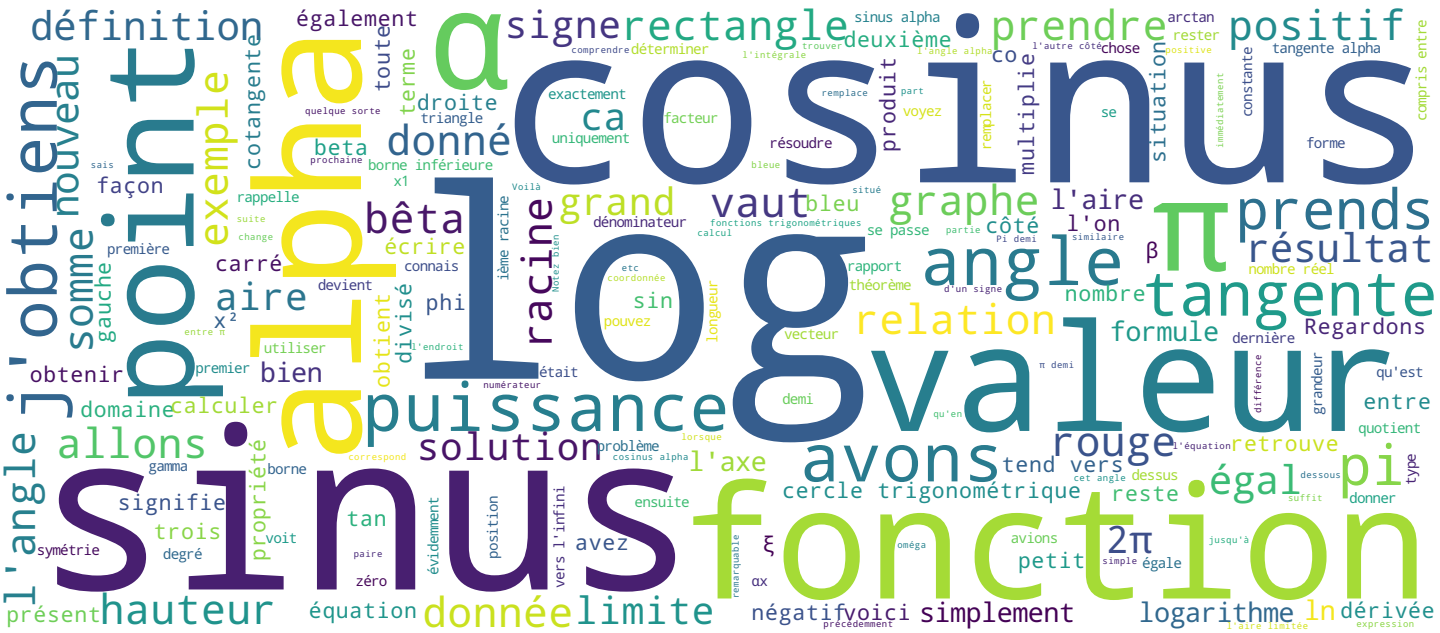
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.1 Logarithme naturel

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Notation

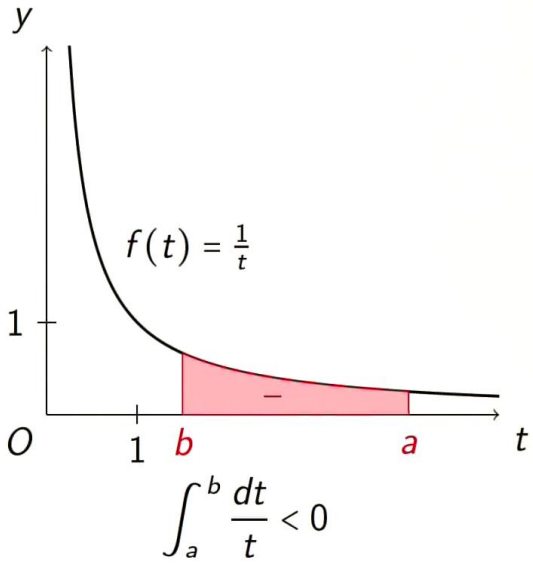
Considérons le graphe de la fonction continue $f(t) = \frac{1}{t} > 0$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Soient $a, b > 0$. On note

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \frac{dt}{t}$$

l'aire signée du domaine compris entre la courbe d'équation $y = f(t)$ et l'axe Ot, délimité latéralement par les droites d'équation $t = a$ et $t = b$.

L'aire est donc munie d'un signe :

- elle est négative si $a > b$.



$$\int_a^b \frac{dt}{t} < 0$$

Bonjour, soyez la bienvenue pour ce dernier chapitre de mon cours fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles. Aujourd'hui, nous allons nous occuper du logarithme. Avant de définir ce que le logarithme nous allons faire quelques remarques qui tournent autour d'une fonction f(t) = 1/t pour "t" réel positif. Nous avons ici l'axe des "t" l'axe des "y" là le graphe de la fonction ce graphe est une branche d'hyperbole. Alors nous choisissons deux nombres fixes "a" et "b" positifs et nous allons introduire une notation. C'est un signe, c'est un "S" allongé, une intégrale pour ceux qui connaissent de "a" à "b" de f(t), "dt" donc, sur "t" et ce signe ou cette abréviation signifie que l'on dénomme ainsi l'aire signée, c'est-à-dire l'aire limitée ici en bleu, c'est-à-dire limitée par l'axe des "t" limitée par la fonction, par le graphe de la fonction, donc "y" égal 1/t, limitée par la droite verticale t = a, et l'autre droite verticale t=b. Alors là, nous avons une aire et nous allons donner cette aire encore un signe. Si "a" est plus petit que "b" ce qui est le cas dans le graphe ici nous allons munir cette aire du signe plus. En revanche, si c'est "b" qui est plus petit que "a", c'est-à-dire que la borne qui est au dessus est plus petite que celle qui est ici en dessous dans ce cas là nous allons munir cette aire d'un signe moins.

