ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Continuité et dérivabilité des fonctions trigonométriques

8.3 Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Composée de deux fonctions

Soient deux fonctions

$$f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto f(x) \qquad \text{et} \qquad g:\ J \to \mathbb{R},\quad x \mapsto g(x)\,,$$

avec $f(I) \subset J$.

On considère la fonction composée

$$g \circ f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right).$$

Guten Tag. Das letzte Mal haben wir die Ableitungen der Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens festgelegt. Heute werden wir das gleiche tun, diesmal allerdings mit den trigonometrischen Umkehrfunktionen. Um dies zu tun, erinnern wir zuerst daran, was man unter Zusammensetzung von zwei Funktionen versteht. Ich betrachte eine erste Funktion *f*, die durch eine Menge *I* definiert ist, eine Untermenge von realen Zahlen in ℝ, die *x* in *f(x)* umwandelt, und ich habe eine zweite Funktion *g*, die ihrerseits durch eine Menge *J* definiert ist und *x* in *g(x)* umwandelt. Nehmen wir an, dass wenn ich einen Wert von *x* nehme, der in *I* ist, und ich *f(x)* berechne, sich das Resultat in *J* befindet, also im Bereich der Funktion *g*. In diesem Fall kann man diese beiden Funktionen bilden: Man erhält also eine Funktion, die man hier mit *g* rund (*o*) *f* bezeichnen kann, - ich schlage den Studenten oft vor, zu sagen, dass es "*g* nach *f*" ist, und somit dieses kleine rund wie ein "nach" zu lesen, das ein *I* in ℝ umwandelt - und auf die folgende Art, nehme ich *x*, ich berechne zuerst *f(x)*, und auf das Resultat wende ich *g* an.

Notes

Summary

0m 04s

Composée de deux fonctions

Soient deux fonctions

$$f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto f(x) \qquad \text{et} \qquad g:\ J \to \mathbb{R},\quad x \mapsto g(x)\,,$$

avec $f(I) \subset J$.

On considère la fonction composée

$$g \circ f:\ I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right).$$

Man muss sich gut merken, dass wir von links nach rechts schreiben, und da, in dieser Zuordnung schreiben wir zuerst die Funktion, die an zweiter Stelle agiert, nicht an erster Stelle; die Reihenfolge ist sozusagen umgekehrt, und deshalb befindet sich *g* nach *f*.

Notes

Summary

1m 19s

Dérivée de la composée de deux fonctions

Soient

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right)$$

et x un point situé à l'intérieur de I.

Supposons que

- la fonction f soit dérivable en x et que
- la fonction g soit dérivable en $f(x)$.

Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x et on a

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x).}$$

Wenn ich in dieser Situation einen Punkt *x* nehme, der innerhalb des Bereichs von *I* liegt, nehme ich an, dass die zwei Funktionen *f* und *g* ableitbar sind - um genauer zu sein, ich nehme an, dass *f* nach *x* abgeleitet werden kann, und wenn ich *f(x)* berechne, nehme ich an, dass ich einen Punkt finde, der sich innerhalb von *J* befindet, und die Funktion *g* ist also in diesem Punkt *f(x)* ableitbar. Wenn ich jede Etappe habe, die ableitbar ist, dann ist die Komponente ebenfalls ableitbar; ich kann die Ableitung der Komponente wie folgt berechnen: ich nehme *g'* an der Stelle *f(x)*, und ich multipliziere mit *f'(x)*. Um sich das zu merken, kann man Folgendes sagen: Die Ableitung von *g(x)*, ist *g'(x)*, und wenn ich die Ableitung von *g* nehme, nicht von *x*, sondern von etwas - sagen wir "einem Ding", *g[f(Ding)]* -, habe ich *g'[f(µDing)]*. *f'(Ding)*.

Notes

Summary

1m 38s

Exemples

- $\frac{d}{dx}\sin\left[f(x)\right] = \cos\left[f(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\cos\left[f(x)\right] = -\sin\left[f(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\tan\left[f(x)\right] = (1 + \tan^2\left[f(x)\right]) \cdot \frac{d}{dx} f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\sin\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)$

Wenden wir diese Regel *f(Ding)*; *f'(Ding)* hier einmal an: Also, ich habe die Ableitung von *sin[f(x)]*, und um abzuleiten, tue ich so, als wäre da einfach nur *sin(x)*; ich schreibe *cos [f(x)]* und multipliziere mit der inneren Ableitung *f'(x)*. Für Kosinus von *f(x)* ist es das Gleiche: Ich leite erst Kosinus ab, was einfach *-sin [f(x)]* ergibt, und ich multipliziere mit der inneren Ableitung *f'(x)*. Für Tangens noch einmal das Gleiche: Ich leite Tangens ab. Da ist die Situation vielleicht nicht so einfach bei der Zuordnung, denn die Ableitung von Tangens ist *1+tan²*. Man muss also wirklich *1 + tan² [f(x)]* nehmen, aber man muss die ganze Summe mit der inneren Ableitung *f'(x)* multiplizieren. Schließen wir mit einem anderen Beispiel ab: Ich habe Sinus von Kosinus von *tan(x)*; ich habe also tatsächlich drei Etappen: Ich habe Sinus, der nach Kosinus agiert, der wiederum nach Tangens fungiert. Man kann das mit der Regel ableiten, die wir soeben formuliert haben: Ich habe hier Sinus von irgendetwas, also leite ich Sinus ab, was Kosinus ergibt, und ich habe Kosinus von etwas mal irgendetwas Strich: die innere Ableitung.

Notes

Summary

2m 38s

Exemples

- $\frac{d}{dx}\sin\left[f(x)\right] = \cos\left[f(x)\right]\cdot\frac{d}{dx}f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\cos\left[f(x)\right] = -\sin\left[f(x)\right]\cdot\frac{d}{dx}f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\tan\left[f(x)\right] = \left(1+\tan^2\left[f(x)\right]\right)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\,,$
- $\frac{d}{dx}\sin\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right) = \cos\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)$
  $= \cos\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\left(-\sin\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\frac{d}{dx}\tan(x)$
  $= -\cos\left(\cos\left[\tan(x)\right]\right)\cdot\sin\left[\tan(x)\right]\cdot\left[1+\tan^2(x)\right].$

Für die innere Ableitung nehme ich die gleiche Regel: Ich habe Kosinus von etwas; ich habe *cos(cos[tan(x)])*, den ich bereits hatte, und für die Ableitung von Kosinus hier habe ich *-sin* an der Stelle von Tangens, multipliziert mit der Ableitung von Tangens, und die Ableitung von Tangens ist *1+tan²*, man erhält also diesen großen Term, den Sie hier am Ende der Seite entdecken.

