x)\right] \equiv x, \qquad (x \in B).$$

En dérivant cette identité par rapport à x, à l'aide de la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$f'\left[f^{-1}(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}, \qquad f'\left[f^{-1}(x)\right] \neq 0.$$

Je peux maintenant isoler cette dérivée de la fonction réciproque et j'obtiens 1 sur *f'* à l'endroit *[f-1(x)]*. Cela marche à condition de ne pas diviser par zéro. Ce qui est remarquable, c'est que ce calcule est légitime.

Notes

Summary

5m 12s

Dérivée d'une fonction inverse

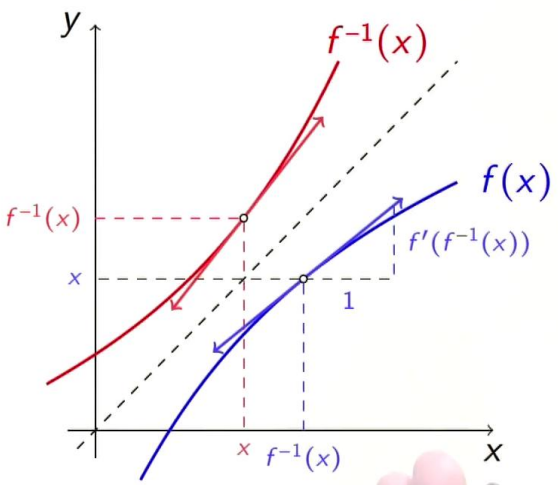
Proposition

Soit $f : A \to B$, *une fonction bijective et dérivable.*

La fonction réciproque

$$f^{-1} : B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

est dérivable



Formulons cela dans une proposition : si j'ai une fonction *f* qui va de *A* vers *B*, bijective et dérivable, alors la fonction réciproque est elle aussi dérivable. Ici dans le graphe, on voit la fonction *f(x)* et *f-1(x)*; on obtient l'une de l'autre par symétrie d'axe $y = x$. Ici, je me place en un point *x*; pour la fonction *f-1*, j'obtiens ici la valeur *f-1(x)*. Je peux aussi prendre cette valeur *f-1(x)* à l'horizontale, ce que nous faisons ici, et si je pars de *f-1(x)*, la fonction *f* me redonne *x*. Dans le graphe, vous retrouvez également les tangentes aux courbes dans les points correspondants. Intéressons-nous à la pente de la fonction *f* : nous partons une unité à l'horizontale et à la verticale; alors, à la verticale je vais retrouver la dérivé de *f*, donc *f'*, et à l'endroit ici, *f-1(x)*. Ce quotient, donc en fait cette différence ici, cette longueur avec signe, donne la dérivé de *f*. Par symétrie, parce que si vous procédez à la symétrie de l'axe $y = x$, les tangentes sont transformées par cette symétrie et également ces triangles de support, ici.

Notes

Summary

5m 31s

Dérivée d'une fonction inverse

Proposition

Soit $f : A \to B$, *une fonction bijective et dérivable.*

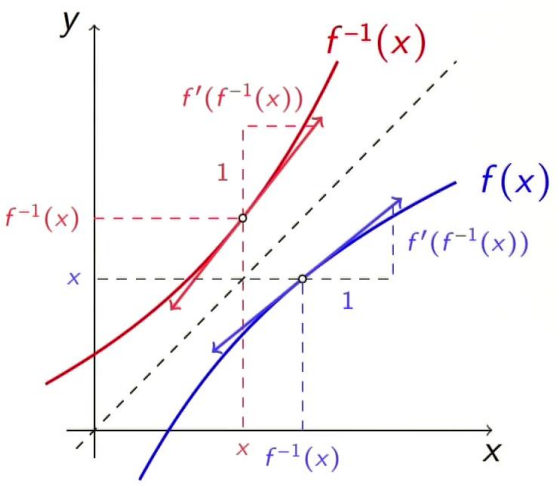
La fonction réciproque

$$f^{-1} : B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

est dérivable et

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}, \quad \left(x \in \mathbf{D}_{(f^{-1})'}\right)$$

$$\mathbf{D}_{(f^{-1})'} = \left\{x \in B \,\middle|\, f'\left[f^{-1}(x)\right] \neq 0\right\}.$$



Vous avez ici le 1 à la verticale, et à l'horizontale vous avez cette fois-ci le *f'* de *f-1(x)*. La pente de la fonction en rouge est donnée par la différence verticale qui vaut 1, divisée par l'horizontale; j'ai alors *1/f'* à l'endroit *f-1(x)*. Le graphe, le dessin, peut être absolument utilisé pour mener une démonstration et l'ensemble marche bien tant que l'on ne divise pas par zéro.

Notes

Summary

7m 08s

Rappel : la fonction arcsinus

La fonction

$$\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin x$$

est une fonction bijective et continue.

On note arcsin sa fonction réciproque

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin x.$$

Tout comme le sinus, elle est continue.

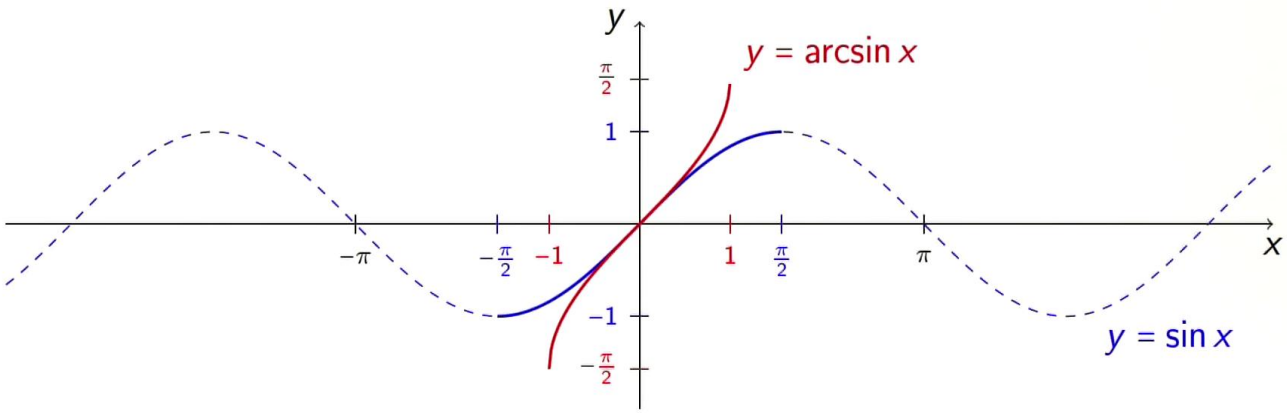
Appliquons maintenant cela aux fonctions trigonométriques inverses, c'est-à-dire que l'on va commencer par la première, par la fonction arcsinus et je commence par un rappel. La fonction sinus peut être restreinte : nous avons décidé de la restreindre à un domaine qui va de *-π/2* à *π/2*, ce sont ce que l'on avait appelé "les bons angles pour sinus". On sait que l'on a affaire à une fonction bijective qui transforme cet intervalle *-π/2; π/2* sur l'intervalle *-1; 1*, et c'est la fonction réciproque qui s'appelle arcsinus. Le sinus est continu et la fonction réciproque de ce fait l'est également.

