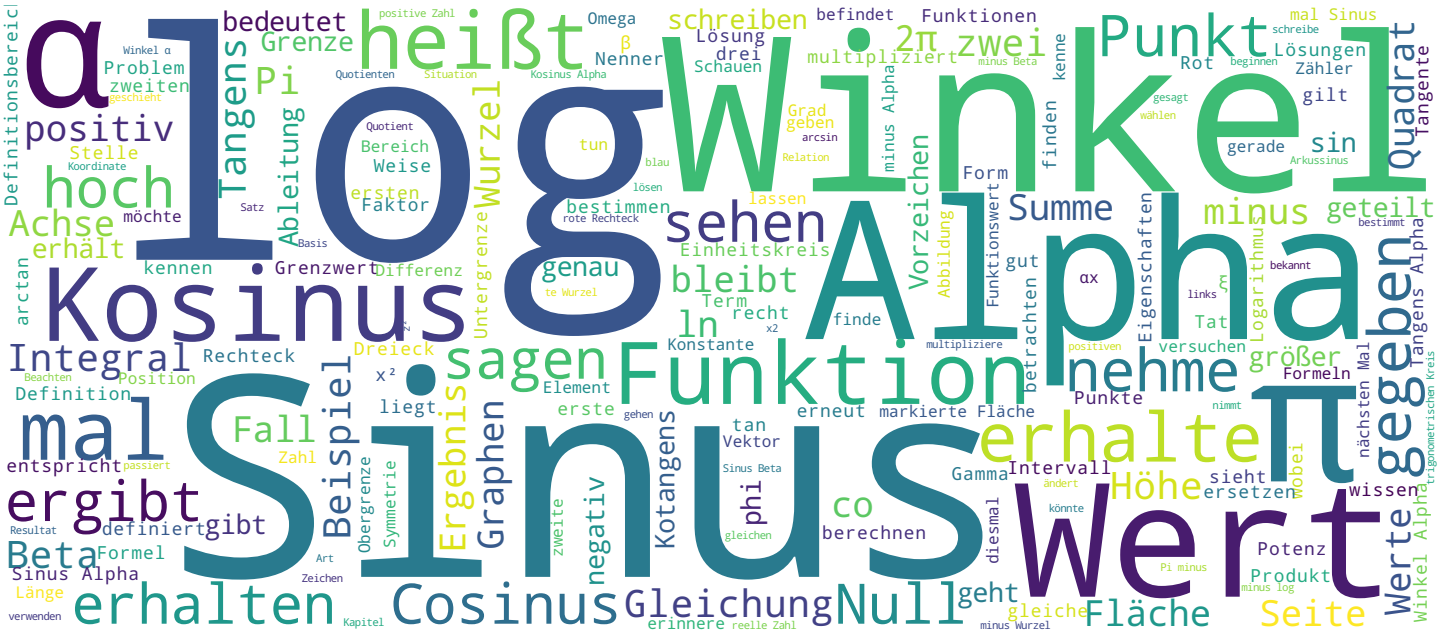
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.1 Logarithme naturel