Notes

Summary

3m 44s

Dérivée d'une fonction inverse

Soit $f: A \to B$, une fonction bijective et dérivable. La fonction réciproque

$$f^{-1}: B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

vérifie la relation suivante

$$f\left[f^{-1}(x)\right] \equiv x, \qquad (x \in B).$$

En dérivant cette identité par rapport à x, à l'aide de la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$f'\left[f^{-1}(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}, \qquad f'\left[f^{-1}(x)\right] \neq 0.$$

Wir können die Funktionen zusammensetzen, also wenden wir jetzt diese Zusammensetzung von Funktionen auf eine Situation an, in der ich eine Funktion habe, die bijektiv ist, eine Funktion, die von einer Menge *A* zu einer Menge *B* geht, wobei *A* und *B* typische Untermengen von realen Zahlen sind. Wir vermuten, dass sie bijektiv und ableitbar ist. Ich kann zur Umkehrfunktion gehen, das heißt die Funktion, die von *B* nach *A* geht, also nicht wie *f : A → B*, sondern von *B → A*, und die *x* in *f-1(x)* umwandelt; also, wir wissen, dass in diesem Fall, wenn ich ein *x* nehme, ich darauf zuerst die Umkehrfunktion anwende und anschließend die Funktion, ich *x* erhalte, und das ist wahr für alle *x* in *B*. Man kann diese Relation im Vergleich zu *x* ableiten; man kann getrennt links und rechts ableiten, und man sollte zweimal das gleiche Ergebnis erhalten. Die Ableitung von *x* ist einfach: Wenn ich *x* ableite, erhalte ich ganz einfach 1; was interessanter ist, ist das Ableiten auf der linken Seite. Ich habe *f(Ding)*, was *f'(Ding). Ding'* ergibt, also *f'* an der Stelle *f-1(x)* multipliziert mit der Ableitung von *f-1(x)*.

Notes

Summary

4m 04s

Dérivée d'une fonction inverse

Soit $f: A \to B$, une fonction bijective et dérivable. La fonction réciproque

$$f^{-1}: B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

vérifie la relation suivante

$$f\left[f^{-1}(x)\right] \equiv x, \qquad (x \in B).$$

En dérivant cette identité par rapport à x, à l'aide de la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$f'\left[f^{-1}(x)\right] \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \equiv \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}, \qquad f'\left[f^{-1}(x)\right] \neq 0.$$

Ich kann diese Ableitung jetzt von der Umkehrfunktion isolieren und erhalte 1 auf *f'* an der Stelle *[f-1(x)]*. Das funktioniert unter der Bedingung, dass nicht durch Null geteilt wird. Was bemerkenswert ist, ist dass das, was ich berechne, legitim ist.

Notes

Summary

5m 12s

Dérivée d'une fonction inverse

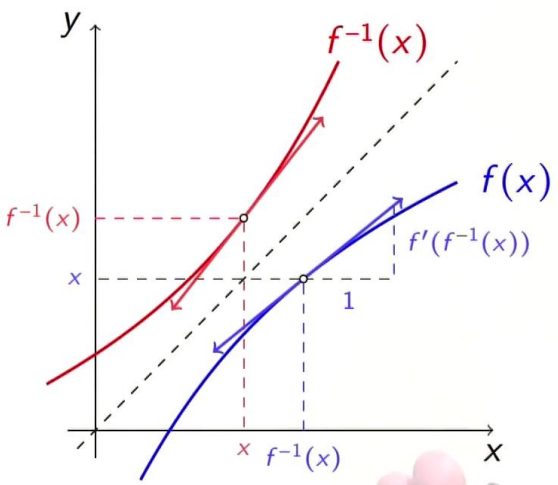
Proposition

Soit $f : A \to B$, *une fonction bijective et dérivable.*

La fonction réciproque

$$f^{-1} : B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

est dérivable



Formulieren wir dies in einem Satz: Wenn ich eine bijetive und ableitbare Funktion *f* habe, die von *A* nach*B* geht, dann ist die Umkehrfunktion auch ableitbar. Hier im Graphen sieht man die Funktion *f(x)*, und *f-1(x)*; man erhält die eine von der anderen, aufgrund der Achssymmetrie *y = x*. Hier stelle ich mich an einen Punkt *x*; für die Funktion *f-1* erhalte ich hier den Wert *f-1(x)*. Ich kann diesen Wert *f-1(x)* auch horizontal nehmen, was wir hier tun, und wenn ich von *f-1(x)* aus gehe, gibt mir die Funktion *f* wieder *x*. Im Graphen finden Sie auch die Tangenten der Kurven an den entsprechenden Punkten. Schauen wir uns einmal die Steigung der Funktion *f* an: Wir gehen eine Einheit horizontal und vertikal; also finde ich vertikal die Ableitung von *f* wieder, also *f'*, und an der Stelle hier *f-1(x)*. Dieser Quotient, also eigentlich diese Differenz hier, diese Länge mit Vorzeichen, gibt die Ableitung von *f*. Durch Symmetrie, denn wenn Sie die Symmetrie der Achse *y = x* vornehmen, werden die Tangenten durch diese Symmetrie umgewandelt und auch diese Stützdreiecke hier.

Notes

Summary

5m 31s

Dérivée d'une fonction inverse

Proposition

Soit $f : A \to B$, *une fonction bijective et dérivable.*

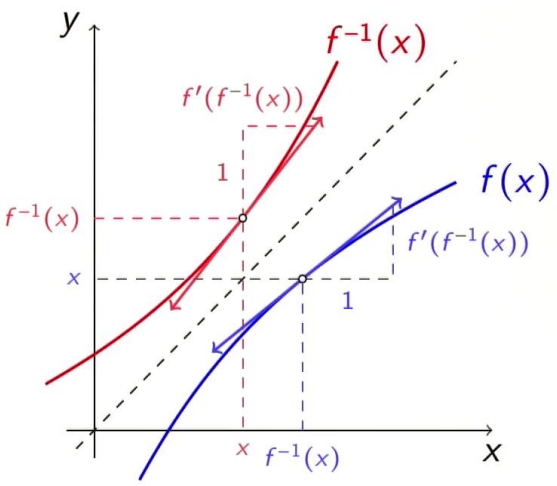
La fonction réciproque

$$f^{-1} : B \to A, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

est dérivable et

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}, \quad \left(x \in \mathbf{D}_{(f^{-1})'}\right)$$

$$\mathbf{D}_{(f^{-1})'} = \left\{x \in B \,\middle|\, f'\left[f^{-1}(x)\right] \neq 0\right\}.$$



Sie haben hier die 1 vertikal und horizontal haben Sie diesmal *f'* de *f-1(x)*. Die Steigung der Funktion in rot ist gegeben durch vertikale Differenz, die 1 wert ist, geteilt durch die Horizontale; ich habe also *1/f'* an der Stelle *f-1(x)*. Der Graph, die Zeichnung kann absolut für Demonstrationen genutzt werden, und das Ganze funktioniert gut, solange man nicht durch Null teilt.

Notes

Summary

7m 08s

Rappel : la fonction arcsinus

La fonction

$$\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin x$$

est une fonction bijective et continue.

On note arcsin sa fonction réciproque

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin x.$$

Tout comme le sinus, elle est continue.