Notes

Summary

7m 40s

Rappel : la fonction arcsinus



Vous avez ici le graphe du sinus; vous avez ici la partie sélectionnée pour les bons angles, donc de *-π/2* à *π/2*, et on voit très bien que là, chaque valeur de *y* entre -1 et 1 est prise exactement une fois, et si vous prenez l'axe de symétrie correspondant, $y = x$, vous obtenez alors par symétrie le graphe $y = arcsin(x)$.

Notes

Summary

8m 24s

Propriétés

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

Je vous rappelle qu'*arcsin(x)*, pour tout *x* entre -1 et 1, est l'unique angle compris entre *-π/2* et *π/2*, c'est-à-dire l'unique bon angle dont le sinus vaut précisément *x*.

Notes

Summary

8m 49s

Propriétés

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

On en déduit les deux propriétés suivantes :

- $\sin[\arcsin(x)] = x, \quad (x \in [-1, 1])$,
- $\arcsin[\sin(x)] = x, \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, x est un bon angle pour le sinus.

D'autre part, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

- $\cos\underbrace{[\arcsin(x)]}_{\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} = +\sqrt{1 - \sin^2[\arcsin(x)]} = \sqrt{1 - x^2}$.

Si je prends le sinus de *arcsin(x)*, j'ai *x*; là, je prends un *x* quelconque entre -1 et 1, avec arcsinus de *sin(x)* je ré-obtiens également *x* à condition de prendre un bon angle. Nous allons avoir besoin d'un résultat intermédiaire dans la suite des calculs, et nous allons devoir nous interesser au terme du cosinus de *arcsin(x)*; voyez, le sinus de *arcsin(x)* ne pose pas de problème mais si je prends le cosinus de *arcsin(x)*, cela signifie que je connais un angle, *arcsin(x)* est un angle, disons *α*, ce que je connais de *α*, c'est son sinus, qui est donné par *x*, mais il me faut son cosinus. Pour obtenir le cosinus, on peut évidemment considérer *1-sin²* de cet angle, j'obtiens alors le *cos²*; si je prends la racine, j'obtiens mon cosinus en valeur absolue, le problème, c'est de se décider sur s'il va être positif ou négatif. Voyez-vous, arcsinus rend un angle entre *-π/2* et *π/2*, on l'a noté ici, et de fait le cosinus doit être positif, donc je peux écrire un *+√1-sin²*, c'est-à-dire une *√1-x²*, avec un + devant la racine.

Notes

Summary

9m 01s

Dérivée de la fonction arcsinus

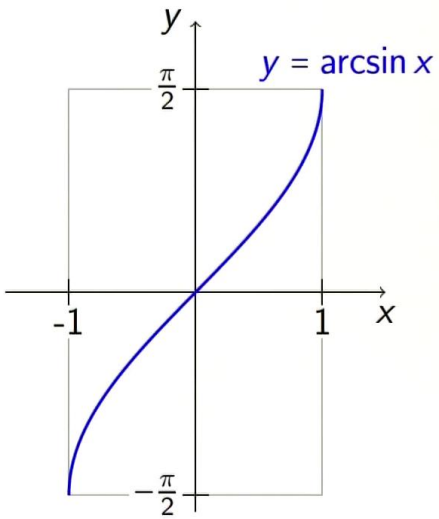
En dérivant les deux membres de l'identité

$$\sin\left[\arcsin(x)\right] = x\,, \quad (\,x \in [-1\,,\,1]\,)\,,$$

on obtient

$$\cos\left[\arcsin(x)\right] \cdot \frac{d}{dx}\arcsin(x) = 1\,, \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\cos\left[\arcsin(x)\right]} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad (\,x \in]-1\,,\,1[\,)\,.$$



Avec ce résultat intermédiaire, on peut essayer de trouver la dérivé de arcsinus. Nous allons nous servir de cette égalité, avec *sin[arcsin(x)] = x*, pour tous les *x* acceptables, c'est-à-dire entre -1 et 1; vous avez ici le graphe de arcsinus dont j'aimerais connaître la dérivée. Si je prends la dérivé à gauche et à droite, j'obtiens ici sinus dérivé donne cosinus de quelque chose, donc multiplié par quelque chose prime, et cela donne, si je dérive de l'autre côté, un 1, alors je peux isoler cette dérivé de arcsinus et j'obtiens *1/cos[arcsin(x)]*, et ce dénominateur, nous venons de l'analyser et il vaut $\sqrt{1-x^2}$. Tout cela marche bien, sauf si le dénominateur s'annule et je vois que, pour *x = -1; 1*, le dénominateur va s'annuler. Si je regarde un peu le graphe de arcsinus, qui est obtenu par symétrie depuis le sinus, on voit très bien que, pour *x = -1* et *x = 1*, j'ai des tangentes verticales; là, on a pas de dérivée qui existe, mais pour toutes les autres valeurs, on a trouvé la valeur de la dérivée.

Notes

Summary

10m 15s

Rappel : la fonction arccosinus

La fonction

$$\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos x$$

est une fonction bijective et continue.

On note arccos sa fonction réciproque

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x.$$

Tout comme le cosinus, elle est continue.