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen


α
log
Winkel
Punkt
heißt
bedeutet
Grenze
schreiben
Lösung
drei
Schauen
2π
zwei
multipliziert
Rot
Lösungen
Zähler
Quadrat
Tangente
Pi
Tangens
Problem
zweiten
positiv
hoch
Achse
Stelle
Ableitung
Wurzel
Bereich
Weise
Faktor
ersten
Grad
geben
arcsin
tun
gilt
gerade
sin
Form
finden
Summe
sehen
bestimmen
lassen
Vorzeichen
minus
geteilt
Alpha
Kosinus
erhält
kennen
Grenzwert
Differenz
genau
bleibt
Einheitskreis
Eigenschaften
Integral
Rechteck
sagen
Funktion
ln
Term
recht
Konstante
nehme
größer
Formeln
gegeben
Sinus
π
mal
Fall
Beispiel
Ergebnis
Graphen
Kotangens
Vektor
tan
phi
co
berechnen
erhalte
Höhe
Intervall
Gamma
sieht
ersetzen
wissen
ergibt
definiert
gibt
Beta
Formel
Sinus Alpha
Länge
verwenden
erhalten
Cosinus
Gleichung
Null
geht
gleiche
Fläche
Seite
Wert
Potenz
Produkt
Werte
Winkel Alpha
Definitionsbereich
arctan
Dreieck
Element
erste
erneut
markierte Fläche
Punkte
Tat
versuchen
Logarithmus
Tangens Alpha
trigonometrischen Kreis
Obergrenze
Symmetrie
negativ
zweite
Untergrenze
Abbildung
Funktionswert
betrachten
Omega
Nenner
Quotienten
Kosinus Alpha
Quotient
Satz
Basis
Differenz
rote Rechteck
te Wurzel
blau
lösen
Relation
Einheitskreis
Term
Konstante
Vektor
Sinus Beta
gleichen
Gamma
Intervall
ändert
könnte
diesmal
nächsten Mal
Potenz
Produkt
Pi minus
minus log
minus Wurzel
erinnere
reelle Zahl
Kapitel
Zeichen
Art
Resultat
Beachten
Position
Definition
entspricht
passiert
Zahl
liegt
Winkel α
Problem
zweiten
geschieht
Koordinate
Stelle
positiv
Achse
möchte
erhält
kennen
Grenzwert
Rechteck
Integral
Definition
Beispiel
Fall
mal
ergibt
definiert
gibt
Beta
Formel
Sinus Alpha
Länge
verwenden
Graphen
Ergebnis
Obergrenze
Symmetrie
Zahl
Art
Zeichen
Kapitel
Cosinus
erhalten
Gleichung
Null
Fläche
Seite
Wert
Werte
Winkel Alpha
Tangens Alpha
trigonometrischen Kreis
Logarithmus
Tangente
Quadrat
Arkussinus
Funktionswert
Abbildung
Vorzeichen
Eigenschaften
Einheitskreis
Summe
minus
geteilt
Alpha
Sinus
π
gegeben
Wert
Werte
Winkel Alpha
Potenz
Produkt
Pi minus
minus log
minus Wurzel
Seite
Fläche
Null
Gleichung
Cosinus
erhalten
Beta
Sinus Alpha
Länge
verwenden
Integral
Rechteck
Definition
Beispiel
Fall
mal
ergibt
definiert
gibt
Formel
Graphen
Ergebnis
Obergrenze
Symmetrie
Zahl
Art
Zeichen
Kapitel
Kotangens
Vektor
tan
phi
co
berechnen
Gamma
Intervall
ändert
könnte
diesmal
nächsten Mal
Potenz
Produkt
Pi minus
minus log
minus Wurzel
erinnere
reelle Zahl
Kapitel
Resultat
Beachten
Position
entspricht
passiert
liegt
Winkel α
Problem
zweiten
geschieht
Koordinate
Stelle
positiv
Achse
möchte
erhält
kennen
Grenzwert
Differenz
Dreieck
Element
erste
erneut
markierte Fläche
Punkte
Tat
versuchen
Logarithmus
Tangens Alpha
trigonometrischen Kreis

Notation

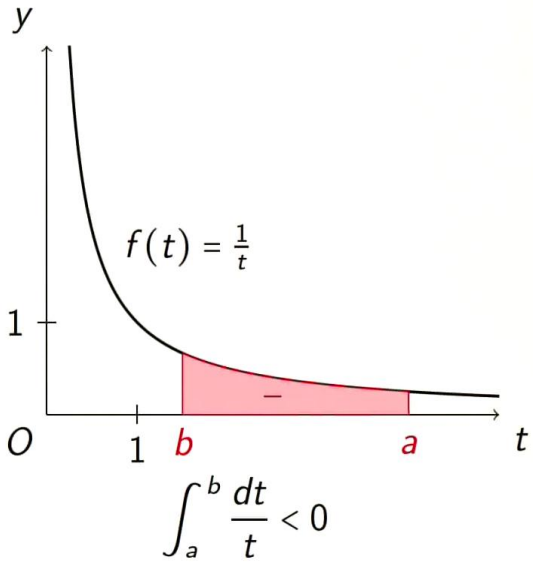
Considérons le graphe de la fonction continue $f(t) = \frac{1}{t} > 0$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Soient $a, b > 0$. On note

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \frac{dt}{t}$$

l'aire signée du domaine compris entre la courbe d'équation $y = f(t)$ et l'axe Ot, délimité latéralement par les droites d'équation $t = a$ et $t = b$.