Notes

Summary

0m 04s

Règles d'addition

- Les aires signées

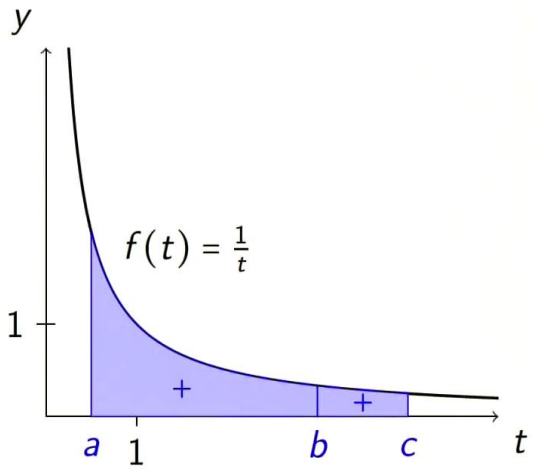
$$\int_a^b \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \int_b^a \frac{dt}{t}$$

sont égales en valeur absolue, mais de signe contraire :

$$\int_b^a \frac{dt}{t} = -\int_a^b \frac{dt}{t} \quad (a, b > 0)\,.$$

- Nous avons la règle d'addition

$$\int_a^c \frac{dt}{t} = \int_a^b \frac{dt}{t} + \int_b^c \frac{dt}{t} \quad (a, b, c > 0)\,.$$



$a < b < c$

Nous allons donner quelques propriétés, de cette notation qui est une intégrale donc pour ceux qui connaissent l'intégrale cela fera une répétition si vous ne connaissez pas l'intégrale, ce n'est pas grave, nous allons donner tout ce qu'il faut savoir autour de cette abréviation. L'intégrale de "a" à "b" de 1/t, dt. Alors évidement si vous intervertissez les bornes, c'est-à-dire vous placez la borne inférieure au dessus et la borne supérieur au dessous, alors en valeur absolue ce qu'il se passe, rien ne change, l'aire ne change pas, mais ce qui change c'est le signe que l'on donne. Donc dans ce cas là, simplement, on a égalité au signe prés. Deuxiéme propriété, nous avons une régle d'addition. Donc si nous avons ici "a", "b" et "c" qui est un point quelconque suppléxmentaire, ici nous l'avons choisi même plus grand que "b". On peut toujours dire que l'intégrale de "a" à "c" de "a" à "c" est donnée par l'intégrale depuis "a" jusqu'à "b" plus l'intxgrale de "b" jusqu'à "c". Alors ici dans ce cas, chaque intégrale est une aire munie d'un signe positif et on voit trés bien que l'aire limitée entre "a" et "c" est donnée par l'aire limitée entre "a" et "b" plus l'aire limitée entre "b" et "c". Ce qui est remarquable, c'est que cette régle reste vraie telle quelle même si le point "c" n'est pas situé au dessus de "b", regardons ça un peu de plus prés.

Notes

Summary

1m 54s

Règles d'addition

- Les aires signées

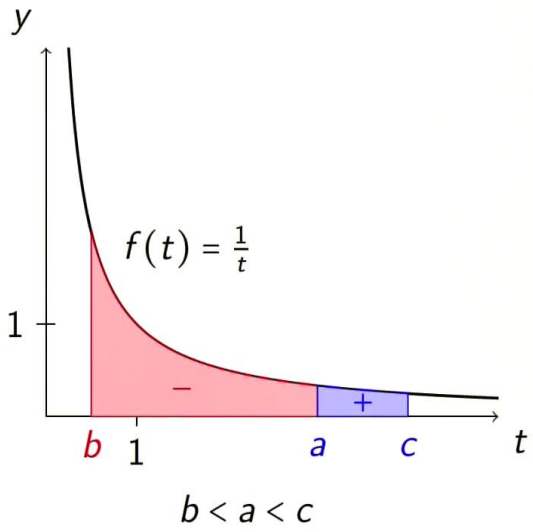
$$\int_a^b \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \int_b^a \frac{dt}{t}$$

sont égales en valeur absolue, mais de signe contraire :

$$\int_b^a \frac{dt}{t} = -\int_a^b \frac{dt}{t} \quad (a, b > 0)\,.$$

- Nous avons la règle d'addition

$$\int_a^c \frac{dt}{t} = \int_a^b \frac{dt}{t} + \int_b^c \frac{dt}{t} \quad (a, b, c > 0)\,.$$



$b < a < c$

Ici, nous avons par exemple, le point "b" qui est en dessous de "a", le point "c" est au dessus, vous pouvez faire des raisonnements similaires avec toutes les autres dispositions de ces trois points, la régle que voici reste vraie. L'intégrale de "a" à "c", donc c'est ici cette aire en bleue donc munie d'un signe plus, alors on dit que c'est depuis "a" jusqu'à "b", donc c'est l'aire en rouge ici, munie d'une signe moins plus l'aire de "b" à "c". Alors si on additionne, on voit que les parties rouges sont une fois soustraites et une fois additionnées et l'égalité reste bel et bien vérifiée. Comment retenir cette règle ? Cela est très simple, simplement si on a dans la première intégrale une borne supérieure qu'on retrouve dans la deuxième intégrale comme borne inférieure, en quelque sorte, on peut supprimer cette borne "b" qui apparait deux fois, et garder uniquement les bornes "a", "c" une seule fois dans une seule intégrale.

Notes

Summary

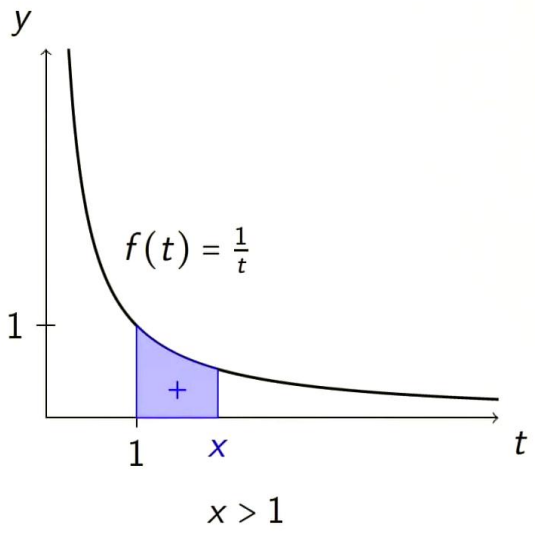
3m 32s

Définition

Considérons le graphe de la fonction continue $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit la fonction logarithme naturel par

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

donnant l'aire signée sous la courbe d'équation $y = f(t) = \frac{1}{t}$ entre $t = 1$ et $t = x$.



$x > 1$

Alors nous allons à présent définir ce que l'on entend par un logarithme. Donc nous sommes en face de cette fonction qui est donnée par f(t) = 1/t avec "t" positif. Alors nous allons définir la fonction logarithme naturel, nous verrons par la suite qu'il existe d'autres logarithmes qui sont très voisins de celle-ci, ce logarithme que je vous présente est de loin le logarithme le plus utilisé et il est abrégé comme "ln". Alors le domaine de définition ce sont les valeurs positives, et nous rendons, le log rend un nombre réel quelconque, le "x" transformé en "ln" "x", donc log naturel de "x", et il est défini comme l'intégrale allant de 1 à "x" pour cette fonction 1/t. Le log de "x" c'est l'aire comprise entre l'axe "t", y= 1/t, x=1, et, enfin, pardon, t=1 et t=x, c'est donc l'aire en bleue ici et si "x" est plus grand que 1, une aire munie d'un signe positif.