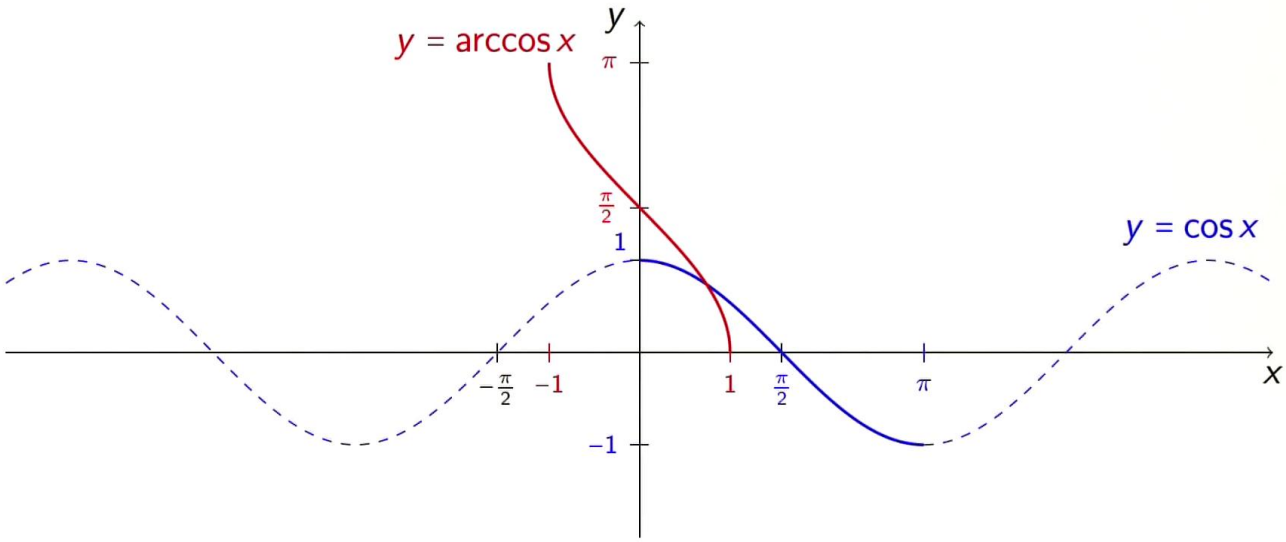
Pour le cosinus, on procède exactement de la même façon : là, de nouveau, on prend une restriction du cosinus -il faut restreindre sur les bons angles pour cosinus. Nous avons analysé cette situation précédemment, nous savons qu'il faut choisir entre 0 et π, c'est la convention qui a été retenue. Là, vous avez une fonction bijective, et la fonction réciproque s'appelle arccosinus.

Notes

Summary

11m 24s

Rappel : la fonction arccosinus



Les deux fonctions sont de nouveau continues. Là, le cosinus; cette fois-ci, les bons angles entre 0 et π, et là, vous avez la restriction du cosinus et, avec la symétrie, vous obtenez le graphe de la fonction réciproque *arccos(x)*.

Notes

Summary

11m 48s

Propriétés

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus vaut x.

On en déduit les deux propriétés suivantes :

- $\cos[\arccos(x)] = x, \quad (x \in [-1, 1])$,
- $\arccos[\cos(x)] = x, \quad (x \in [0, \pi])$, x est un bon angle pour le cosinus.

D'autre part, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

- $\sin\underbrace{[\arccos(x)]}_{\in [0,\pi]} = +\sqrt{1 - \cos^2[\arccos(x)]} = \sqrt{1 - x^2}$.

Nous avons à nouveau les mêmes remarques qui s'imposent pour le cosinus : si vous prenez le cosinus de *arccos(x)*, vous retrouvez *x* pour tous les *x* admissibles, c'est-à-dire entre -1 et 1, et si vous intervertissez l'ordre, si vous voulez avoir arccosinus de *cos(x)*, vous retrouvez *x* à condition que l'angle *x* soit un bon angle pour cosinus, c'est-à-dire compris entre 0 et π. De nouveau, nous devons nous intéresser à une expression un peu curieuse, au lieu d'avoir *cos[arccos(x)]* cette fois, j'ai *sin[arccos(x)]*. L'argument est tout à fait le même; l'*arccos(x)* est entre 0 et π, donc le sinus est positif, et je peux prendre $+\sqrt{1-\cos^2}$ pour avoir ici sous la racine un $\sin^2$. J'obtiens alors la racine de $\sqrt{1-x^2}$.

Notes

Summary

12m 05s

Dérivée de la fonction arccosinus

En dérivant les deux membres de l'identité

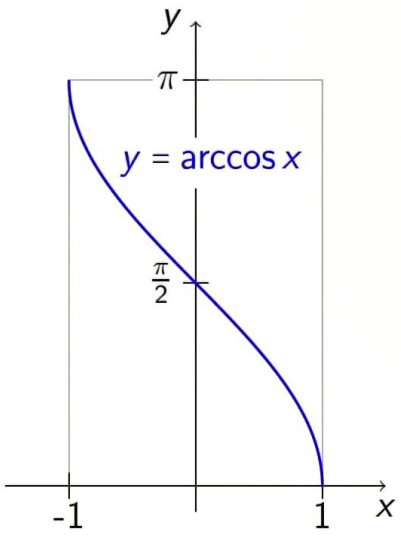
$$\cos\left[\arccos(x)\right] = x\,, \quad (x \in [-1\,,\,1])\,,$$

on obtient

$$-\sin\left[\arccos(x)\right] \cdot \frac{d}{dx}\arccos(x) = 1\,, \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sin\left[\arccos(x)\right]}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad (x \in]-1\,,\,1[)\,.$$



Si je pars de cette identité, que *cos[arccos(x)]* donne toujours *x*, pour *x* entre -1 et 1, si je la dérive, le cosinus donne un *-sin[arccos(x)]* fois la dérivée intérieure, la dérivée de *arccos(x)* donne, et si je dérive à droite, cela donne 1. J'isole cette dérivée de *arccos(x)* et j'obtiens "-", celui d'ici, *1/sin[arccos(x)]*, et nous avons identifié ce dénominateur comme étant la racine de $1\text{-}x^2$. A nouveau, lorsque *x* vaut ±1, la dérivé n'existe pas; si vous regardez le graphe de arccosinus, vous voyez bien que si *x* vaut -1 ou 1, là, vous avez deux fois une tangente qui est verticale, donc il n'y a pas de dérivée.