L'aire est donc munie d'un signe :

- elle est négative si $a > b$.



$$\int_a^b \frac{dt}{t} < 0$$

Guten Tag und herzlich willkommen zum letzten Kapitel meines Kurses Trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen. Heute beschäftigen wir uns mit dem Logarithmus. Bevor wir diesen Logarithmus definieren einige Bemerkungen zu einer Funktion f(t) = 1/t für ein positives reelles t. Hier haben wir die t-Achse, die y-Achse, dort den Funktionsgraphen, eine Spielart der Hyperbel. Wir wählen nun zwei positive Konstanten a und b und führen eine Notierung ein. Dieses Zeichen ist ein verlängertes "S", ein Integral für die, die es kennen, von a bis b von f(t), also dt an t, und dieses Zeichen oder diese Abkürzung bedeutet, dass man so die markierte Fläche bezeichnet, das heißt die hier blau markierte Fläche, die begrenzt wird durch die t-Achse, die Funktion, das heißt deren Graphen, also y=1/t, durch die rechte Vertikale t=a, und die andere rechte Vertikale t=b. Wir haben hier also eine Fläche und geben ihr noch ein Vorzeichen. Wenn a kleiner als b ist, wie es bei diesem Graphen der Fall ist, geben wir dieser Fäche das Vorzeichen plus. Ist dagegen b kleiner als a, das heißt wenn die Obergrenze kleiner als die Untergrenze ist, in diesem Fall geben wir dieser Fläche das Vorzeichen minus.

Notes

Summary

0m 04s

Règles d'addition

- Les aires signées

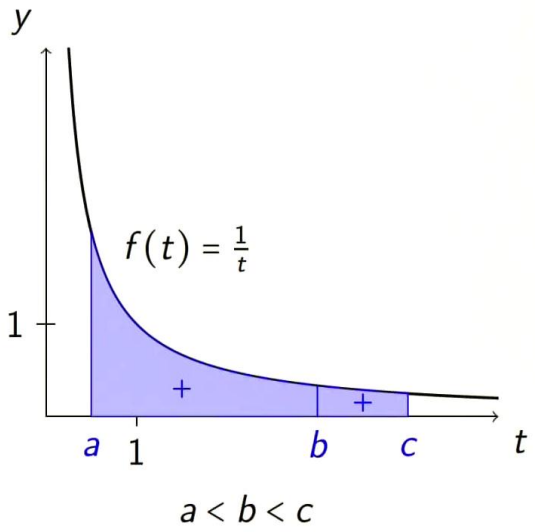
$$\int_a^b \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \int_b^a \frac{dt}{t}$$

sont égales en valeur absolue, mais de signe contraire :

$$\int_b^a \frac{dt}{t} = -\int_a^b \frac{dt}{t} \quad (a, b > 0)\,.$$

- Nous avons la règle d'addition

$$\int_a^c \frac{dt}{t} = \int_a^b \frac{dt}{t} + \int_b^c \frac{dt}{t} \quad (a, b, c > 0)\,.$$



$a < b < c$

Wir definieren nun einige Eigenschaften dieser Notation, die ein Integral ist, also für die, die das Integral schon kennen, ist es eine Wiederholung, wenn Sie das Integral nicht kennen, macht das nichts, denn rund um diese Abkürzung erfahren Sie alles Wissenswerte. Das Integral von a bis b über 1/t, dt. Wenn Sie die Grenzen nun vertauschen, also die Untergrenze oben und die Obergrenze unten platzieren, so ändert sich am Betrag gar nichts, die Fläche bleibt gleich, was sich aber ändert, ist das Vorzeichen. Wir haben in diesem Fall also Gleichheit der Vorzeichen. Zweite Eigenschaft, wir haben eine Additionsregel. Wenn wir hier nun a, b und c haben, was irgendein zusätzlicher Punkt ist, hier haben wir ihn größer als b gewählt. Man kann immer sagen, dass das Integral von a bis c gegeben ist durch das Integral von a bis b plus das Integral von b bis c. In diesem Fall also hat jedes Integral ein positives Vorzeichen und man sieht sehr gut, dass die begrenzte Fläche zwischen a und c gegeben ist durch die begrenzte Fläche zwischen a und b plus die begrente Fläche zwischen b und c. Bemerkenswert ist, dass diese Regel auch dann gilt, wenn der Punkt c nicht über b liegt, sehen wir uns dies näher an.

Notes

Summary

1m 54s

Règles d'addition

- Les aires signées

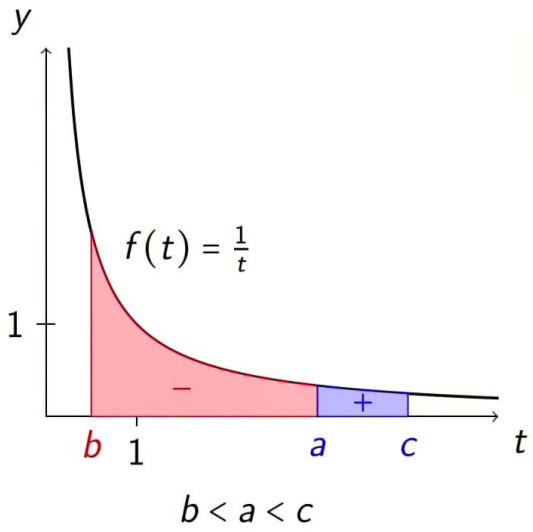
$$\int_a^b \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \int_b^a \frac{dt}{t}$$