Notes

Summary

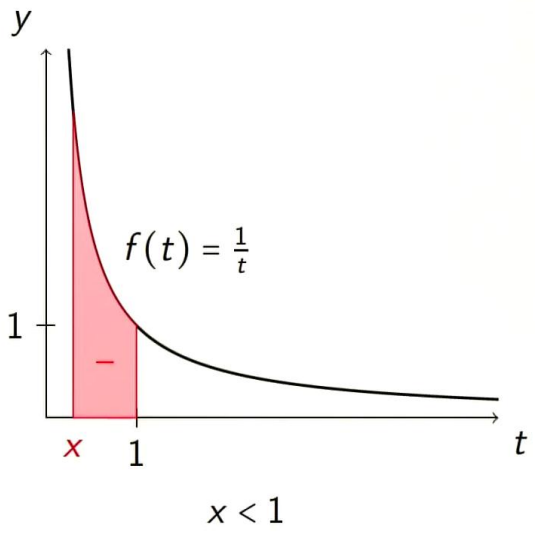
4m 36s

Définition

Considérons le graphe de la fonction continue $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit la fonction logarithme naturel par

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

donnant l'aire signée sous la courbe d'équation $y = f(t) = \frac{1}{t}$ entre $t = 1$ et $t = x$.



$x < 1$

Si "x" est plus petit que 1, donc si "x" est compris entre 0 et 1, alors le log de "x" donne toujours encore l'aire délimitée par l'axe "t", par y=1/t, par t=1 et t=x, cette fois-ci cette aire est simplement munie d'un signe moins, donc on conserve la même écriture, on va de 1 à "x" dans l'intégrale. Alors pour comprendre le logarithme, il faut un peu s'investir dans la façon dont on définit une aire.

Notes

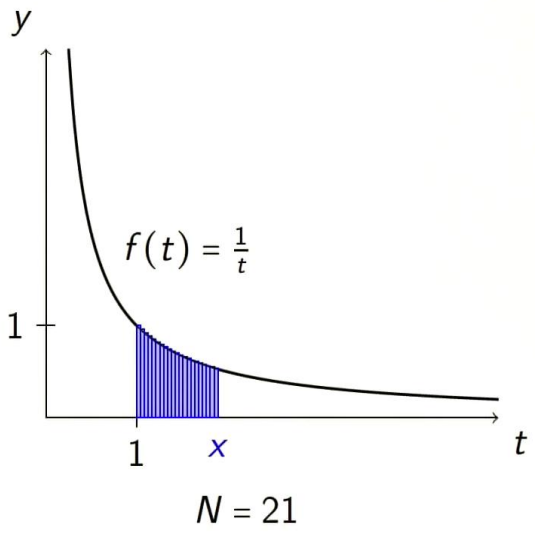
Summary

5m 47s

L'aire comme limite d'une somme

On divise l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N parties, par exemple égales.
Sur chaque sous-intervalle, on construit un rectangle de hauteur donnée par la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ sur la borne inférieure du sous-intervalle.
On effectue ensuite la somme des aires de tous ces rectangles.

L'aire sous la courbe s'obtient alors en faisant tendre N vers l'infini.



Pour ce faire, nous allons considérer un intervalle 1 à "x" avec ici "x" plus grand que 1 et nous allons subdiviser cet intervalle 1 à "x" en N parties, par exemple en N parties égales. Vous ne devez pas forcément prendre des parties égales. Cela ne joue en fait aucun rôle, le plus simple c'est de prendre des parties égales, donc ici j'ai pris N=3, donc il est divisé en trois parties égales. Sur chaque sous-intervalle, donc le premier, le deuxième, le troisième on va construire un rectangle, et la hauteur du rectangle est donnée par la fonction 1/t sur la borne inférieure du sous-intervalle donc si je prends ici le deuxième, je prends ici la borne inférieure, la valeur de la fonction et cela me donne la hauteur du deuxième rectangle, et ensuite on fait la somme de ces rectangles. Alors si on augmente le nombre de parties on obtient avec plus de précision l'aire que nous avons appelé log de "x". Regardons ça d'un peu plus près, si je remplace N=3, par N=5, N=11, N=21 on s'aperçoit trés bien que si je fais la somme de l'aire de ces rectangles, j'obtiens de mieux en mieux l'aire qui serait le log de "x". Et en fait l'aire log de "x" est définie comme la limite vers laquelle va tendre cette somme si N tend vers l'infini.

Notes

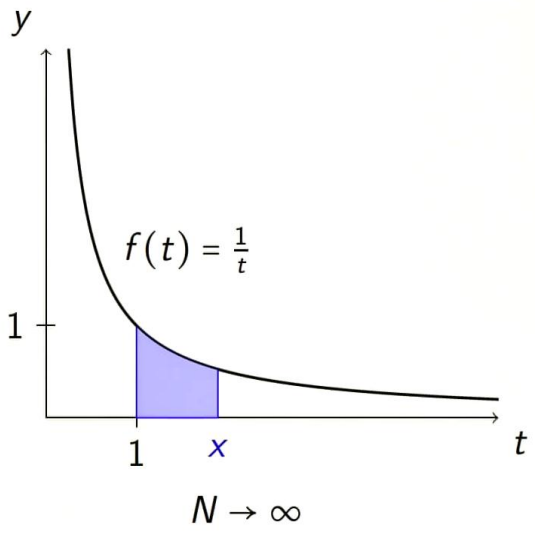
Summary

6m 22s

L'aire comme limite d'une somme

On divise l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N parties, par exemple égales.
Sur chaque sous-intervalle, on construit un rectangle de hauteur donnée par la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ sur la borne inférieure du sous-intervalle.
On effectue ensuite la somme des aires de tous ces rectangles.

L'aire sous la courbe s'obtient alors en faisant tendre N vers l'infini.



Voila ce qui est chose faite. Pour comprendre le log, pour comprendre ce qui signifie cette aire signée ici, le log de "x", il faut étudier un peu des propriétés de la fonction 1/t.

Notes

Summary

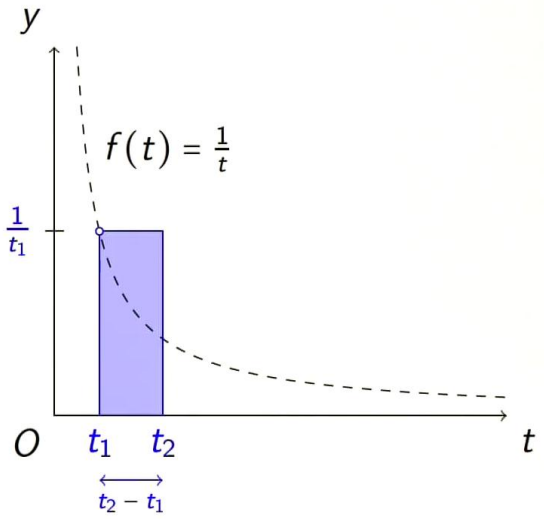
8m 08s

Invariance de l'aire d'un rectangle

Considérons un intervalle $[t_1, t_2]$ formant la base $t_2 - t_1$ d'un rectangle de hauteur $f(t_1) = \frac{1}{t_1}$, image par f de t_1, la borne inférieure de l'intervalle.