Notes

Summary

12m 51s

Remarque

Pour tout $x \in]-1,1[$, les dérivées des fonctions $\arcsin x$ et $\arccos x$ sont opposées :

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On en déduit que la dérivée de la fonction $f(x) := \arcsin x + \arccos x$ est nulle :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\arcsin x + \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad (x \in]-1,1[).$$

Or f est continue sur $[-1,1]$, elle est donc constante sur cet intervalle :

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad (x \in [-1,1]).$$

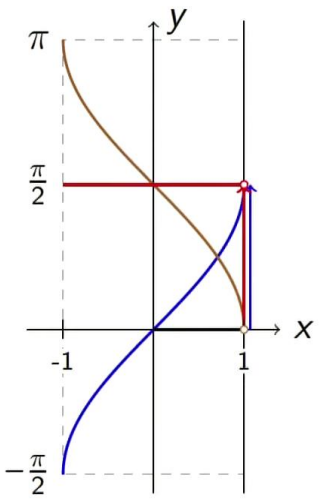
Une remarque s'impose ici, si vous regardez les résultats que nous venons d'obtenir : la dérivée de arccsinus esT *1/√(1-x²)*, celle de arccosinus est presque la même. C'est le même résultat, au signe près. Si je fais la somme de arcsinus et de arccosinus, et si je dérive, -dérivons cette somme, on va la dériver terme à terme- j'obtiens la dérivé d'arcsinus plus la dérivée de arccosinus qui donne "-" la même chose, donc j'obtiens toujours zéro. Il est vrai que la fonction *arcsin(x) + arccos(x)* est définie pour tous les *x* compris entre -1 et 1, y compris le bord, et pour tous les *x* entre -1 et 1 sans le bord, la dérivée s'annule. Or, comme la fonction *f* est continue partout sur l'intervalle fermé, y compris les bords, cette fonction reste constante sur tout l'intervalle fermé. *arcsin(x) + arccos(x)* vaut toujours une constante, mais combien ? Je calcule simplement la valeur de cette somme en un point quelconque, je vais choisir un point qui est agréable : je prends *x= 0* et si vous calculez *f* à l'endroit zéro, vous avez *arcsin0 + arccos0 = π/2*, donc la fonction *f(x)* vaut en fait toujours *π/2*.

Notes

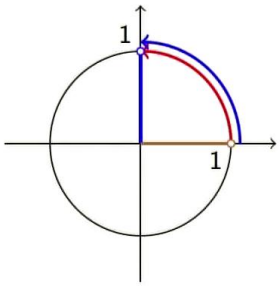
Summary

13m 42s

Illustration



$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (x \in [-1,1]).$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Vous pouvez vérifier cela sur le graphe des fonctions, sur le cercle trigonométrique, vous pouvez vérifier que toujours a lieu *arcsin(x) + arccos(x) = π/2*, pour tous les *x* entre -1 et 1. Voyez, sur le graphe vous avez ici les graphes de arcsinus et de arccosinus; si vous vous placez en un point *x*, vous prenez la valeur de l'une plus la valeur de l'autre et cela va vous donner comme somme toujours *π/2*. On peut changer un peu le *x* : on voit que là, le brun devient plus petit, le bleu qui est négatif, plus grand, la somme reste constante. Vous pouvez également analyser cela sur le cercle trigonométrique : là par exemple, le *x* est quelque peu positif, donc si je prends ici l'arcsinus, le *x* est légèrement positif, l'arc est en bleu ici, et pour l'arccosinus, le cosinus est légèrement positif, c'est le même *x*, il est ici en brun, et la somme entre bleu et brun redonne toujours le *π/2* en rouge.

Notes

Summary

15m 06s

Rappel : la fonction arctangente

La fonction

$$\tan\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \ ]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x$$

est une fonction bijective et continue.

On note arctan sa fonction réciproque

$$\arctan : \ \mathbb{R} \to \ ]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\ , \quad x \mapsto \arctan x.$$

Tout comme la fonction $\tan\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, elle est continue.

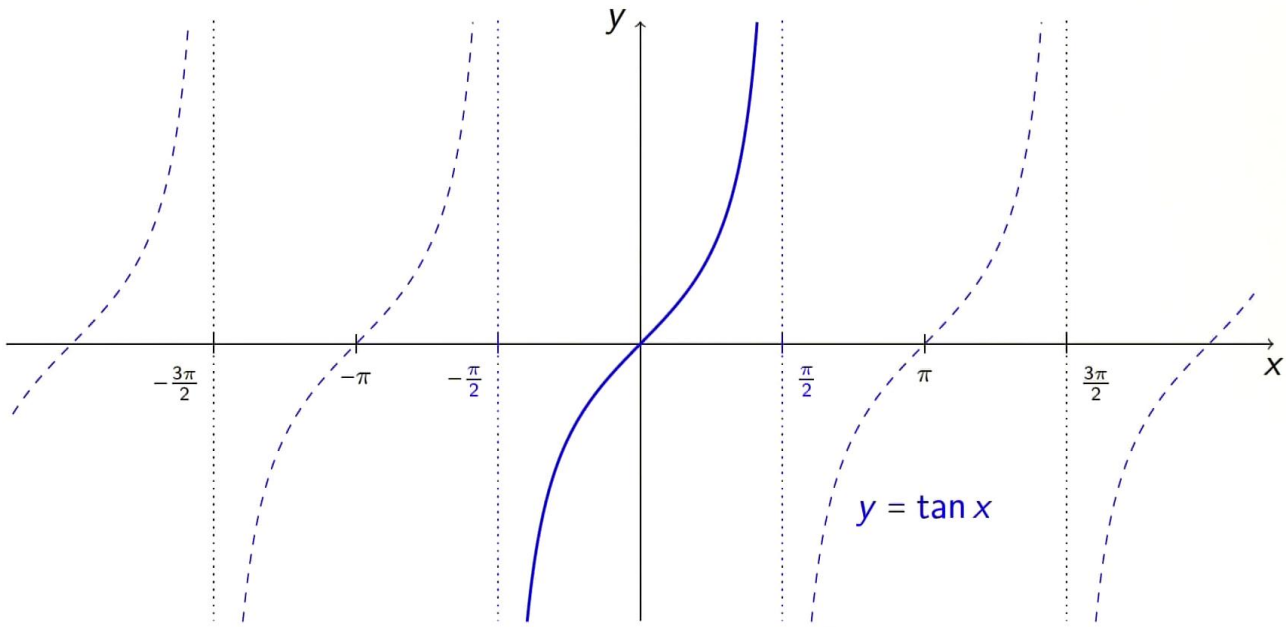
Nous avons fait un travail pour sinus, cosinus, on peut procéder de façon similaire évidemment pour tangente et cotangente : nous allons omettre cotangente mais pour tangente nous allons faire le travail; nous vous laissons le soin de le faire pour cotangente si vous le désirez. Là, pour tangente, il faut prendre une restriction qui est entre -$\pi/2$ et $\pi/2$, sans les bords, ce sont donc les bons angles pour tangente et alors, la fonction réciproque est exactement arctangente.