sont égales en valeur absolue, mais de signe contraire :

$$\int_b^a \frac{dt}{t} = -\int_a^b \frac{dt}{t} \quad (a, b > 0)\,.$$

- Nous avons la règle d'addition

$$\int_a^c \frac{dt}{t} = \int_a^b \frac{dt}{t} + \int_b^c \frac{dt}{t} \quad (a, b, c > 0)\,.$$



$b < a < c$

Hier haben wir zum Beispiel den Fall, dass der Punkt b unter a ist, der Punkt c darüber, Sie können ähnliche Überlegungen für alle Anordnungen dieser drei Punkte anstellen, die genannte Regel bleibt wahr. Das Integral von a bis c, das hier als blaue Fläche eingezeichnet ist, also ein positives Vorzeichen trägt, nun sagen wir, dass von a bis b, das ist also diese rote Fläche hier mit negativem Vorzeichen, plus die Fläche von b bis c. Wenn man nun summiert, sieht man, dass die roten Teile einmal subtrahiert und einmal addiert werden, und die Gleichheit wird bestätigt. Wie merkt man sich diese Regel? Ganz einfach, wenn man im ersten Integral eine Obergrenze hat, die man im zweiten Integral als Untergrenze wiederfindet, in welcher Weise auch immer, kann man diese Grenze b streichen, die zweimal auftaucht, und behält nur die Grenzen a und c ein einziges Mal in einem Integral.

Notes

Summary

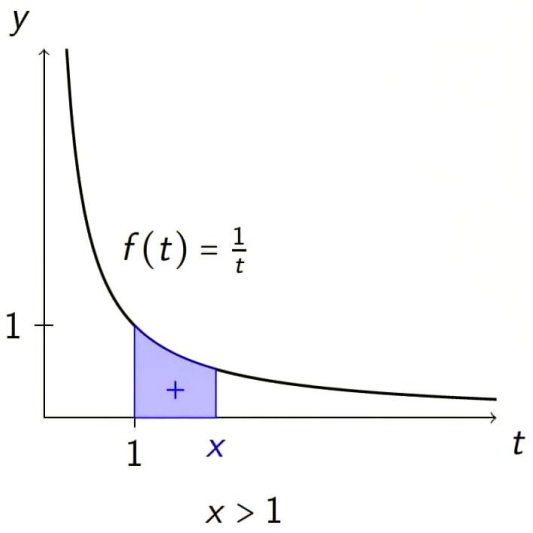
3m 32s

Définition

Considérons le graphe de la fonction continue $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit la fonction logarithme naturel par

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

donnant l'aire signée sous la courbe d'équation $y = f(t) = \frac{1}{t}$ entre $t = 1$ et $t = x$.



$x > 1$

Wir können nun also definieren, was man unter einem Logarithmus versteht. Wir haben also diese Funktion, die durch f(t) = 1/t mit positivem t gegeben ist. Wir werden nun die Funktion "natürlicher Logarithmus" definieren, und werden sehen, dass es weitere Logarithmen gibt, die ihr eng benachbart sind, dieser Logarithmus, den ich Ihnen vorstelle, ist der bei weitem meistverwendete und wird als "ln" abgekürzt. Dieser Definitionsbereich sind also die positiven Werte, und der log gibt uns irgendeine relle Zahl zurück, das x wird in ln x transformiert, das heißt in den natürlichen Logarithmus von x, und er wird als Integral definiert, das für diese Funktion 1/t von 1 bis x geht. Der log von x ist die Fläche zwischen der t-Achse y= 1/t, x=1, und schließlich, pardon, t=1 und t=x, das heißt die blaue Fläche hier und wenn x größer als 1 ist, trägt die Fläche ein positives Vorzeichen.