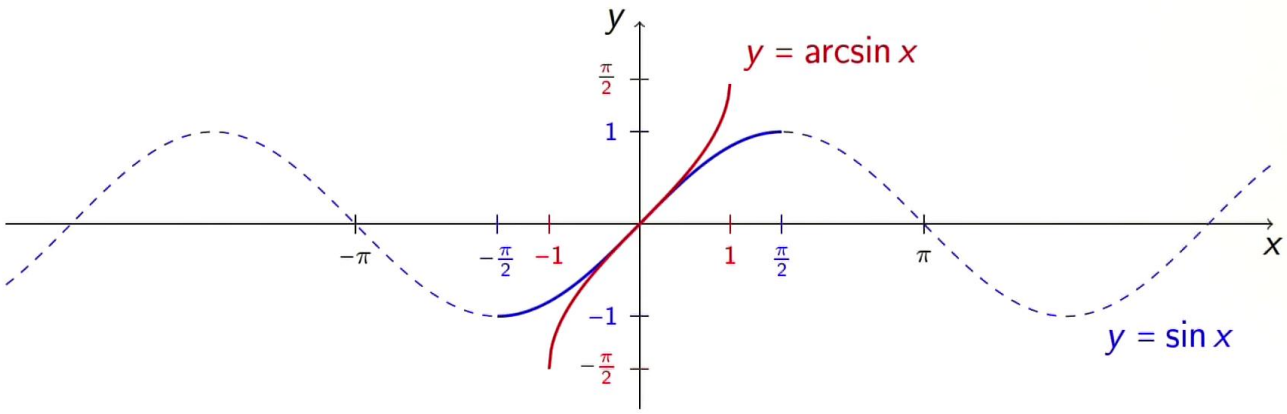
Wenden wir dies nun auf die trigonometrischen Umkehrfunktionen an, das heißt, dass wir mit der ersten beginnen werden, mit der Funktion Arkussinus, und ich beginne mit einer Erinnerung. Die Funktion Sinus kann eingeschränkt sein: wir haben entschieden, sie auf einen Bereich einzuschränken, der von *-π/2* bis *π/2* geht, wir hatten dies "die guten Winkel für Sinus" genannt. Wir wissen, dass wir es mit einer bijektiven Funktion zu tun haben, die diesen Intervall *-π/2; π/2* auf den Intervall *-1; 1* umwandelt, und das ist die Umkehrfunktion, die Arkussinus heißt. Sinus ist stetig und die Umkehrfunktion deshalb auch.

Notes

Summary

7m 40s

Rappel : la fonction arcsinus



Sie haben hier den Graphen von Sinus: Sie haben hier den ausgewählten Bereich für die guten Winkel, also von *-π/2* bis *π/2*, und man sieht sehr gut, dass da jeder Wert von *y* zwischen -1 und 1 exakt einmal genommen wird, und wenn sie die entsprechende Symmetrieachse *y = x* nehmen, erhalten Sie durch Symmetrie den Graphen *y = arcsin(x)*.

Notes

Summary

8m 24s

Propriétés

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

Ich erinnere Sie daran, dass *arcsin(x)* für alle *x* zwischen -1 und 1, der einzig enthaltene Winkel ist zwischen *-π/2* und *π/2*, das heißt, der einzige gute Winkel, von dem Sinus genau *x* wert ist.

Notes

Summary

8m 49s

Propriétés

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

On en déduit les deux propriétés suivantes :

- $\sin[\arcsin(x)] = x, \quad (x \in [-1, 1])$,
- $\arcsin[\sin(x)] = x, \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, x est un bon angle pour le sinus.

D'autre part, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

- $\cos\underbrace{[\arcsin(x)]}_{\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} = +\sqrt{1 - \sin^2[\arcsin(x)]} = \sqrt{1 - x^2}$.

Wenn ich Sinus von *arcsin(x)* nehme, habe ich *x*; da nehme ich irgendein *x* zwischen -1 und 1, mit Arkussinus von *sin(x)*, ich erhalte noch einmal *x*, vorausgesetzt, man nimmt einen guten Winkel. Wir werden ein Zwischenergebnis benötigen im Laufe der Berechnungen, und wir werden uns den Term von Kosinus von *arcsin(x)* genauer anschauen müssen; schauen Sie, Sinus von *arcsin(x)* stellt kein Problem dar, aber wenn ich Kosinus von *arcsin(x)* nehme, bedeutet dies, dass ich einen Winkel kenne, *arcsin(x)* ist ein Winkel, sagen wir *α*, was ich von *α* kenne, ist sein Sinus, der durch *x* gegeben ist, aber ich benötige seinen Kosinus. Um Kosinus zu erhalten, kann man natürlich *1-sin²* von diesem Winkel aus betrachten, dann erhalte ich *cos²*; wenn ich die Wurzel nehme, erhalte ich meinen Kosinus als absoluten Wert, das Problem ist, dass man sich entscheiden muss, ob er positiv oder negativ sein wird. Schauen Sie, Arkussinus gibt einen Winkel zwischen *-π/2* und *π/2*, wir haben das hier notiert, und deshalb muss Kosinus positiv sein, also kann ich schreiben *+√1-sin²*, das heißt *√1-x²*, mit einem + vor der Wurzel.

Notes

Summary

9m 01s

Dérivée de la fonction arcsinus

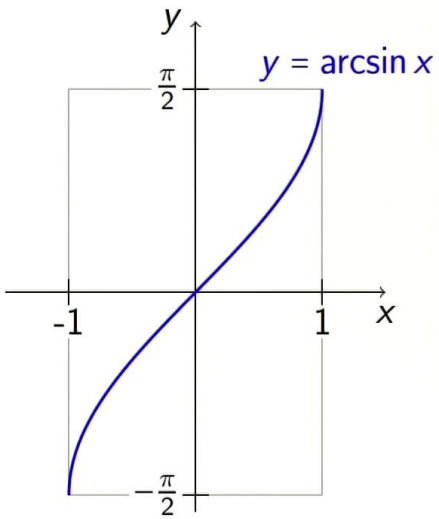
En dérivant les deux membres de l'identité

$$\sin\left[\arcsin(x)\right] = x\,, \quad (x \in [-1\,,\,1])\,,$$

on obtient

$$\cos\left[\arcsin(x)\right] \cdot \frac{d}{dx}\arcsin(x) = 1\,, \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\cos\left[\arcsin(x)\right]} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad (x \in]-1\,,\,1[)\,.$$



Mit diesem Zwischenergebnis können wir versuchen, die Ableitung von Arkussinus zu finden. Wir werden diese Gleichheit nutzen, mit *sin[arcsin(x)] = x*, für alle annehmbaren *x*, das heißt zwischen -1 und 1; Sie haben hier den Graphen von Arkussinus, von dem ich gern die Ableitung kennen würde. Wenn ich die Ableitung links und rechts nehme, erhalte ich hier einen abgeleiteten Sinus, ergibt Kosinus irgendetwas, also multipliziert mit irgendetwas Strich, und das ergibt, wenn ich von der anderen Seite ableite, 1, also kann ich diese Ableitung von Arkussinus isolieren und ich erhalte *1/cos[arcsin(x)]*, und diesen Nenner haben wir soeben analysiert, und er ist $\sqrt{1-x^2}$ wert. All das funktioniert gut, außer wenn sich der Nenner auflöst, und ich sehe, dass sich der Nenner für *x = -1; 1* auflösen wird. Wenn ich mir ein wenig den Graphen von Arkussinus anschaue, der durch Symmetrie ab Sinus erhalten wird, sieht man sehr gut, dass ich für *x = -1* und *x = 1*, vertikale Tangens habe; da gibt es keine existierende Ableitung, aber für alle anderen Werte haben wir den Wert der Ableitung gefunden.

Notes

Summary

10m 15s

Rappel : la fonction arccosinus

La fonction

$$\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos x$$

est une fonction bijective et continue.

On note arccos sa fonction réciproque

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x.$$

Tout comme le cosinus, elle est continue.