Notes

Summary

16m 13s

Rappel : la fonction arctangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

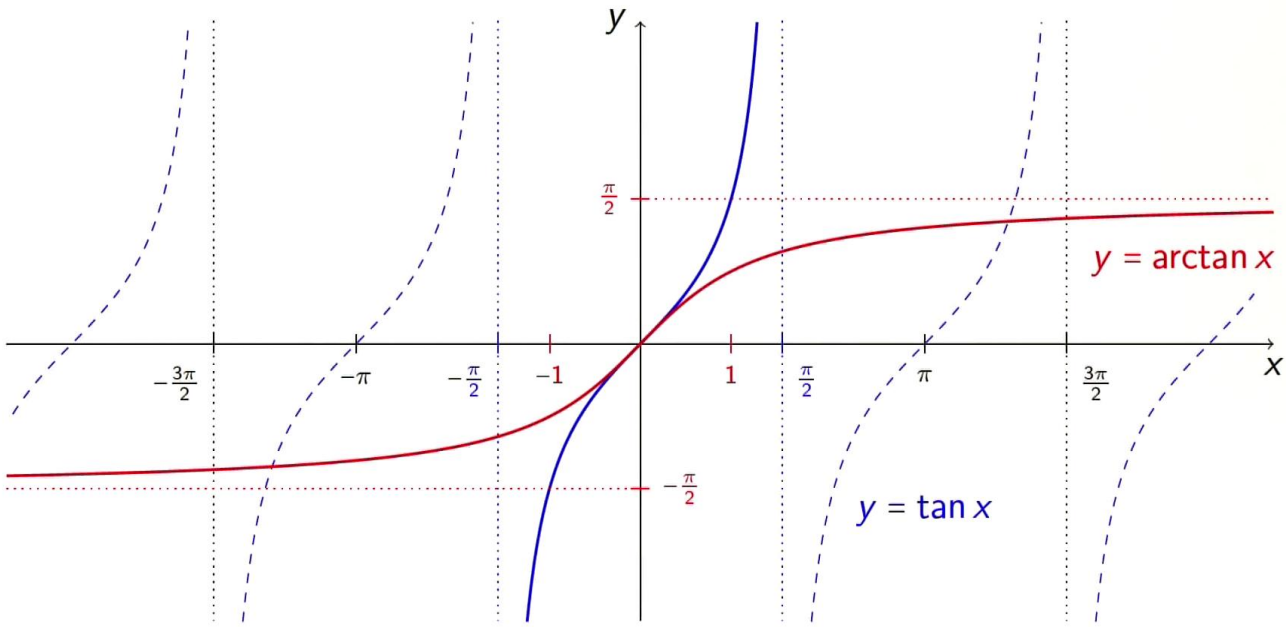
Vous avez ici la situation : je prends les bons angles entre *-π/2* et *π/2*, là j'ai le graphe de *tan(x)*, et par symétrie, ça, c'est le graphe de *arctan(x)*.

Notes

Summary

16m 42s

Rappel : la fonction arctangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On voit immédiatement que ce graphe a des asymptotes horizontales qui proviennent des asymptotes verticales.

Notes

Summary

16m 55s

Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique angle strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.

On en déduit les deux propriétés suivantes :

- $\tan\left[\arctan(x)\right] = x, \quad (x \in \mathbb{R})$,
- $\arctan\left[\tan(x)\right] = x, \quad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$, x est un bon angle pour la tangente.

Exemple

$\arctan\left[\tan(\frac{14\pi}{3})\right] = \arctan\left[\tan(5\pi - \frac{\pi}{3})\right] = \arctan\left[\tan(-\frac{\pi}{3})\right] = -\frac{\pi}{3}$.

Si l'on veut calculer la dérivée d'arctangente, on procède de façon similaire : on va se servir de ces relations, donc *tan[arctan(x)]* donne toujours *x*, cette fois-ci pour tous les *x* dans ℝ, parce que arctangente accepte toutes les valeurs réelles, on prend un angle entre *-π/2* et *π/2*; en revanche, si vous renversez l'ordre, arctangente et *tan(x)* redonnent *x* uniquement pour les bons angles, les bons angles pour tangente. On peut illustrer cette dernière ligne : par exemple, si je voulais calculer *arctan[tan(14π/3)]*, il faut faire quelque peu attention, la réponse n'est pas *14π/3* car *14π/3* n'est pas entre - *π/2* et *π/2*. Je ne change pas la valeur de tangente si j'ajoute des multiples de π. Vous pouvez aussi vous convaincre qu'en fait, *14π/3* peut être écrire comme *5π-π/3*, et donc les *5π*, je peux les rayer de *tan(5π-π/3)*, c'est donc la même chose que *tan(-π/3)*, et *-π/3* étant un bon angle, la réponse est *-π/3*. C'est simplement pour illustrer qu'une telle relation est uniquement valable pour les bons angles; vous pouvez faire des remarques similaires pour le sinus et le cosinus.