Notes

Summary

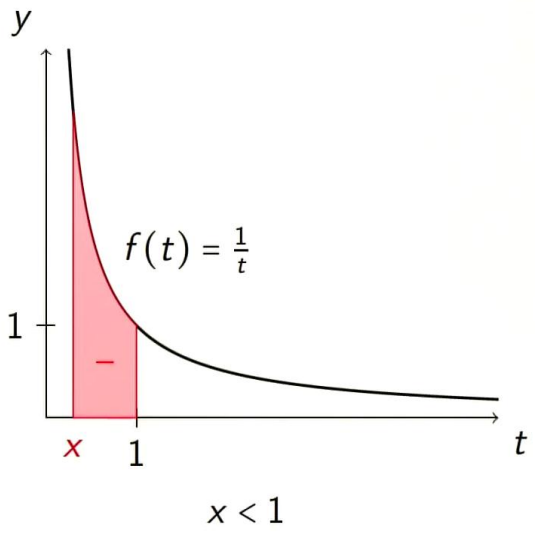
4m 36s

Définition

Considérons le graphe de la fonction continue $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit la fonction logarithme naturel par

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

donnant l'aire signée sous la courbe d'équation $y = f(t) = \frac{1}{t}$ entre $t = 1$ et $t = x$.



$x < 1$

Ist x kleiner als 1, liegt x also zwischen 0 und 1, so ergibt der log von x immer noch die Fläche, die begrenzt wird durch die t-Achse, y=1/t t=1 und t=x, nur trägt die Fläche diesmal das Vorzeichen minus, man behält also die Schreibweise bei, man geht im Integral von 1 bis x. Um den Logarithmus zu verstehen, muss man sich ein wenig darin vertiefen, wie eine Fläche definiert wird.

Notes

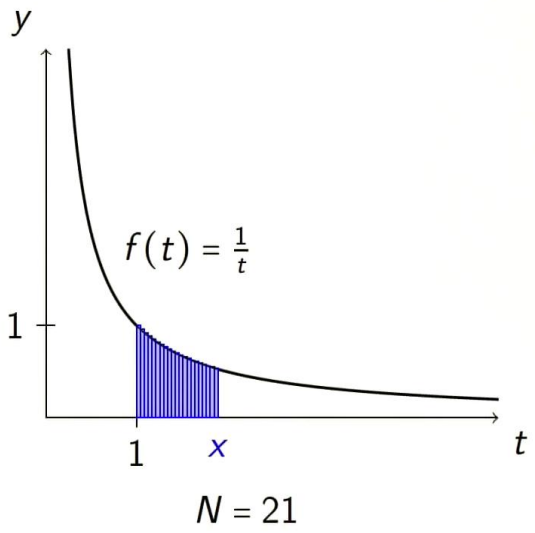
Summary

5m 47s

L'aire comme limite d'une somme

On divise l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N parties, par exemple égales.
Sur chaque sous-intervalle, on construit un rectangle de hauteur donnée par la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ sur la borne inférieure du sous-intervalle.
On effectue ensuite la somme des aires de tous ces rectangles.

L'aire sous la courbe s'obtient alors en faisant tendre N vers l'infini.



Hierzu betrachten wir ein Intervall 1 bis x, hier mit x größer als 1, und wir unterteilen dieses Intervall 1 bis x in N Teile, zum Beispiel N gleiche Teile. Sie müssen nicht unbedingt gleichgroße Teile verwenden. Das spielt tatsächlich gar keine Rolle, es ist nur das Einfachste, gleiche Teile zu nehmen, also habe ich N=3 genommen, es ist also in drei gleiche Teile unterteilt. Über jedem Sub-Intervall, also dem ersten, dem zweiten, dem dritten konstruieren wir ein Rechteck, des Höhe gegeben ist durch die Funktion 1/t über der Untergrenze des Sub-Intervalls, wenn ich also hier das zweite nehme, nehme ich hier die Untergrenze, den Funktionswert, und erhalte dadurch die Höhe des zweiten Rechtecks, und schließlich bilden wir die Summe dieser Rechtecke. Wenn wir also die Anzahl der Teile erhöhen, erhalten wir mit immer größerer Genauigkeit die Fläche, die wir den log von x genannt haben. Sehen wir uns dies näher an: Wenn ich N=3 durch N=5, N=11 oder N=21 ersetze, sieht man sehr gut, dass, wenn ich die Summe der Fläche dieser Rechtecke bilde, ich immer bei die Fläche bekomme, die dem log von x entspricht. Und in der Tat ist der log von x definiert als der Grenzwert, gegen den diese Summe tendieren wird, wenn N gegen unendlich geht.