Son aire vaut

$$\text{aire} = (t_2 - t_1)\, f(t_1) = (t_2 - t_1)\, \frac{1}{t_1}.$$



Alors voici un élément qui va être fondamental. On prends donc cette fonction qui est toujours 1/t et nous allons prendre un rectangle, pardon, un intervalle quelconque qui va de t1 vers t2. On va prendre t2 plus grand que t1. Et nous allons prendre comme hauteur du rectangle, cette fois-ci, la valeur ici en dessous, dont la hauteur est donnée par 1/t1. J'obtiens ici un rectangle en bleu. Alors l'aire de ce rectangle, je peux la calculer. ça va être la base fois la hauteur, donc t2 moins t1, qui est ici, fois la valeur de la fonction à l'endroit t1, donc 1/t1. Voilà l'aire de ce rectangle.

Notes

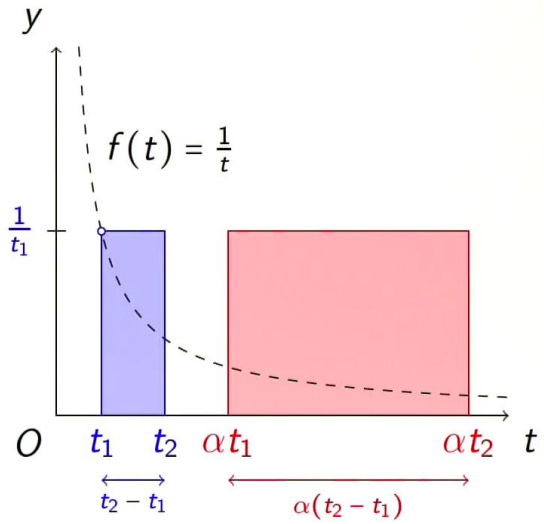
Summary

8m 25s

Invariance de l'aire d'un rectangle

Par l'application T_α, composée

- d'une dilatation selon Ot de $\alpha > 0$



Maintenant, nous allons appliquer une application que je vais appeler Tα, qui dépend d'un paramê÷tre α, qui est un nombre réel positif. Alors la première chose, on va dilater selon Ot d'un facteur α. C'est-à-dire qui tout point, par exemple ici ce point dans le rectangle bleu, il a une valeur, une coordonnée "t", et cette coordonnée "t" je la multiplie par α et je laisse invariant la coordonn×e "y" et je vais retrouver l'image de ce point ici. Je fais ça pour tous les points du rectangle bleu, et j'obtiens alors ce rectangle rouge. Donc le point t1 va en αt1, t2 en αt2, les hauteurs "y" ne changent pas, ce qui ressort c'est ce rectangle en rouge.

Notes

Summary

9m 13s

Invariance de l'aire d'un rectangle

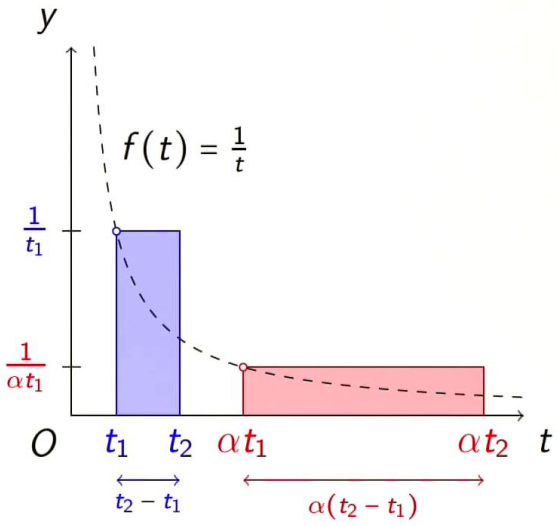
Par l'application T_α, composée

- d'une dilatation selon Ot de $\alpha > 0$ et
- d'une contraction selon Oy de $\frac{1}{\alpha}$,

on obtient un rectangle basé sur l'intervalle $[\alpha t_1, \alpha t_2]$ et de hauteur $\frac{1}{\alpha t_1} = f(\alpha t_1)$, image par f de αt_1, la borne inférieure de l'intervalle.

L'application T_α conserve l'aire :

$$\text{aire} = \alpha(t_2 - t_1)\frac{1}{\alpha t_1} = (t_2 - t_1)\frac{1}{t_1} = \text{aire}.$$



Dans une deuxième étape, j'applique maintenant une contraction selon l'axe des "y" et alors j'obtiens ce rectangle en rouge ici qui conserve sa valeur, mais la hauteur qui était 1/t1, je la multiplie par 1/(αt1) donc j'obtiens un rectangle ici en rouge, de largeur αt2 moins αt1, et la hauteur, alors la hauteur elle est donnée par 1/α qui multiplie 1/t1, donc c'est1/(αt1), qui est exactement la valeur de la fonction f(t) à l'endroit αt1. Ce qui est écrit ici, on obtient un rectangle basé sur l'intervalle αt1, αt2 dont la hauteur est donnée par "f" à l'endroit αt1. Alors ce qui est essentiel, c'est que cette transformation Tα, donc cette succession d'une dilatation d'une contraction va conserver les aires. En effet, si je calcule ici l'aire en rouge je vais avoir α qui multiplie la différence t1, pardon, t2 - t1 fois la hauteur qui est 1/(αt1), les α se simplifient ce qui ressort c'est exactement la formule que nous avions pour l'aire en bleue, c'est-à-dire t2 moins t1 fois 1/t1.

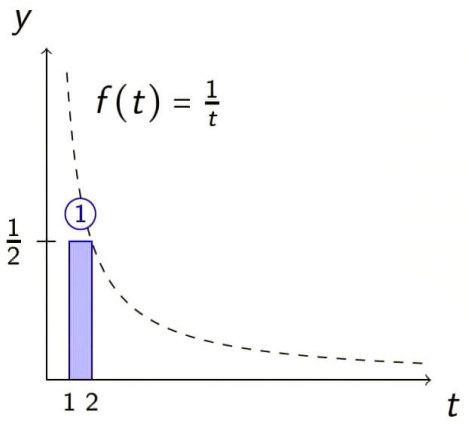
Notes

Summary

10m 05s

Exemple d'application

Considérons le rectangle ① basé sur l'intervalle $[1, 2]$ et de hauteur $\frac{1}{2}$.



Alors nous allons appliquer cette conservation d'aire pour obtenir un résultat qui est intéressant en soi même, et qui va nous aider par la suite à comprendre le logarithme. Alors on va considérer un rectangle que j'appelle ici numéro un c'est celui-ci, alors il est basé sur l'intervalle un deux, et la hauteur elle est donnée par, cette fois-ci, la valeur de la fonction de la borne supérieure donc sur le deux, si je prends deux, le f(2) donne 1/2. J'aimerais peut-être remarquer que ici, le graphe de la fonction n'est pas dessiné avec les mêmes unités le long de l'axe des "t" et de l'axe des "y". On le voit immédiatement. Ici j'ai une distance de 1, ici 1/2. Nous l'avons fait pour pouvoir mieux dessiner ce qui se passe.