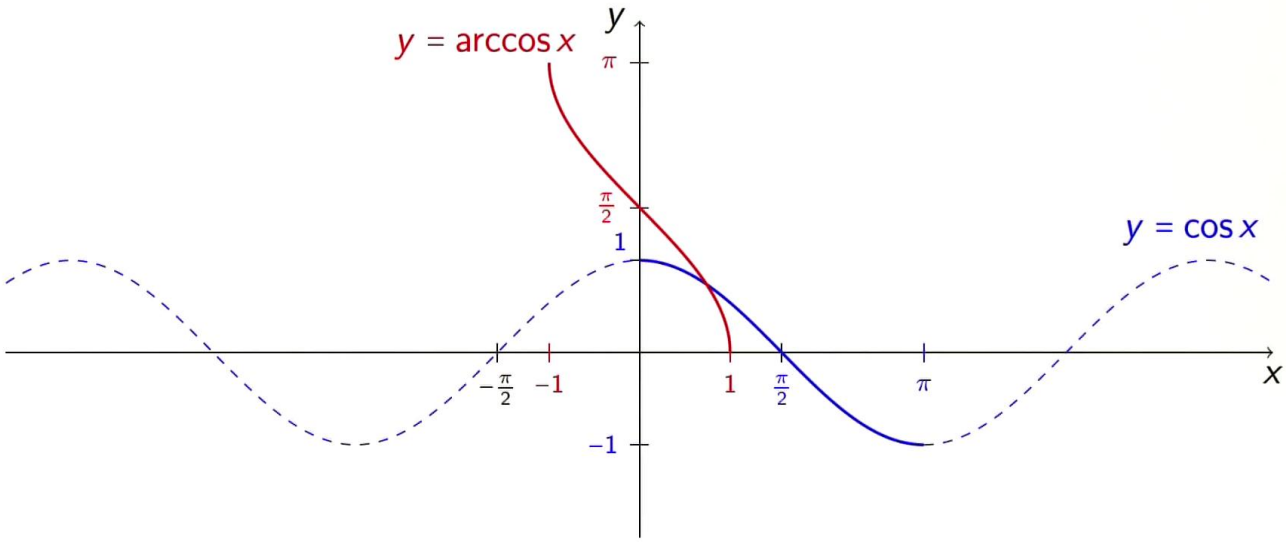
Für Kosinus verfahren wir auf die gleiche Art und Weise: da nehmen wir erneut eine Einschränkung vom Kosinus - man muss auf die guten Winkel für Kosinus einschränken. Wir haben diese Situation vor Kurzem analysiert, wir wissen, dass wir zwischen 0 und π wählen müssen, das ist die Vereinbarung, die getroffen wurde. Da haben Sie eine bijektive Funktion, und die Umkehrfunktion heißt Arkuskosinus.

Notes

Summary

11m 24s

Rappel : la fonction arccosinus



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Beide Funktionen sind erneut stetig. Da der Kosinus: diesmal die guten Winkel zwischen 0 und π, und da haben Sie die Einschränkung von Kosinus und mit der Symmetrie erhalten Sie den Graphen der Umkehrfunktion *arccos(x)*.

Notes

Summary

11m 48s

Propriétés

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus vaut x.

On en déduit les deux propriétés suivantes :

- $\cos[\arccos(x)] = x, \quad (x \in [-1, 1])$,
- $\arccos[\cos(x)] = x, \quad (x \in [0, \pi])$, x est un bon angle pour le cosinus.

D'autre part, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

- $\sin\underbrace{[\arccos(x)]}_{\in [0,\pi]} = +\sqrt{1 - \cos^2[\arccos(x)]} = \sqrt{1 - x^2}$.

Wir haben erneut die gleichen Anmerkungen für Kosinus aufdrängen: Wenn Sie Kosinus von *arccos(x)* nehmen, finden Sie *x* für alle zulässigen *x*, das heißt zwischen -1 und 1, und wenn Sie die Reihenfolge umkehren, wenn Sie Arkuskosinus von *cos(x)* haben möchten, finden Sie *x*, sofern der Winkel *x* ein guter Winkel für Kosinus ist, das heißt enthalten zwischen 0 und π. Wir müssen uns erneut mit einem etwas kuriosen Term beschäftigen, anstelle des Ergebnisses *cos[arccos(x)]* habe ich diesmal *sin[arccos(x)]*. Das Argument ist absolut das gleiche: *arccos(x)* liegt zwischen 0 und π, also ist Sinus positiv, und ich kann $+\sqrt{1-cos^2}$ nehmen, um hier unter der Wurzel sin^2 zu haben. Also erhalte ich die Wurzel von $\sqrt{1-x^2}$.

Notes

Summary

12m 05s

Dérivée de la fonction arccosinus

En dérivant les deux membres de l'identité

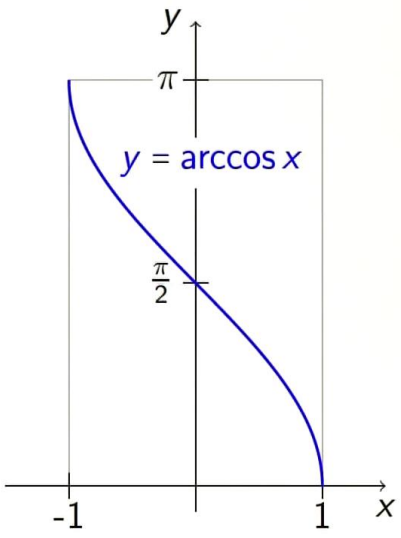
$$\cos\left[\arccos(x)\right] = x\,, \quad (x \in [-1\,,\,1])\,,$$

on obtient

$$-\sin\left[\arccos(x)\right] \cdot \frac{d}{dx}\arccos(x) = 1\,, \quad \text{d'où}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sin\left[\arccos(x)\right]}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad (x \in]-1\,,\,1[)\,.$$



Wenn ich von dieser Identität ausgehe, dass *cos[arccos(x)]* immer *x* ergibt, für *x* zwischen -1 und 1, wenn ich sie ableite, ergibt Kosinus -*sin[arccos(x)]* mal der inneren Ableitung, die Ableitung von *arccos(x)* ergibt und wenn ich rechts ableite, ergibt das 1. Ich isoliere diese Ableitung von *arccos(x)* und ich erhalte "-", dieser hier, *1/sin[arccos(x)]*, und wir haben den Nenner identifiziert als die Wurzel von $1\text{-}x^2$. Erneut, wenn *x* ±1 wert ist, existiert die Ableitung nicht; wenn Sie sich den Graphen von Arkuskosinus anschauen, sehen Sie genau, dass wenn *x* -1 oder 1 wert ist, da haben Sie zweimal einen vertikalen Tangens, also gibt es keine Ableitung.