Notes

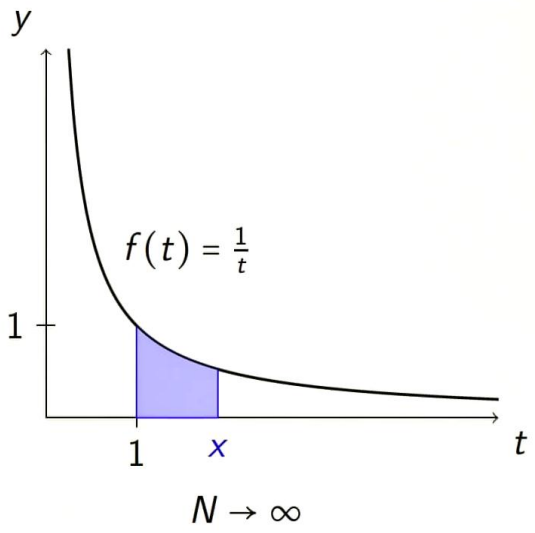
Summary

6m 22s

L'aire comme limite d'une somme

On divise l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N parties, par exemple égales.
Sur chaque sous-intervalle, on construit un rectangle de hauteur donnée par la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ sur la borne inférieure du sous-intervalle.
On effectue ensuite la somme des aires de tous ces rectangles.

L'aire sous la courbe s'obtient alors en faisant tendre N vers l'infini.



Und fertig. Um den log zu verstehen, um zu verstehen, was diese markierte Fläche bedeutet, der log von x, muss man ein wenig die Eigenschaften der Funktion 1/t untersuchen.

Notes

Summary

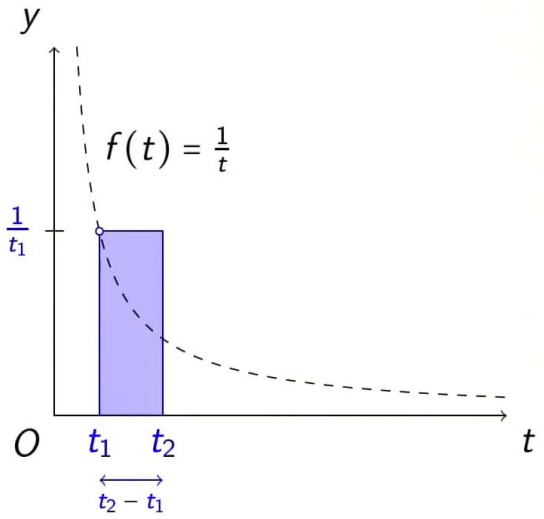
8m 08s

Invariance de l'aire d'un rectangle

Considérons un intervalle $[t_1, t_2]$ formant la base $t_2 - t_1$ d'un rectangle de hauteur $f(t_1) = \frac{1}{t_1}$, image par f de t_1, la borne inférieure de l'intervalle.

Son aire vaut

$$\text{aire} = (t_2 - t_1)\, f(t_1) = (t_2 - t_1)\, \frac{1}{t_1}\,.$$



Dies ist ein fundamentales Element. Wir nehmen diese Funktion, immer noch 1/t, und nehmen ein Rechteck, pardon, irgendein Intervall von t1 bis t2. Wir nehmen t2 größer als t1. Und wir nehmen als Höhe des Rechtecks diesmal den Wert hier unten, dessen Höhe durch 1/t1 gegeben ist. Ich erhalte hier ein blaues Rechteck. Ich kann also die Fläche dieses Rechtecks berechnen. Nämlich als Basis mal Höhe, das heißt t2 minus t1, hier also der Funktionswert an der Stelle t1, d.h. 1/t1. Dies ist die Fläche des Rechtecks.

Notes

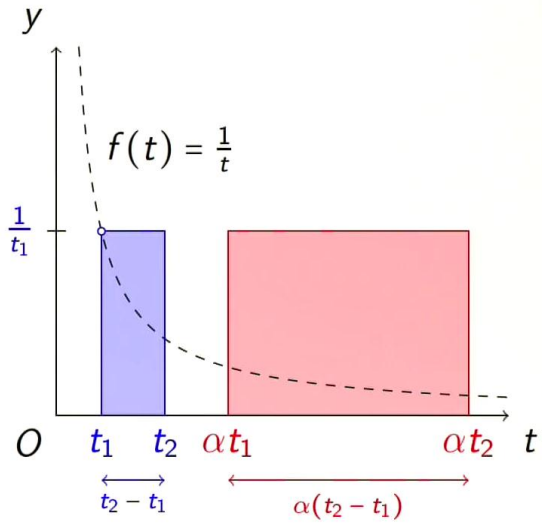
Summary

8m 25s

Invariance de l'aire d'un rectangle

Par l'application T_α, composée

- d'une dilatation selon Ot de $\alpha > 0$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nun wenden wir eine Abbildung an, die ich Tα nennen werde. Sie hängt von einem Parameter α ab, einer positiven reellen Zahl. Wir werden also Ot um einen Faktor α erweitern. Das heißt jeder Punkt, zum Beispiel dieser hier im blauen Rechteck hat einen Wert, eine Koordinate t, und ich multipliziere diese Koordinate t mit α und lasse die Koordinate y konstant und finde die Abbildung dieses Punkts hier. Das mache ich mit allen Punkten des blauen Rechtecks, und ich erhalte das rote Rechteck. Der Punkt t1 wird also auf α1 abgebildet, t2 auf α2, die Höhen y ändern sich nicht, und was herauskommt, ist das rote Rechteck.