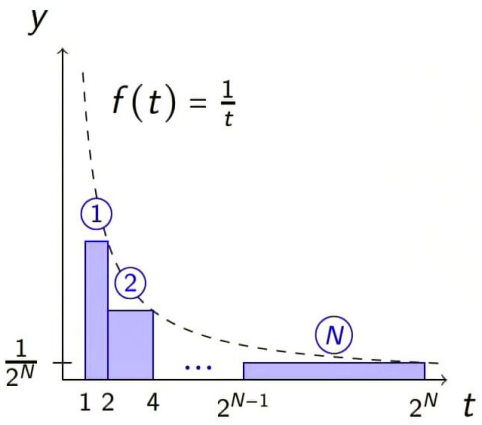
Notes

Summary

11m 28s

Exemple d'application

Le N^{e} rectangle (N) est alors basé sur $[2^{N-1}, 2^{N}]$ et de hauteur $\frac{1}{2^{N}}$.



Maintenant nous appliquons une application de t2 donc la borne inférieure 1 ici, elle est multipliée par 2, la borne sup×rieure 2, elle est multipliée par 2, donne 4 et la hauteur est divisée par 2, donc j'obtiens 1/4 et 1/4 est exactement la valeur de la fonction sur la borne supérieure du deuxiéme intervalle. Donc là j'ai un rectangle qui va de 2 à 4, avec une hauteur de 1/4. Je peux continuer, cette fois-ci, je transforme ce rectangle t2 avec cette meme application t2. C'est-à-dire que la borne inférieure 2 est multipliée par 2, donne 4, la borne 4 est multipliée par 2, donne 8, donc je vais écrire ça 2 puissance 3, et la hauteur qui était 1/4 est divisée par 2, donc j'obtiens 1/2 puissance 3. De nouveau, si je prends la borne supérieure 2 à la puissance 3, je l'introduits dans la fonction f(t), et j'obtiens la hauteur correspondante. Alors je peux continuer de cette façon, je peux trouver un rectangle en 4, 5, 6, 7 parts, après N parts, où-est-ce que je me trouve ? Alors à la fin, je vais me trouver sur une borne du type 2 puissance N. La borne inférieure est 2 puissance N-1, pour s'en rendre compte, peut-être que on reprend la figure précédente, voyez avec le numéro 3, j'avais un 2 puissance 3 et un 2 puissance 2, et la hauteur elle est donnée par un sur deux puissance N.

Notes

Summary

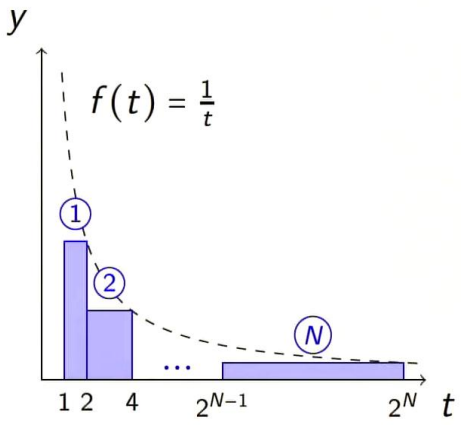
12m 15s

Exemple d'application

Tous les N rectangles sont de même aire, égale à $\frac{1}{2}$.

En sommant l'aire des rectangles ① à ⓝ, nous obtenons

$$\text{aire} = \frac{N}{2}.$$



Alors nous savons que chacune de ces aires l'aire du premier rectangle, du deuxième, du troisième, jusqu'au Nième, chacune de ces aires vaut 1/2. L'application t2 que nous avons utilisée, pour aller du 1 vers le 2, puis du 2 vers le 3, du 3 vers le 4, etc cette application conserve les aires, donc tous ces rectangles ont la même aires : une demi, et j'en ai N, donc l'aire qui est ici sous la fonction 1/t elle vaut N fois 1/2.

Notes

Summary

13m 48s

Exemple d'application

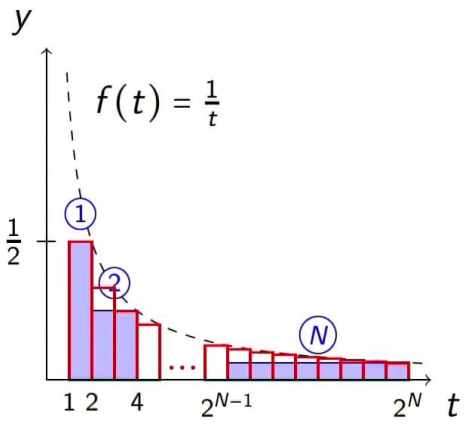
Cette aire est une minoration de la somme des inverses des entiers de 2 à 2^N :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}\geq\frac{N}{2}.$$

Lorsque $N\to\infty$, cette minoration tend vers ∞ et ainsi

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

La série harmonique diverge.



Alors on peut à présent introduire des rectangles de même largeur on va prendre toujours des rectangles de largeur 1. Par exemple entre 2 et 4, on a au point 3 une nouvelle ligne verticale on va prendre le rectangle entre 2 et 3 de hauteur 1/3 et entre 3 et 4, le rectangle de hauteur 1/4 entre 4 et 8, nous ferons la même chose, nous allons avoir ici, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8. Donc si on somme l'ensemble de ces rectangles rouges nous allons obtenir 1/2 qui est ici 1/3 et 1/4 qui est ici ensuite 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, etc. Le dernier va valoir un sur deux puissance N. Et l'aire en rouge va être plus grande que l'aire en bleue qui vaut N/2. Alors ce qui nous intéresse c'est ce qu'il se passe si N devient très grand. Alors si N devient très très grand, nous avons ici en rouge une somme on va prendre N vers l'infini cette somme s'écrit usuellement comme "k" allant de 1 à l'infini de 1/k, voyez si "k" vaut 1, ça donne 1/1, si "k" vaut 2, j'ai 1/2, si "k" vaut 3, j'ai 1/3, etc et le fait que j'écrive ici l'infini signifie simplement que je prends la limite d'une somme finie allant jusqu'à N donc j'ai un 1/N, si on veut et le N tend vers l'infini.