Notes

Summary

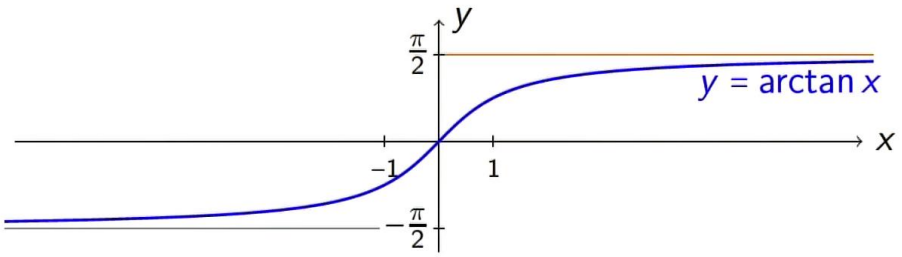
17m 08s

Dérivée de la fonction arctangente

En dérivant les deux membres de l'identité $\tan[\arctan(x)] = x, \quad (x \in \mathbb{R})$,

on obtient $(1 + \tan^2[\arctan(x)]) \cdot \dfrac{d}{dx} \arctan(x) = 1$, d'où

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + \tan^2[\arctan(x)]} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Maintenant, si l'on veut dériver arctangente, on va partir depuis la relation *tan[arctan(x)] = x*; je dérive à gauche et à droite; sur la droite j'obtiens 1, sur la gauche, tangente dérivée c'est *1 + tan²[arctan(x)]* fois la dérivée intérieure, et j'isole la dérivée intérieure. Ici, la chose est facile : *tan[arctan(x)]* donne toujours *x* donc j'ai *1/(1+x)²*; là, il n'y a pas de problème, le dénominateur n'est jamais nul, on obtient donc que la fonction arctangente est toujours dérivable et que sa dérivée est donnée par *1/(1+x²)*.

Notes

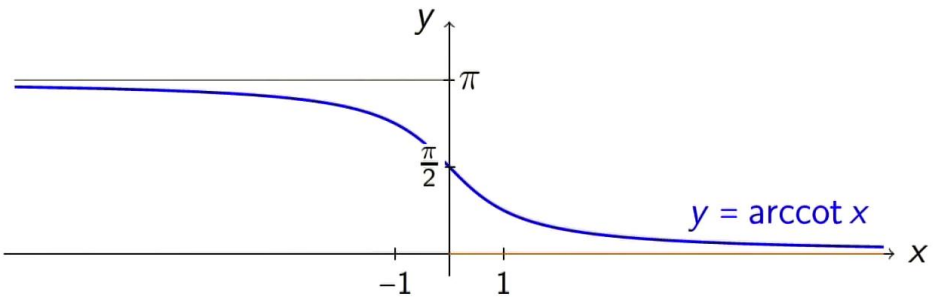
Summary

18m 22s

Dérivée de la fonction arccotangente

De façon analogue, on montre que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Je vous laisse faire le raisonnement similaire pour cotangente, comme je l'ai annoncé, et je vous laisse découvrir ce résultat, que pour arctangente, la dérivé est *-1/(1+x²)*.

Notes

Summary

19m 01s

Exemple 1

Exemple

Soit $f(x) := \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

- Calculer la dérivée de f.
- Représenter le graphe de f.
- En déduire la représentation graphique de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Illustrons encore le tout par un exemple : je vous propose de regarder cette fois-ci la somme de *arctan(x) + arctan(1/X)*. On peut admettre tous les *x* là-dedans hormis *x = 0*, à cause d'une division par zéro qu'il faut éviter ici. Je vous propose de calculer la dérivée, à l'aide de cette dérivée, de donner le graphe de la fonction *f* et aussi le graphe de la fonction *arctan(1/X)*, comme un rajout que l'on peut obtenir dès que l'on a fait les deux premiers pas.

Notes

Summary

19m 15s

Exemple 1 : solution

La fonction

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

est

- continue en tout point de $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et
- dérivable, avec

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

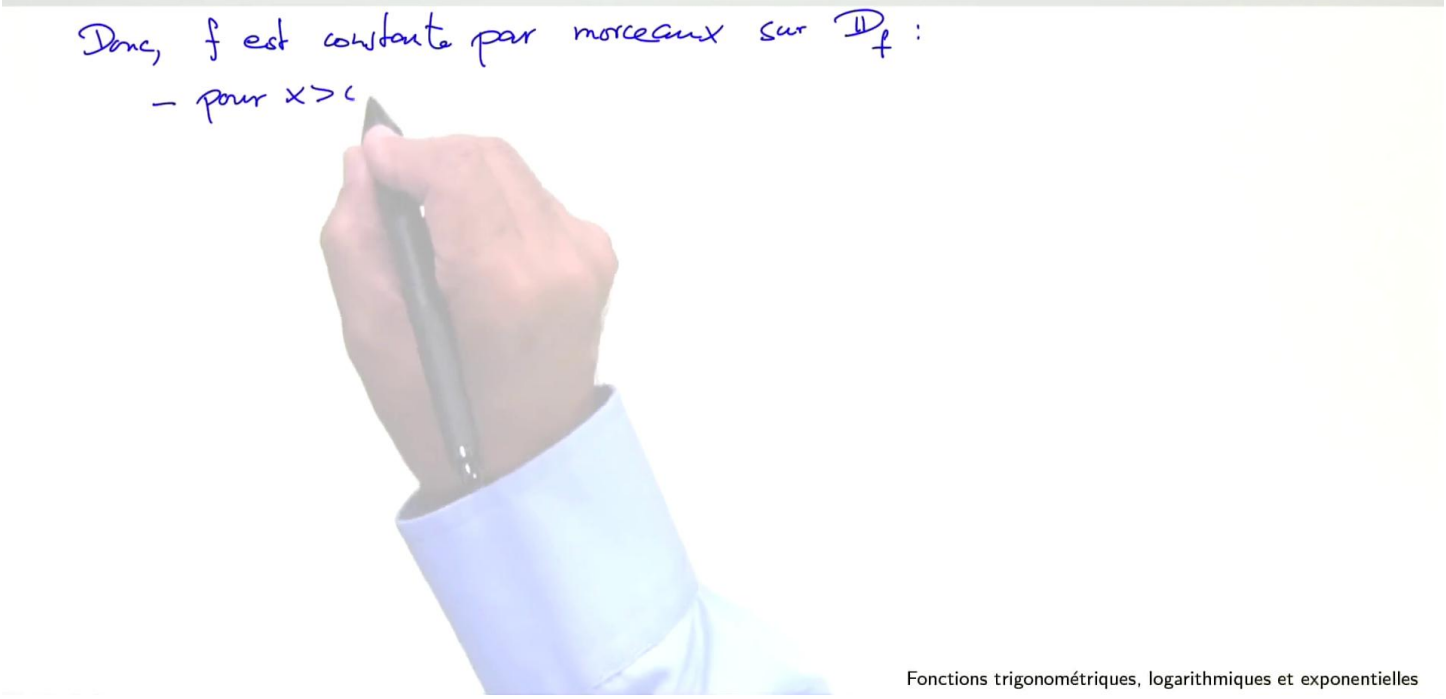
Alors, quelle est la fonction ? *f(x)* est donnée par *arctan(x)* + *arctang(1/x)*, et tous les *x* sont admissibles, sauf la valeur de *x = 0*. Cette fonction a deux propriétés : elle est continue partout et, comme deuxième propriété, cette fonction est dérivable. Calculons sa dérivée : j'ai *f'(x)*, j'ai une somme, je vais dériver terme à terme, je commence à dériver le premier terme -je vous rappelle que arctangente en dérivée donne $1/(1+x^2)$, plus, pour le deuxième terme, j'ai un arctangente bidule donc ça me fait $1/[1+(\text{bidule}^2)]$ multiplié par et il me faut dériver ce bidule, c'est-à-dire ce *(1/x)*, et la dérivée de *(1/x)* est donnée par $-1/x^2$. Simplifions quelque peu : le premier terme reste tel qu'il est; pour le deuxième je vais avoir un "-", j'aurai un 1 au numérateur, au dénominateur je vais multiplier les dénominateurs entre eux et j'obtiens donc un x^2+1, si vous regardez d'un peu plus près, vous voyez que vous allez obtenir zéro, et ça c'est vrai pour tous les *x* qui sont des nombres réels sauf le réel zéro. La dérivée existe vraiment toujours.