Notes

Summary

9m 13s

Invariance de l'aire d'un rectangle

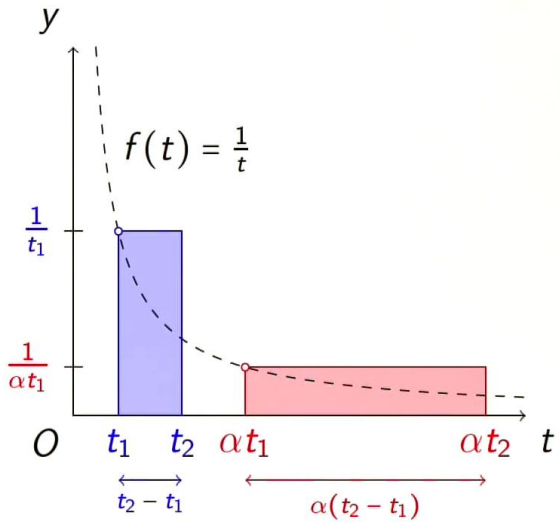
Par l'application T_α, composée

- d'une dilatation selon Ot de $\alpha > 0$ et
- d'une contraction selon Oy de $\frac{1}{\alpha}$,

on obtient un rectangle basé sur l'intervalle $[\alpha t_1, \alpha t_2]$ et de hauteur $\frac{1}{\alpha t_1} = f(\alpha t_1)$, image par f de αt_1, la borne inférieure de l'intervalle.

L'application T_α conserve l'aire :

$$\text{aire} = \alpha(t_2 - t_1)\frac{1}{\alpha t_1} = (t_2 - t_1)\frac{1}{t_1} = \text{aire}.$$



In einem zweiten Schritt wende ich nun eine Kontraktion auf die y-Achse an und erhalte das rote Rechteck hier, das seinen Wert behält, aber die Höhe, die 1/t1 war, multipliziere ich mit 1/(αt1) und erhalte dieses rote Rechteck hier, mit der Breite αt2 minus αt1, und die Höhe ist gegeben durch 1/α, mit der 1/t1 multipliziert wird, sodass 1/(αt1) genau der Funktionswert f(t) an der Stelle α t1 ist. So steht es hier, man erhält ein Rechteck auf der Basis des Intervalls αt1, α t2, dessen Höhe durch "f" an der Stelle αt1 gegeben ist. Wichtig ist, dass bei dieser Transformation Tα, also bei dieser Abfolge einer Erweiterung und einer Kontraktion die Flächen erhalten bleiben. In der Tat, wenn ich die rote Fläche hier berechne, habe ich das α, mit dem die Differenz t1, pardon, t2-t1 mal die Höhe multipliziert wird, die 1/(α1) ist, die α vereinfachen sich, und was herauskommt, ist genau die Formel für die blaue Fläche, das heißt t2 minus t1 mal 1/t1.

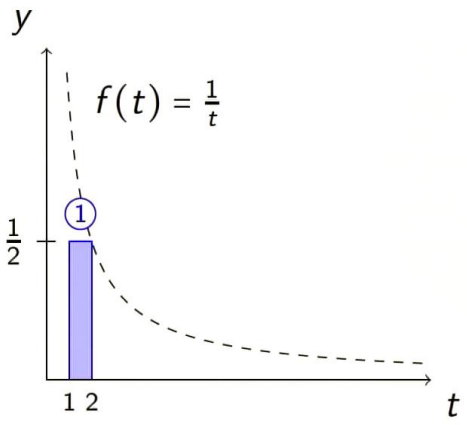
Notes

Summary

10m 05s

Exemple d'application

Considérons le rectangle ① basé sur l'intervalle $[1,2]$ et de hauteur $\frac{1}{2}$.