Notes

Summary

12m 51s

Remarque

Pour tout $x \in]-1,1[$, les dérivées des fonctions $\arcsin x$ et $\arccos x$ sont opposées :

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On en déduit que la dérivée de la fonction $f(x) := \arcsin x + \arccos x$ est nulle :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\arcsin x + \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad (x \in]-1,1[).$$

Or f est continue sur $[-1,1]$, elle est donc constante sur cet intervalle :

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad (x \in [-1,1]).$$

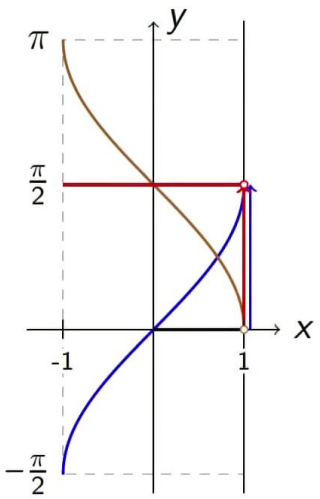
Eine Anmerkung ist hier zu machen, wenn Sie sich die Ergebnisse anschauen, die wir gerade erhalten haben: die Ableitung von Arkussinus ist *1/√(1-x²)*, die von Arkuskosinus ist fast die gleiche. Es ist das gleiche Ergebnis, bis auf das Vorzeichen. Wenn ich die Summe von Arkussinus und Arkuskosinus machen und diese ableite, - leiten wir diese Summe ab, wir werden sie Schritt für Schritt ableiten - erhalte ich die Ableitung von Arkussinus plus die Ableitung von Arkuskosinus, was "-" ergibt, das gleiche, also erhalte ich immer Null. Es stimmt, dass die Funktion *arcsin(x) + arccos(x)* für alle zwischen -1 und 1 enthaltenen *x* definiert ist, einschließlich des Randes, und für alle *x* zwischen -1 und 1 ohne den Rand löst sich die Ableitung auf. Da aber die Funktion *f* überall stetig ist, auf dem geschlossenen Intervall inklusive der Ränder, bleibt diese Funktion auf dem gesamten geschlossenen Intervall konstant. *arcsin(x) + arccos(x)* ist immer eine Konstante wert, aber welche? Ich berechne einfach den Wert dieser Summe an irgendeinem Punkt, ich werde einen angenehmen Punkt wählen: Ich nehme *x= 0*, und wenn Sie *f* an der Stelle Null berechnen, haben Sie *arcsin0 + arccos0 = π/2*, also hat die Funktion *f(x)* eigentlich immer den Wert *π/2*.

Notes

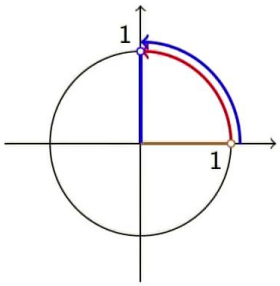
Summary

13m 42s

Illustration



$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (x \in [-1,1]).$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Sie können das auf dem Funktionsgraphen überprüfen, auf dem trigonometrischen Kreis, Sie können das immer am Ort *arcsin(x) + arccos(x) = π/2* prüfen, für alle *x* zwischen -1 und 1. Sehen Sie, auf dem Graphen haben Sie hier die Graphen von Arkussinus und von Arkuskosinus; wenn Sie sich an einen Punkt *x* stellen, nehmen Sie den Wert vom einen plus dem Wert des anderen, und das ergibt als Summe immer *π/2*. Man kann *x* ein wenig ändern: Man sieht, dass dort der braune kleiner wird, der blaue ist negativ, größer, die Summe bleibt konstant. Sie können dies ebenfalls auf dem trigonometrischen Kreis überprüfen: dort zum Beispiel, le *x* ist ein wenig positiv, wenn ich also hier Arkussinus nehme, ist *x* leicht positiv, der Bogen ist in blau hier, und für Arkuskosinus ist Kosinus leicht positiv, es ist der gleiche *x*, er ist hier in braun, und die Summe zwischen blau und braun ergibt immer wieder *π/2* in rot.

Notes

Summary

15m 06s

Rappel : la fonction arctangente

La fonction

$$\tan\Big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \ ]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x$$

est une fonction bijective et continue.

On note arctan sa fonction réciproque

$$\arctan : \ \mathbb{R} \to \ ]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\ , \quad x \mapsto \arctan x.$$

Tout comme la fonction $\tan\Big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, elle est continue.

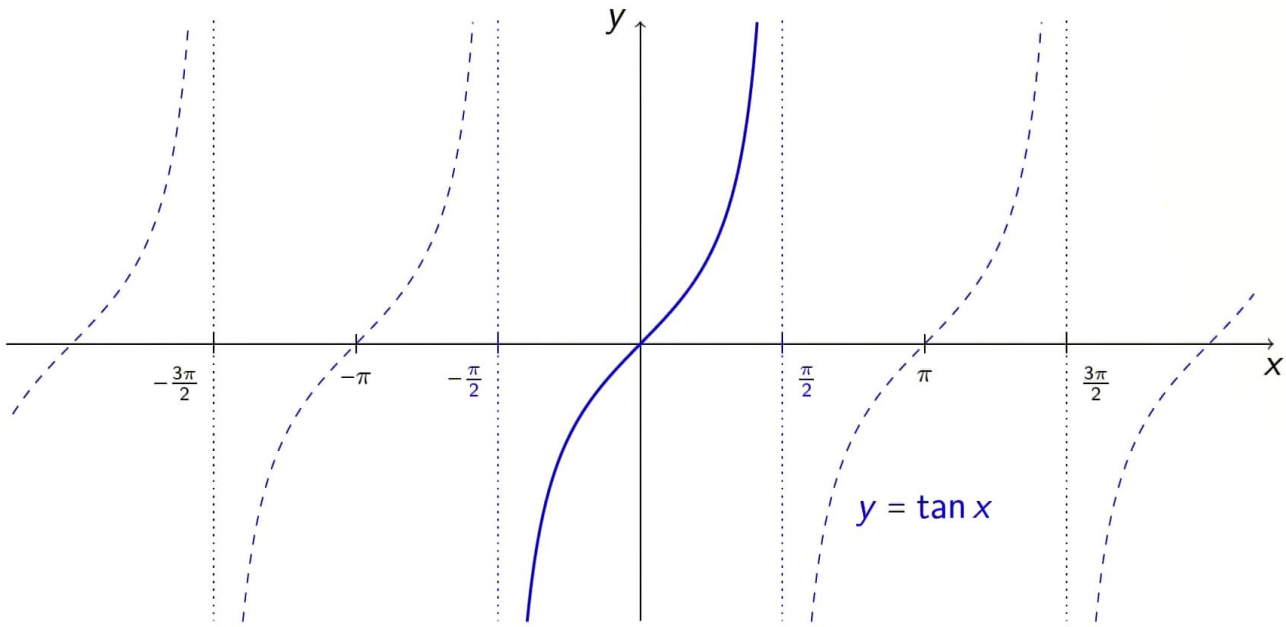
Wir haben die Arbeit für Sinus und Kosinus gemacht, machen wir auf gleiche Art und Weise für Tangens und Kotangens weiter: Wir werden Kotangens auslassen, aber für Tangens werden wir die Arbeit machen; wir überlassen es Ihnen, sich die Arbeit für Kotangens zu machen, wenn Sie es möchten. Da, für Tangens, müssen wir eine Einschränkung nehmen zwischen *-π/2* und *π/2*, ohne die Ränder, das sind also die guten Winkel für Tangens, und dann ist die Umkehrfunktion genau Arkustangens.