Notes

Summary

14m 22s

Exemple d'application

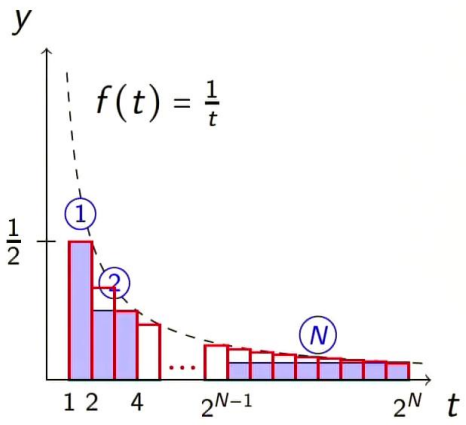
Cette aire est une minoration de la somme des inverses des entiers de 2 à 2^N :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}\geq\frac{N}{2}.$$

Lorsque $N\to\infty$, cette minoration tend vers ∞ et ainsi

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

La série harmonique diverge.



Alors cette somme doit être plus grande que N/2 si N tend vers l'infini, donc elle va devenir infiniment grande. Cette série que vous voyez ici, cette somme infinie, cette série s'appelle une série harmonique et le résultat que nous obtenons c'est que cette série harmonique diverge. Notez bien que si vous revenez à la fonction 1/t cela signifie que si vous prenez une aire vous la limitez à une constante "t", vous prenez l'aire limitée par l'axe des "t" par la fonction et vous ne limitez pas sur la droite l'aire qui est en dessous va être infiniment grande. C'est le résultat qu'implique cette divergence de la série harmonique.

Notes

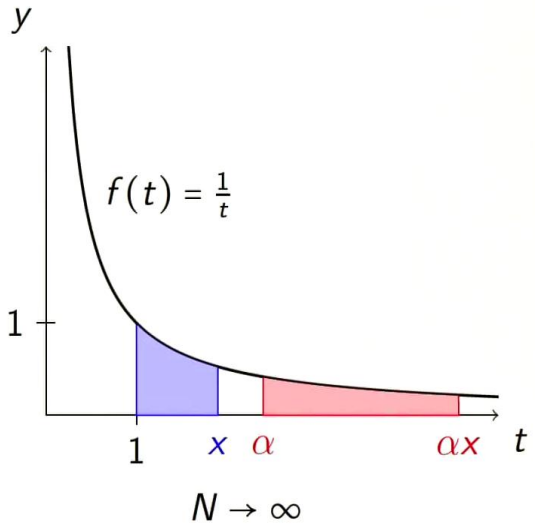
Summary

16m 05s

Propriété du logarithme

L'application T_α conserve l'aire d'un rectangle et donc également la somme des aires des rectangles construits sur une subdivision de l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N sous-intervalles.
Pour le cas limite $N \to \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t} &= \int_\alpha^{\alpha x} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{\alpha x} \frac{dt}{t} - \int_1^{\alpha} \frac{dt}{t} \\ \ln x &= \ln(\alpha x) - \ln \alpha \end{aligned}$$



Revenons aux logarithmes. Nous avons dit que l'application Tα avec un α positif quelconque conserve l'aire pour la situation que voici. Nous allons obtenir le résultat que je vais développer. Donc je prends ici la fonction1/t je prends un rectangle qui va de 1 jusqu'à "x", ici en bleu, ce rectangle. Ici je vais obtenir l'image, c'est-à-dire le 1 est multiplié par α, le "x" par α, la hauteur est divisée par α donc la hauteur est donnée par 1/α. Alors subdivisons maintenant en N intervalles, c'est-à-dire que je vais essayer de calculer vraiment le log de "x" ici. Alors nous avons ici la situation de N égal à 3, 4, 11, etc. Si je continue jusqu'à prendre N allant jusqu'à l'infini, je m'aperçois que les aires en bleues et rouges sont égales. Alors regardons ce que cela signifie en langage du logarithme. En bleu c'est facile à dire, en bleu cela est exactement l'intégrale de 1 à "x" de dt/t, cette grandeur vous la retrouvé ici, c'est ce que nous avons appelé le log de "x". En rouge, en rouge nous avons cette même fonction 1/t mais limitée par α en bas et αx en haut, alors en rouge, cela peut s'écrire un peu différemment, nous allons essayer d'avoir toujours une borne inférieure à 1, afin de revenir à la définition du log alors je prétends que je peux aller depuis 1 jusqu'à αx, et soustraire depuis 1 jusqu'à α.

Notes

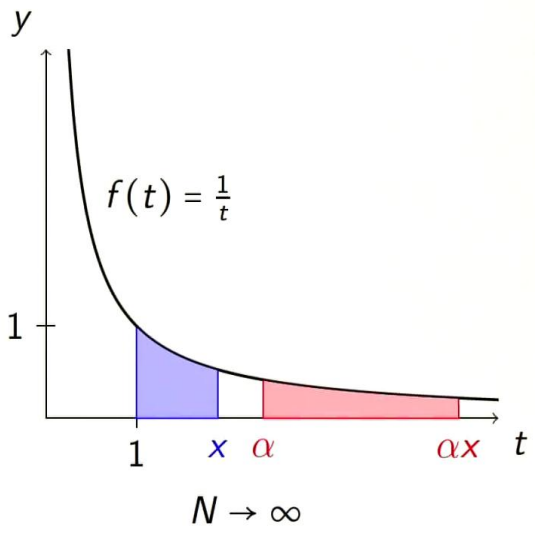
Summary

16m 56s

Propriété du logarithme

L'application T_α conserve l'aire d'un rectangle et donc également la somme des aires des rectangles construits sur une subdivision de l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N sous-intervalles.
Pour le cas limite $N \to \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t} &= \int_\alpha^{\alpha x} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{\alpha x} \frac{dt}{t} - \int_1^{\alpha} \frac{dt}{t} \\ \ln x &= \ln(\alpha x) - \ln \alpha \end{aligned}$$



C'est cette propriété d'addition que j'avais mentionné au début. Si vous voulez la vérifier de façon formelle, vous prenez ce terme en moins de l'autre côté de l'égalité et alors vous voyez que vous avez la borne α qui est une fois inférieure et supérieure et qui peut être de ce fait en quelque sorte supprimée. Vous pouvez aussi le voir immédiatement sur la figure donc ici je prends l'aire signée entre 1 et αx donc c'est une aire positive, et je soustrais l'aire depuis 1 jusqu'à α, alors ce qui va rester c'est la partie en rouge. Ce terme, l'intégrale de un à αx, c'est le log de αx. L'intégrale de un à α c'est le log α. Donc j'obtiens cette relation qui est importante que log de "x" est égal au log de αx moins le log de α.

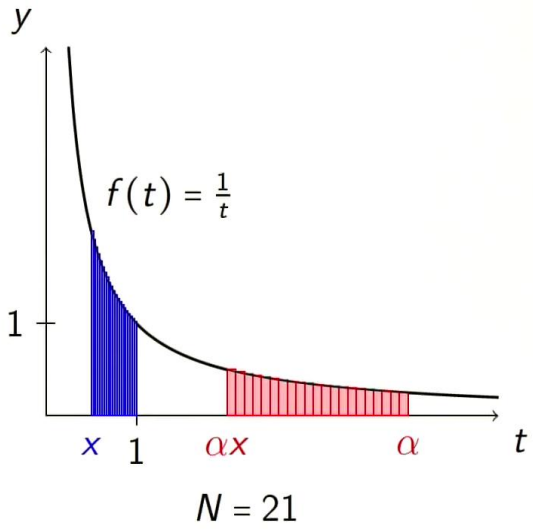
Notes

Summary

18m 38s

Propriété du logarithme

Il en est de même dans le cas $0 < x < 1$ où l'on divise l'intervalle $[x, 1]$ en N sous-intervalles.