Notes

Summary

19m 48s

Exemple 1 : solution (suite)



De ce fait, je peux dire que la fonction *f* est constante par morceaux. Qu'est-ce que cela veut dire ? Elle est constante par morceaux sur tout son domaine de définition *Df*, donc regardons un peu : pour *x* positif, qu'est-ce que je peux obtenir ? Pour *x* positif, la fonction *f(x)* est constante, la fonction est dérivable partout pour tous les *x* positifs, sa dérivée est nulle pour tous les *x* positifs, donc je peux prendre, pour calculer cette valeur de la fonction *f(x)*, un *x* positif quelconque, je vais prendre l'endroit 1, qui s'apprête particulièrement bien, parce que là je dois calculer *arctan(1)* + *arctan(1/1)*, -le dénominateur *x* vaut 1- évidemment, ça c'est 1, j'obtiens deux fois *arctan(1)*, c'est-à-dire que j'obtiens deux fois *π/4*, donc, pour finir, j'ai *π/2*.

Notes

Summary

21m 50s

Exemple 1 : solution (suite)

Donc, f est constante par morceaux sur $\mathcal{D}_f$:

- pour $x > 0$:
$$f(x) = f(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = 2 \cdot \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$
- pour $x < 0$:
$$f(x) = f(-1) = \arctan(-1) + \arctan \frac{1}{(-1)} = -\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour *x* négatif, je procède de façon tout à fait similaire : cette fois-ci, je dis que pour calculer *f(x)* -alors, le *f(x)* a une dérivée nulle pour tous les *x* négatifs, donc la fonction *f(x)* reste constante pour tous les *x* négatifs- je choisis une valeur de *x* qui me convient bien : je vais prendre -1, c'est-à-dire que je dois calculer arctangente à l'endroit -1 et rajouter arctangente à l'endroit *1/-1* et j'obtiens donc deux fois arctangente de -1 et cela m'amène à *-π/2*. Donc, je peux formuler le résultat suivant, *f(x)* est donné par : alors, pour les *x* positifs, j'ai *π/2*, et pour les *x* négatifs, j'ai *-π/2*. Pour *x = 0*, je vous rappelle que la fonction n'était pas définie.

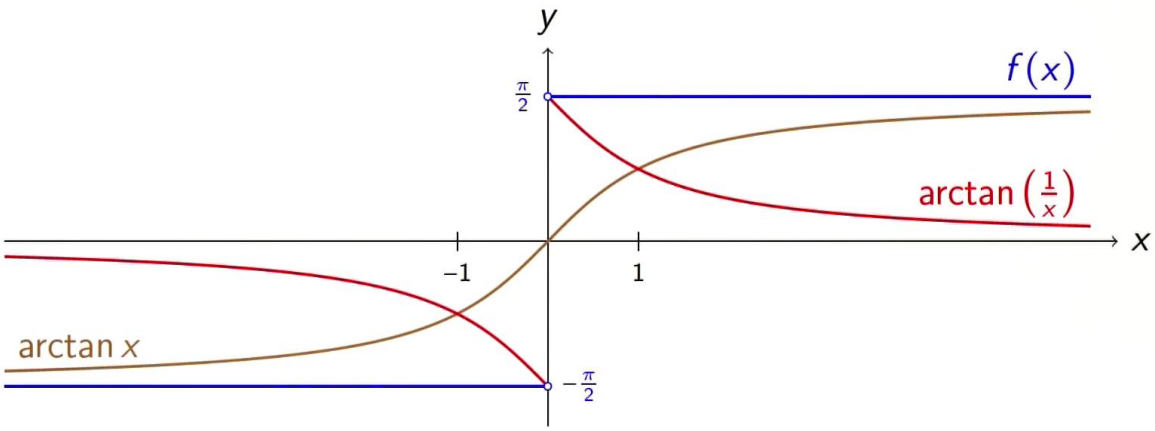
Notes

Summary

23m 05s

Exemple 1 : solution (suite et fin)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



On peut conclure de la façon suivante : si je veux dessiner le graphe de cette fonction *f*, je dois dessiner une constante *π/2* pour *x* positif et une constante *-π/2* pour *x* négatif. Si là-dedans, je regarde arctangente, qui est donnée là, je sais que la différence qui manque -regardons ça- je sais que la différence est donnée par *arctan(1/x)*, donc je sais que *arctan(1/x) + arctan(x)* donnent respectivement *π/2* et *-π/2*, donc si je résous cela par rapport à *arctan(1/x)*, j'obtiens les expressions : pour *x* positif, c'est *π/2 - arctan(x)*, pour *x* négatif, c'est *-π/2 - arctan(x)*; le graphe de *arctan(1/x)*, c'est en fait ce qui manque à *π/2*. Ici, je sais que la somme entre *arctan(x)* et *arctan(1/x)* -donc la somme entre brun et rouge- doit donner bleu, toujours. Si ici *arctan(x)* est croissante, *arctan(1/x)* doit être décroissante et lorsque arctangente s'annule, le *arctan(1/x)* doit tendre vers le *-π/2*. Alors, évidemment, *x = 0* n'est pas admissible mais à la limite, et pour le *x* positif, de façon correspondante, on peut obtenir le graphe de *arctan(1/x)* de cette façon-là.