Notes

Summary

16m 13s

Rappel : la fonction arctangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

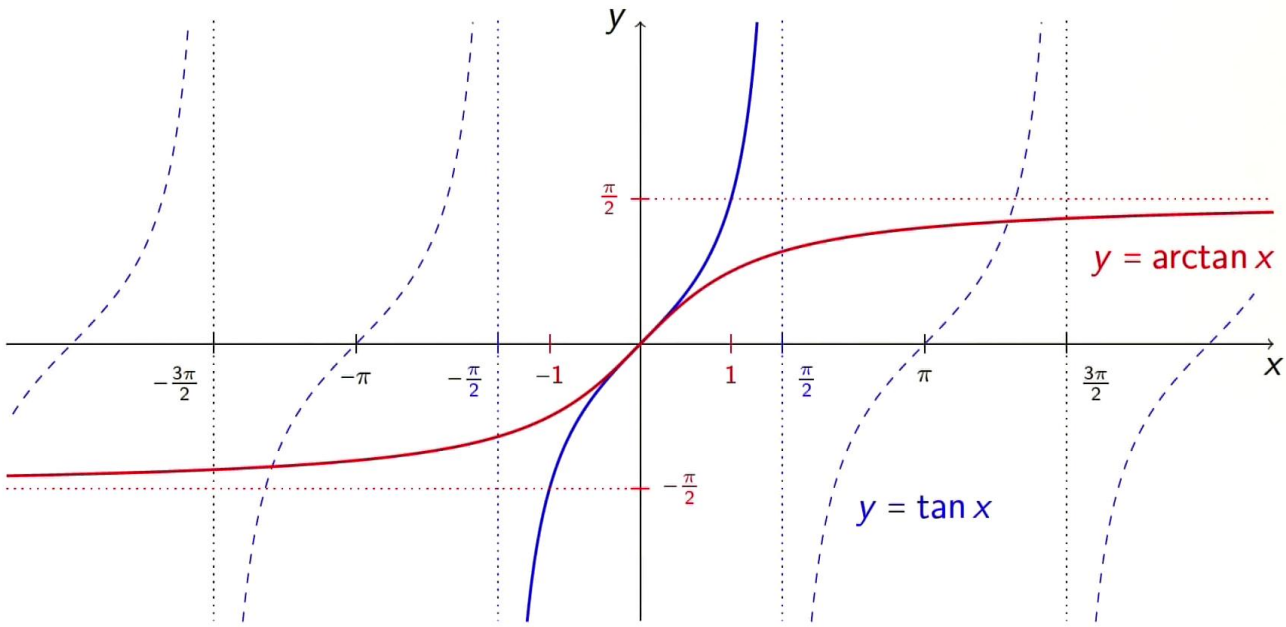
Sie haben die Situation hier: Ich nehme die guten Winkel zwischen *-π/2* und *π/2*, da habe ich den Graphen von *tan(x)*, und durch Symmetrie, das hier, das ist der Graph von *arctan(x)*.

Notes

Summary

16m 42s

Rappel : la fonction arctangente



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Man sieht sofort, dass der Graph horizontale Asymptoten hat, die von den vertikalen Asymptoten kommen.

Notes

Summary

16m 55s

Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique angle strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.

On en déduit les deux propriétés suivantes :

- $\tan\left[\arctan(x)\right] = x, \quad (x \in \mathbb{R})$,
- $\arctan\left[\tan(x)\right] = x, \quad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$, x est un bon angle pour la tangente.

Exemple

$\arctan\left[\tan(\frac{14\pi}{3})\right] = \arctan\left[\tan(5\pi - \frac{\pi}{3})\right] = \arctan\left[\tan(-\frac{\pi}{3})\right] = -\frac{\pi}{3}$.

Wenn man die Ableitung von Arkustangens berechnen möchte, gehen wir genauso vor: Wir werden diese Relationen nutzen, also *tan[arctan(x)]* ergibt immer *x*, diesmal für alle *x* in ℝ, weil Arkustangens alle reellen Werte akzeptiert, wir nehmen einen Winkel zwischen *-π/2* und *π/2*; wenn Sie aber die Reihenfolge umkehren, ergeben Arkustangens und *tan(x)* gleich *x* nur für die guten Winkel, die guten Winkel für Tangens. Wir können diese letzte Linie illustrieren: wenn ich zum Beispiel *arctan[tan(14π/3)]* berechnen wollte, muss man ein wenig aufpassen, das Ergebnis ist nicht *14π/3*, denn *14π/3* liegt nicht zwischen - *π/2* und *π/2*. Ich ändere den Wert von Tangens nicht, wenn ich Vielfache von π hinzufüge. Sie können sich auch davon überzeugen, dass tatsächlich *14π/3* geschrieben werden kann wie *5π-π/3*, und somit kann ich die *5π* aus *tan(5π-π/3)* streichen, das ist also das gleiche wie *tan(-π/3)*, und da *-π/3* ein guter Winkel ist, ist die Antwort *-π/3*. Das ist nur zur Darstellung dessen, dass eine solche Relation nur für die guten Winkel gültig ist; Sie können ähnliche Anmerkungen für Sinus und Kosinus machen.

Notes

Summary

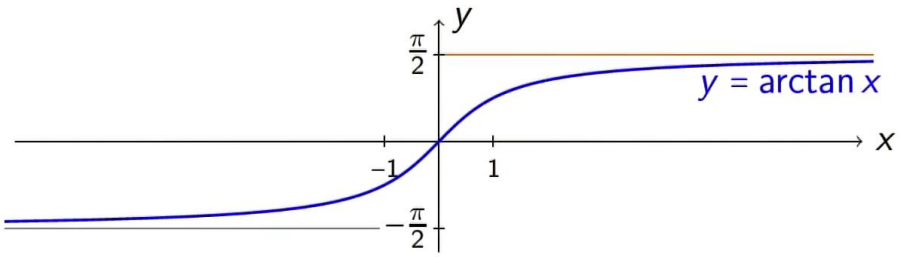
17m 08s

Dérivée de la fonction arctangente

En dérivant les deux membres de l'identité $\tan[\arctan(x)] = x, \quad (x \in \mathbb{R})$,

on obtient $(1 + \tan^2[\arctan(x)]) \cdot \frac{d}{dx} \arctan(x) = 1$, d'où

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + \tan^2[\arctan(x)]} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Wenn wir jetzt Arkustangens ableiten möchten, gehen wir von der Relation *tan[arctan(x)] = x* aus; ich leite links und rechts ab; rechts erhalte ich 1, links Tangens abgeleitet ist *1 + tan²[arctan(x)]* mal der inneren Ableitung, und ich isoliere die innere Ableitung. Hier steht die Sache ganz einfach: *tan[arctan(x)]* ergibt immer *x*, ich habe also *1/(1+x)²*; dort gibt es kein Problem, der Nenner ist niemals Null, man erhält also, dass die Funktion Arkustangens immer ableitbar ist, und dass ihre Ableitung gegeben ist durch *1/(1+x²)*.

Notes

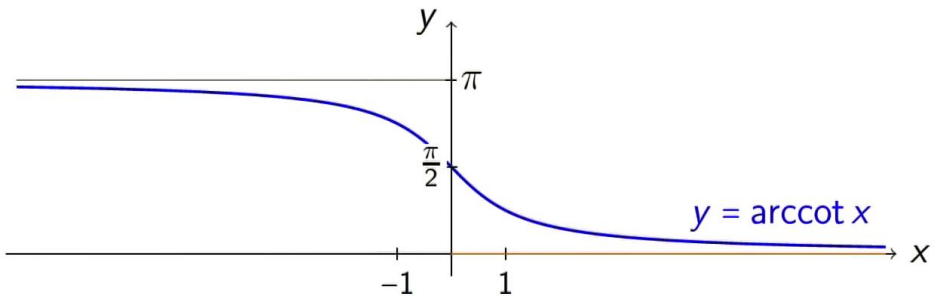
Summary

18m 22s

Dérivée de la fonction arccotangente

De façon analogue, on montre que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Ich überlasse Ihnen die ähnliche Beweisführung für Kotangens zu machen, wie ich es angekündigt habe, und zeige Ihnen dieses Ergebnis, dass die Ableitung für Arkustangens *-1/(1+x²)* ist.