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Alors évidemment on peut se poser la question. Est-ce que cette propriété reste vraie si "x" est situé en dessous de 1, donc si "x" est situé entre 0 et 1. Alors faisons la même chose, nous subdivisons les aires correspondantes donc on part depuis 1 jusqu'à "x", là "x" est inférieur à 1, avec l'application Tα, le 1 va en α, le "x" va en αx, et ici j'ai en rouge toujours ce qui correspond à l'image de la partie bleue par l'application Tα. J'augmente le nombre de subdivisions, le nombre de subdivisions augmente ici également et si je fais tendre N vers l'infini, je vais obtenir que, à nouveau, ces aires sont égales.

Notes

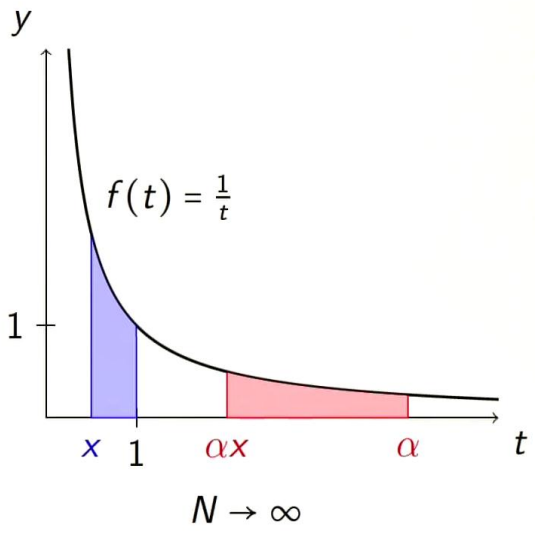
Summary

19m 32s

Propriété du logarithme

Il en est de même dans le cas $0 < x < 1$ où l'on divise l'intervalle $[x, 1]$ en N sous-intervalles.
Pour le cas limite $N \to \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t} &= \int_\alpha^{\alpha x} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{\alpha x} \frac{dt}{t} - \int_1^{\alpha} \frac{dt}{t} \\ \ln x &= \ln(\alpha x) - \ln \alpha \end{aligned}$$



Alors évidement il faut encore analyser le signe. Si je prends l'intégrale de un à "x", ça c'est l'aire avec un signe moins, et ici je vais prendre l'intégrale de α à αx, si bien que j'ai la même aire avec un signe moins, donc cette égalité est correcte. Et le reste découle de la même façon donc on transforme cette intégrale en une différence d'intégrale et on obtient donc que le log de "x" c'est le log de αx moins le log de α, cela étant vrai pour tous les α plus grands que 0.

Notes

Summary

20m 24s

Relation logarithmique fondamentale

Proposition

Pour tous $\alpha > 0$ *et* $x > 0$, *on a*

$$\boxed{\ln(\alpha x) = \ln \alpha + \ln x\,.}$$

Résumons, résumons tout dans une proposition donc pour tous les α positifs et "x" positifs on a que le log du produit c'est le log de α plus le log de "x". Revenons en arrière, vous voyez ici, j'ai le log de "x" est égal au log du produit moins le log de α, on passe simplement le α de l'autre côté, c'est comme ça que l'on écrit cette propriété usuellement, donc le logarithme a transformé un produit αx en une somme des logs le log de α plus le log de "x".

Notes

Summary

21m 00s

Relations logarithmiques

1. $\boxed{\ln 1 = 0}$

Par définition,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0\,,$$

l'aire sous la courbe entre 1 et 1 est nulle.

Une fois qu'on a cette propriété qui est fondamentale, vraiment, il en découle toute une série de propriétés pour cette fonction log naturel. Je vous rappelle là vous avez la définition, le domaine ce sont tous les "x" positifs, le résultat est donnée par cette aire signée. Alors les propriétés sont, premièrement, si je prends le log de 1 j'obtiens 0, voyez le log de 1, c'est l'intégrale de 1 à 1, dx dt. C'est qu'en fait l'aire sous la courbe de la fonction un sur "t" est comprise entre t=1 et t=1 donc cette aire est nulle.

Notes

Summary

21m 31s

Relations logarithmiques

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$

C'est la relation logarithmique fondamentale.

Deuxième propriété, ça c'est la relation fondamentale, c'est que le logarithme du produit x1 fois x2, x1 et x2 étant positifs, c'est le log de x1 plus le log de x2.

Notes

Summary

22m 09s

Relations logarithmiques

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$
3. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad (x > 0)$
4. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$

Directement,

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 + \ln \frac{1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2 .$$

Troisième propriété, si je veux avoir le log de 1/x, il suffit de prendre le log de "x" avec le signe contraire, cela est vrai pour tout les "x" positifs. Pourquoi ? Alors nous allons utiliser les deux premières propriétés. Donc j'ai 0 qui est égal au log de 1, 1 je peux l'écrire comme "x" fois 1/x, si "x" est un nombre positif quelconque. Là j'ai un produit, je vais utiliser la deuxième propriété, j'obtiens le log de "x" plus le log de 1/x. Il suffit à présent de résoudre 0 = log de "x" plus log de 1/x par rapport au dernier terme, et j'obtiens que le log de 1/x est bel et bien moins le log de "x". Quatrième propriété, le log d'un quotient "x" un sur x2, x1 et "x" étant les deux positifs, est donné par le log du numérateur, donc de x1 moins le log du dénominateur, x2. Là à nouveau, cela est immédiat car il suffit d'appliquer les lois deux et trois il suffit d'écrire x1 sur x2 comme x1 qui multiplie 1/x2 et donc j'obtiens le log de x1, c'est le premier terme dans la multiplication plus le log, le deuxième terme 1/x2 et pour ce log un sur x2, j'applique la règle trois, et j'obtiens donc que c'est le log de x1 moins le log de x2.

Notes

Summary

22m 21s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$

Pour $n = 2$,

$$\ln(x^2) = \ln(x\,x) = \ln x + \ln x = 2 \ln x .$$

Pour $n = 3$,

$$\ln(x^3) = \ln(x^2\,x) = 2 \ln x + \ln x = 3 \ln x ,$$

et ainsi de suite pour $n \in \mathbb{N}$.