Notes

Summary

24m 11s

Exemple 2

Exemple

Soit $f(x) := \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

- Calculer la dérivée de f.
- En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Considérons encore un deuxième exemple : cette fois-ci je vous propose de regarder la fonction *f(x)*, définie pour tous les ($x \in \mathbb{R}$), qui est donnée par arcsinus de -et nous avons l'arcsinus ici d'une fraction qui est donnée par $x/(1+x^2)$ avec une racine autour de ce dénominateur de $1+x^2$. L'expression ne pose pas de problème pour toutes les valeurs de x réelles, il n'y a jamais de division par zéro, vous pouvez réfléchir un peu au fait que le quotient est toujours situé entre -1 et 1. Nous aimerions calculer la dérivée et surtout en déduire une expression simplifiée pour *f*.

Notes

Summary

25m 33s

Exemple 2 : solution

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^2}}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

Alors, *f(x)*, je vous rappelle ce que c'est : c'est arcsinus, et c'est le arcsinus d'une fraction, *x/(√1+x²)*, le tout étant donné pour tout *x* dans ℝ. Prenons sa dérivée : j'ai arcsinus de quelque chose. D'abord, je vais simplement prendre la dérivée de arcsinus : c'est un 1 divisé par; on a une racine, avec sous la racine 1 et on a le quelque chose, au carré; c'est-à-dire que je vais avoir son numérateur, *x²*, et son dénominateur, *√1+x²*, lui aussi au carré, et je dois multiplier le tout maintenant par la dérivée du quelque chose donc, la dérivée de cette fraction. Alors, je dérive comme l'on dérive une fraction : la dérivée du numérateur multipliée par le dénominateur moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur. Le dénominateur est une racine de quelque chose, donc sa dérivée c'est *1/(2√1x²)* fois la dérivée intérieure, celle de *x²*, alors fois *2x*, et le tout doit être divisé par le dénominateur au carré, donc cette racine au carré. Immédiatement, je peux déjà simplifier ce 2.

Notes

Summary

26m 12s

Exemple 2 : solution

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^2}}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{d}{dx} \arctan x$$

Calculons un peu ce qui se passe, si vous regardez d'un peu plus près, ici, ce terme est en fait $1+x^2$, sans la racine, donc la racine et le carré vont se neutraliser, j'ai donc un 1 divisé par -je réécris ma racine, je mets le tout au même dénominateur- donc $1+x^2$, et il va me rester un $1 + x^2 - x^2$. Je multiplie; ici, je vais procéder un peu différemment. Je vais laisser la barre de fraction et je vais amplifier par cette racine $1+x^2$, donc je vais avoir un $1+x^2$ qui multiplie la racine de $1+x^2$ en amplifiant ici par racine de $1+x^2$, il va me rester simplement un $1 + x^2$ moins, et là, après amplification, il me reste un x^2. Si je regarde un peu de plus près, je peux simplifier ici des x^2, et je peux simplifier ici également des x^2. Ce qui me reste, c'est au numérateur un unique 1, et au dénominateur, si vous regardez un peu, il va rester ici un 1 sur la racine fois la racine, donc il va me rester uniquement $1/(1+x^2)$. Ce résultat, il est surprenant, il est remarquable, parce qu'en fait ce que je trouve, c'est que la dérivée de f est la même que la dérivée de $\arctan(x)$.

Notes

Summary

28m 12s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Donc, $\exists$ constant C telle que

$$f(x) = \arctan x + C \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Comme

$$f(0) = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_{x=0} = \arcsin 0 = 0 \\ \arctan x + C\Big|_{x=0} = \arctan 0 + C = C \end{cases} \Bigg\} =$$

Donc $C = 0$

et

$$f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Donc, il existe une constante, constante réelle, telle que *f(x)* est en fait *arctan(x)* plus une constante. Ces deux fonctions ont toujours la même dérivée, elles sont égales à une constante près, et ça c'est vrai pour tous les *x* dans le domaine de définition. Alors, déterminons cette constante : nous allons calculer la fonction *f* en un point donné. Je calcule *f(0)* : une fois, je vais prendre l'arcsinus de la fraction *x* divisé par la racine de $1+x^2$, et je la mets dans $x = 0$, donc j'obtiens *arcsin(0)*, et *arcsin(0)* vaut zéro. Si je prends *arctan(x) + C*, qui est une autre expression pour cette même fonction *f(x)*, et j'introduis $x = 0$ là-dedans, j'obtiens *arctan(0)*, qui vaut zéro, plus la constante, j'obtiens donc la constante, mais il est clair que je dois obtenir deux fois le même résultat, et cela me permet de conclure que la constante *C* est en réalité nulle. Je peux donc écrire que *f(x)*, qui est en fait le sinus de $x/\sqrt{1+x^2}$, ce n'est rien d'autre que *arctan(x)*, et cela est vrai pour tous les *x* dans $\mathbb{R}$.

Notes

Summary

30m 10s

Dérivabilité

Un grand merci d'avoir suivi ce huitième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Voilà, nous arrivons ainsi au terme de ce chapitre 8, c'est en même temps le dernier chapitre sur les fonctions trigonométriques, je vous remercie d'avoir suivi ce huitième chapitre, je vous félicite : vous avez fait un grand chemin à travers ces 8 chapitres, un grand chemin à travers la trigonométrie. Je remercie également mes collaborateurs qui soutiennent ce projet : un grand merci à Guido Burmeister, à Roger Sauser et à Olivier Woringer. Je vous retrouve la prochaine fois pour parler de fonctions exponentielles et logarithmiques. A bientôt !

Notes

Summary

32m 14s