Notes

Summary

19m 01s

Exemple 1

Exemple

Soit $f(x) := \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

- Calculer la dérivée de f.
- Représenter le graphe de f.
- En déduire la représentation graphique de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Lassen Sie uns das Ganze noch einmal an einem Beispiel illustrieren: Ich empfehle Ihnen, diesmal die Summe von *arctan(x) + arctan(1/X)* zu betrachten. Man kann alle darin enthaltenen *x* annehmen, außer *x = 0*, aufgrund einer Teilung durch Null, die hier vermieden werden muss. Ich empfehle Ihnen, die Ableitung zu berechnen, mithilfe dieser Ableitung den Graphen der Funktion *f* zu geben und auch den Graphen der Funktion *arctan(1/X)* als Zugabe, den man erhalten kann, sobald man die ersten beiden Schritte gemacht hat.

Notes

Summary

19m 15s

Exemple 1 : solution

La fonction

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

est

- continue en tout point de $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et
- dérivable, avec

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Es ist also welche Funktion? *f(x)* ist gegeben durch *arctan(x) + arctang(1/x)*, und alle *x* sind annehmbar, außer der Wert von *x = 0*. Diese Funktion hat zwei Eigenschaften: Sie ist überall stetig und die zweite Eigenschaft ist, dass diese Funktion ableitbar ist. Berechnen wir ihre Ableitung: Ich habe *f'(x)*, ich habe eine Summe, ich werde Schritt für Schritt ableiten, ich fange mit der Ableitung des ersten Elements an - ich erinnere Sie daran, dass Arkustangens abgeleitet gleich *1/(1+x²)* ist, plus, für das zweite Element habe ich Ding Arkustangens, das macht *1/[1+(Ding²)]*, multipliziert mit und ich muss die Ableitung dieses Dings finden, das heißt dieses *(1/x)*, und die Ableitung von *(1/x)* ist gegeben durch *-1/x²*. Vereinfachen wir ein wenig: Das erste Element ist, wie es ist; für das zweite Element werde ich "-" haben, ich haben eine 1 im Zähler, im Nenner werde ich die Nenner untereinander multiplizieren, und ich erhalte somit *x²+1*, wenn Sie etwas genauer hinschauen, sehen Sie, dass Sie Null erhalten werden, und das ist wahr für alle *x*, die reale Zahlen sind, außer Null. Die Ableitung existiert wirklich immer.

Notes

Summary

19m 48s

Exemple 1 : solution (suite)

Donc, f est constante par morceaux sur $\mathcal{D}_f$:

- pour $x > 0$:

$$f(x) = f(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = 2 \cdot \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$

- pour

Daher kann ich sagen, dass die Funktion *f* in Teilen konstant ist. Was bedeutet das? Sie ist in Teilen konstant in ihrem gesamten Definitionsbereich *Df*, also schauen wir einmal ein wenig: was kann ich für *x* positiv erhalten? Für *x* positiv ist die Funktion *f(x)* konstant, die Funktion ist überall ableitbar für alle positiven *x*, ihre Ableitung ist Null für alle positiven *x*, also kann ich für die Berechnung dieses Wertes der Funktion *f(x)* irgendein positives *x* nehmen, ich nehme die Stelle 1, die sich besonders gut eignet, da ich dort *arctan(1) + arctan(1/1)* berechnen muss, - der Nenner *x* ist 1 wert - natürlich ist das da 1, ich erhalte zweimal *arctan(1)*, das heißt, ich erhalte zweimal *π/4*, also letztendlich habe ich *π/2*. Für *x* negativ gehe ich genauso vor: Diesmal sage ich, dass ich zur Berechnung von *f(x)* - also, *f(x)* hat eine Null-Ableitung für alle negativen *x*, also bleibt die Funktion *f(x)* für alle negativen *x* konstant - einen Wert von *x* wähle, der mir gut passt: ich nehme -1, das heißt, dass ich Arkustangens an der Stelle -1 berechnen und Arkustangens an der Stelle *1/-1* hinzufügen muss, und ich erhalte also zweimal Arkustangens von -1, und das führt mich zu *-π/2*.

Notes

Summary

21m 50s

Exemple 1 : solution (suite)

Donc, f est constante par morceaux sur $\mathcal{D}_f$:

- pour $x > 0$:
$$f(x) = f(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = 2 \cdot \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$
- pour $x < 0$:
$$f(x) = f(-1) = \arctan(-1) + \arctan \frac{1}{(-1)} = -\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Also kann ich folgendes Ergebnis formulieren: *f(x)* ist gegeben durch: also für die positiven *x* habe ich *π/2*, und für die negativen *x* habe ich *-π/2*. Ich erinnere Sie daran, dass die Funktion für *x = 0* nicht definiert war.

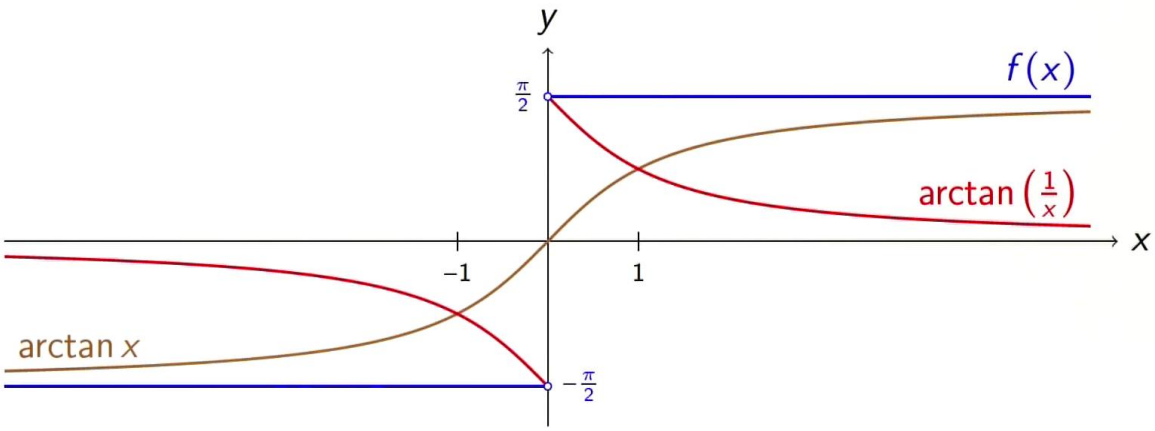
Notes

Summary

23m 45s

Exemple 1 : solution (suite et fin)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



Wir können wie folgt abschließen: wenn ich den Graphe dieser Funktion *f* zeichnen möchte, muss ich eine Konstante *π/2* für *x* positiv zeichnen und eine Konstante *-π/2* für *x* negativ. Wenn ich darin Arkustangens anschaue, der dort gegeben ist, weiß ich, dass die fehlende Differenz - schauen wir uns das einmal an - weiß ich, dass die Differenz durch *arctan(1/x)* gegeben ist, also weiß ich, dass *arctan(1/x) + arctan(x)* entsprechend *π/2* und *-π/2* ergeben, wenn ich also das gegenüber *arctan(1/x)* auflöse, erhalte ich die Terme: für *x* positiv ist es *π/2 - arctan(x)*, für *x* negativ ist es *-π/2 - arctan(x)*; der Graph von *arctan(1/x)* ist eigentlich das, was *π/2* fehlt. Hier weiß ich, dass die Summe zwischen *arctan(x)* und *arctan(1/x)* - also die Summe zwischen braun und rot - blau ergeben muss, immer. Wenn hier *arctan(x)* steigend ist, muss *arctan(1/x)* sinkend sein, und wenn Arkustangens sich auflöst, muss *arctan(1/x)* gegen *-π/2* tendieren. Natürlich ist *x = 0* nicht zulässig, aber letztendlich und für *x* positiv, kann man entsprechend den Graphen von *arctan(1/x)* auf diese Art und Weise erhalten.