Cinquième propriété, si j'ai un "x" positif et un "n" un entier positif ou négatif, le log de "x" puissance "n" est donné par "n" fois le log de "x", donc la puissance en quelque sorte, elle passe devant le log comme facteur. Alors regardons ça pour des "n" positifs et négatifs, donc par exemple pour n=2, j'ai le log de x², j'écrit x² comme "x" fois "x", et j'utilise la propriété fondamentale du log, que le produit est transformé en log de "x" plus log de "x", donc deux fois le log de "x". Pour n=3, je fais la même chose, j'ai le log de x^3, j'écris x^3 comme x² fois "x", log de x² fois "x" c'est le log de x², donc deux fois log de "x", on vient d'avoir ça, plus le log du "x" en tout j'ai trois fois le log de "x". Alors on peut continuer comme ça, pour "x" puissance 4, 5, 6, si vous voulez, on peut faire là une démonstration par induction complète.

Notes

Summary

23m 50s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$

Pour $n = -2$,

$$\ln \frac{1}{x^2} = \ln \frac{1}{x\,x} = \ln \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} = -2 \ln x .$$

Pour $n = -3$,

$$\ln \frac{1}{x^3} = \ln \frac{1}{x^2\,x} = \ln \frac{1}{x^2} + \ln \frac{1}{x} = -3 \ln x ,$$

et ainsi de suite pour $n \in \mathbb{Z}_-$.

Regardons encore ce qu'il se passe si "n" est un entier négatif, par exemple n=-2, j'ai un 1/x², le log de un sur x², j'écris ce 1/x² comme 1/x fois "x" si vous préférez 1/x fois 1/x, et la propriété fondamentale du log pour un produit va me donner le log du premier facteur 1/x, plus le log du deuxième facteur 1/x en tout je vais obtenir deux fois le même terme, et ce log de 1/x n'est rien d'autre que moins le log de "x" donc j'obtiens moins deux fois le log de"x et alors on voit très bien que ici en fait j'avais "x" puissance -2, et ce -2 passe devant. Pour n=-3, vous procédez de nouveau en quelque sorte par induction vous dites que le log de 1/x^3, vous écrivez ce 1/x^3 comme 1/x² fois 1/x, vous obtenez ici le log de 1/x² que vous venez de calculer, il vous reste encore ici plus un log de 1/x qui vaut en fait moins le "x", et en tout cela va faire moins trois log "x".

Notes

Summary

24m 50s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$

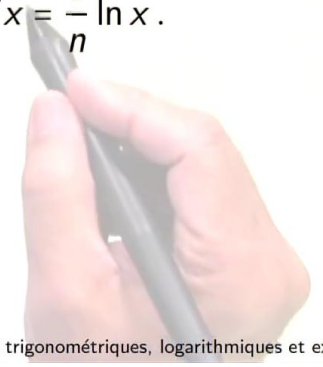
6. $\boxed{\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{N}^*)}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln x = \ln(\sqrt[n]{x})^n = n \ln \sqrt[n]{x}$$

et donc

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Sixième propriété, le log d'une n-ième racine de "x" est donné par 1/n fois log "x" alors ici, il faut que "x" soit positif et "n" un nombre naturel positif aussi, 1, 2, 3, 4, 5. Pourquoi ? Vous avez ici la justification, on écrit simplement le log de "x", ce "x" je l'écris comme la n-ième racine de "x" à la puissance "n", et je sais que cette puissance "n" peut passer devant le log comme un facteur j'ai donc "n" fois le log de n-ième racine de "x". Alors dans cette équation ln x = n fois log de n-ième racine de "x". Je passe le "n" de l'autre côté, et j'obtiens ce résultat. Il est remarquable ce résultat, pourquoi ? Il est remarquable, parce qu'en fait si vous écrivez cette n-ième racine de "x" comme "x" puissance un sur "n", vous avez de nouveau la loi cinq, et en fait elle est toujours valable, c'est juste.

Notes

Summary

25m 51s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$
6. $\boxed{\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{N}^*)}$
7. $\boxed{\ln(x^p) = p \ln x \quad (x > 0, p \in \mathbb{Q})}$

Pour $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\begin{aligned} \ln x^p &= \ln x^{\frac{m}{n}} = \ln(\sqrt[n]{x})^m \\ &= m \ln \sqrt[n]{x} = \frac{m}{n} \ln x \\ &= p \ln x\,. \end{aligned}$$

Donc si vous prenez ln de x^p c'est "p" fois ln x. "p" peut, par exemple être 1/n comme ici en haut, mais "p" peut par exemple être un nombre rationnel quelconque. Si "p" est de la forme m/n, avec "m" positif ou négatif entier, "n" un nombre naturel positif, donc 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Si j'ai le log de "x" puissance "p", "p" étant m/n, je commence par dire que ça, c'est "x", je prends la n-ième racine à la puissance "m" le puissance "m" passe devant, la n-ième racine passe devant comme un sur "n", et ce m/n est "p". Donc on obtient cette relation pour "p" dans "Q". Si vous regardez les propriétés cinq, six, sept, en fait sont les mêmes. La propriété sept contient et le résultat cinq, six et sept.

Notes

Summary

26m 47s

Relations logarithmiques

5. $\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})$
6. $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{N}^*)$
7. $\ln(x^p) = p \ln x \quad (x > 0, p \in \mathbb{Q})$

Généralisation :

$\ln(x^y) = y \ln x \quad (x > 0, y \in \mathbb{R})$

Nous verrons que cette relation est généralisable aux exposants réels, même irrationnels, par une définition adéquate de x^y $(x > 0, y \in \mathbb{R})$.

On peut même généraliser cette propriété sept, on peut remplacer cette puissance "p", par une puissance "y", où "y" un nombre réel quelconque. Alors là, je ne justifie pas pour le moment ce résultat, parce qu'il dépend fondamentalement de la façon dont on définit les puissances, alors je ne vais pas définir ce qu'est un nombre "x" à une puissance "y" où "y" est un nombre irrationnel, je pourrais le faire, mais ça prendrait pas mal de temps, nous reviendrons là dessus par ce que je vais donner une définition de "x" puissance "y", avec "y" un nombre réel quelconque je vais la donner une des prochaines séances.

Notes

Summary

27m 41s

Logarithme naturel

Ce que nous avons appris :

- définition du logarithme naturel en tant qu'aire signée
- propriétés de la fonction logarithme naturel.

Prochain Chapitre :

- Etude de la fontion ln et son graphe
- Nombre d'Euler e.

Résumons ce que vous avez appris aujourd'hui, vous avez appris la définition du log naturel, c'est une aire signée, et vous avez appris toute une série de propriétés de ce logarithme. Des propriétés qui fondamentalement reposent tous sur cette même propriété c'est-à-dire que le log de α fois "x" c'est le log de α plus le log de "x" si α et "x" sont deux nombres réels positifs. Alors la prochaine fois nous allons étudier le graphe de la fonction du log naturel et nous allons introduire un nombre d'Euler "e". Merci de m'avoir suivi et à la prochaine.

Notes

Summary

28m 19s