Notes

Summary

24m 11s

Exemple 2

Exemple

Soit $f(x) := \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

- Calculer la dérivée de f.
- En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Betrachten wir ein zweites Beispiel: Diesmal empfehle ich Ihnen, sich die Funktion *f(x)* anzuschauen, die für alle ($x \in \mathbb{R}$) definiert ist, die von Arkussinus gegeben ist - und wir haben Arkussinus hier von einem Bruch, der durch $x/(1+x^2)$ gegeben ist mit einer Wurzel um diesen Nenner $1+x^2$ herum. Der Term stellt kein Problem dar für alle reellen Werte von *x*, nirgends gibt es eine Teilung durch Null, Sie können ein wenig darüber nachdenken, dass der Quotient immer zwischen -1 und 1 liegt. Wir würden gern die Ableitung berechnen, und vor allem daraus einen vereinfachten Term für *f*.

Notes

Summary

25m 33s

Exemple 2 : solution

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}^2}\right)^2}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

Also, ich erinnere Sie daran, dass *f(x)* Arkussinus ist, und es ist Arkussinus von einem Bruch *x/(√1+x²)*, das Ganze gegeben für alle *x* in ℝ. Nehmen wir dessen Ableitung: Ich habe Arkussinus von irgendetwas. Zuerst werde ich nur die Ableitung von Arkussinus nehmen: Es ist 1 geteilt durch; wir haben eine Wurzel, und unter der Wurzel 1 und wir haben das irgendetwas zum Quadrat; das heißt, dass ich den Zähler *x²* haben werde und den Nenner *√1+x²*, dieser ebenfalls zum Quadrat, und ich muss das Ganze nun mit der Ableitung des irgendetwas multiplizieren, also der Ableitung dieses Bruchs. Also, ich leite ab, wie man einen Bruch ableitet: die Ableitung des Zählers multipliziert mit dem Nenner minus den Zähler multipliziert mit der Ableitung des Nenners. Der Nenner ist eine Wurzel von irgendetwas, seine Ableitung ist also *1/(2√1x²)* mal die innere Ableitung, die von *x²*, also mal *2x*, und das Ganze muss geteilt werden durch den Nenner zum Quadrat, also diese Wurzel zum Quadrat. Ich kann sofort diese 2 kürzen.

Notes

Summary

26m 12s

Exemple 2 : solution

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^2}}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{d}{dx} \arctan x$$

Rechnen wir mal und schauen wir, was passiert, wenn Sie etwas genauer hinschauen, hier, dieses Element ist eigentlich $1+x^2$ ohne die Wurzel, also die Wurzel und das Quadrat werden sich aufheben, ich habe also 1 geteilt durch - ich schreibe noch einmal meine Wurzel, ich stelle alles in den gleichen Nenner - also $1+x^2$, und ich erhalte $1 + x^2 - x^2$. Ich multipliziere; Hier werde ich ein wenig anders verfahren. Ich werde den Bruchstrich stehen lassen und durch diese Wurzel $1+x^2$ erweitern, also werde ich $1+x^2$ erhalten, das die Wurzel von $1+x^2$ multipliziert, indem hier mit der Wurzel $1+x^2$ erweitert wird, mir bleibt lediglich $1 + x^2$ minus, und dort, nach Erweiterung bleibt mir x^2. Wenn ich genauer hinschaue, kann ich hier die x^2 kürzen, und ich kann hier auch die x^2 kürzen. Was bleibt, ist im Zähler eine einzige 1, und im Nenner, wenn Sie ein wenig schauen, bleibt hier eine 1 über der Wurzel mal der Wurzel, also bleibt nur $1/(1+x^2)$. Dieses Ergebnis ist erstaunlich, ist bemerkenswert, Denn was ich finde, ist, dass die Ableitung von f die gleiche ist wie die Ableitung von $arctan(x)$.

Notes

Summary

28m 12s

Exemple 2 : solution (suite et fin)

Donc, $\exists$ constant C telle que

$$f(x) = \arctan x + C \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Comme

$$f(0) = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_{x=0} = \arcsin 0 = 0 \\ \arctan x + C\Big|_{x=0} = \arctan 0 + C = C \end{cases} \Bigg\rbrace =$$

Donc $C = 0$

et

$$f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Es existiert also eine Konstante, reelle Konstante wie *f(x)* ist eigentlich *arctan(x)* plus eine Konstante. Diese beiden Funktionen haben immer die gleich Ableitung, sie sind bis auf eine Konstante gleich, und das ist wahr für alle *x* im Definitionsbereich. Legen wir also diese Konstante fest: Wir werden die Funktion *f* an einem bestimmten Punkt berechnen. Ich berechne *f(0)* : Ich werde einmal Arkussinus vom Bruch *x* nehmen, geteilt durch die Wurzel von $1+x^2$, und ich stelle sie in $x = 0$, also erhalte ich *arcsin(0)*, und *arcsin(0)* ist Null wert. Wenn ich *arctan(x) + C* nehme, was ein anderer Term für diese gleiche Funktion *f(x)* ist, und ich $x = 0$ dort einführe, erhalte ich *arctan(0)*, was Null wert ist, plus die Konstante, ich erhalte also die Konstante, aber es ist klar, dass ich zweimal das gleiche Resultat erhalten muss, und daraus kann ich schließen, dass die Konstante *C* in Wahrheit Null ist. Ich kann also schreiben, dass *f(x)*, das eigentlich Sinus von $x/\sqrt{1+x^2}$ ist, nichts anderes ist als *arctan(x)*, und das ist wahr für alle *x* in $\mathbb{R}$.

Notes

Summary

30m 10s

Dérivabilité

Un grand merci d'avoir suivi ce huitième chapitre.

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

So, wir kommen somit zum Ende von Kapitel 8, das ist gleichzeitig das letzte Kapitel über trigonometrische Funktionen, ich danke Ihnen dafür, dass Sie diesem achten Kapitel gefolgt sind, ich gratuliere Ihnen: Sie sind einen langen Weg durch diese 8 Kapitel gegangen, einen langen Weg quer durch die Trigonometrie. Ich danke ebenfalls meinen Mitarbeitern, die dieses Projekt unterstützen: ein großes Dankeschön an Guido Burmeister, an Roger Sauser und an Olivier Woringer. Wir sehen uns beim nächsten Mal, um über Exponentialfunktionen und Logarithmen zu sprechen. Bis bald!

Notes

Summary

32m 14s