Jetzt werden wir diese Flächen- Erhaltung anwenden, um ein Resultat zu erhalten, das in sich interessant ist, und das uns dann helfen wird, den Logarithmus zu verstehen. Betrachten wir also ein Rechteck, das ich hier Nummer eins nenne, nämlich dieses hier auf der Basis des Intervalls eins zwei, und die Höhe ist diesmal gegeben durch den Funktionswert an der Obergrenze, also an der zwei, wenn ich zwei nehme, ergibt f(2) 1/2. Ich möchte anmerken, dass hier der Funktionsgraph nicht mit denselben Einheiten an der t-Achse wie an der y-Achse eingezeichnet ist. Man sieht das ohne Weiteres. Hier habe ich einen Abstand von 1, hier von 1/2. Wir haben das gemacht, um besser einzeichnen zu können, was geschieht.

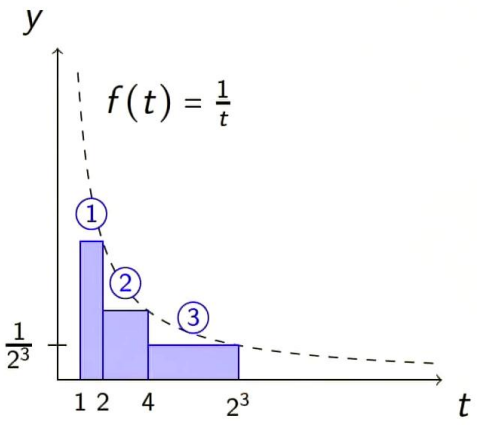
Notes

Summary

11m 28s

Exemple d'application

Le rectangle ② est transformé en un rectangle ③ basé sur $[2^2, 2^3]$ et de hauteur $\frac{1}{2^3}$ et ainsi de suite...



Nun wenden wir eine Abbildung von t2 an, wobei die Untergrenze 1 hier mit 2 multipliziert wird. Die Obergrenze 2 wird auch mit 2 multipliziert, das ergibt 4, und die Höhe wird durch 2 geteilt, ich erhalte also 1/4, und 1/4 ist genau der Funktionswert an der Obergrenze des zweiten Intervalls. habe also ein Rechteck, das von 2 bis 4 geht, mit der Höhe 1/4. Ich fahre fort, diesmal transformiere ich dieses Rechteck t2 mit derselben Abbildung t2. Das heißt, dass die Untergrenze 2 mit 2 multipliziert wird, das ergibt 4, die Grenze 2 wird mit 2 multipliziert, macht 8, und ich schreibe dies als 2 hoch 3, und die Höhe, die 1/4 war, wird durch 2 dividiert, und so erhalte ich 1/2 hoch 3. Wiederum gilt: Wenn ich die Obergrenze nehme, 2 hoch 3, und sie in die Funktion f(t) einsetze, erhalte ich die entsprechende Höhe. Auf diese Weise kann ich nun fortfahren, ich finde ein Rechteck aus 4, 5, 6, 7, schließlich N Teilen, und wo bin ich nun? Am Ende befinde ich mich an einem Grenzwert des Typs 2 hoch N. Die Untergrenze ist 2 hoch N-1. Um uns das klar zu machen, kommen wir auf die vorherige Grafik zurück. Sie sehen: Bei Nummer 3 hatte ich einmal 2 hoch 3 und einmal 2 hoch 2, und die Höhe war gegeben durch ein Halb hoch N.

Notes

Summary

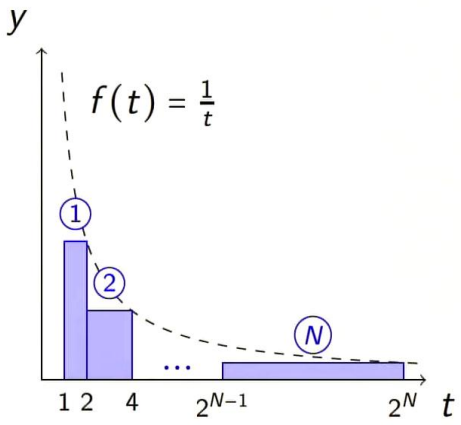
12m 15s

Exemple d'application

Tous les N rectangles sont de même aire, égale à $\frac{1}{2}$.

En sommant l'aire des rectangles ① à ⓝ, nous obtenons

$$\text{aire} = \frac{N}{2}.$$



Wir wissen also, dass jede dieser Flächen, die des ersten Rechtecks, des zweiten, dritten bis zum N-ten Rechteck den Wert 1/2 hat. Die Abbildung t2, die wir verwendet haben, um von 1 nach 2 zu gehen, dann von 2 nach 3, von 3 nach 4 usw., diese Abbildung erhält die Flächen, sodass alle diese Rechtecke dieselbe Fläche, nämlich ein Halb haben, und ich habe das N hier unter der Funktion 1/t mit dem Wert N mal ein Halb.

Notes

Summary

13m 48s

Exemple d'application

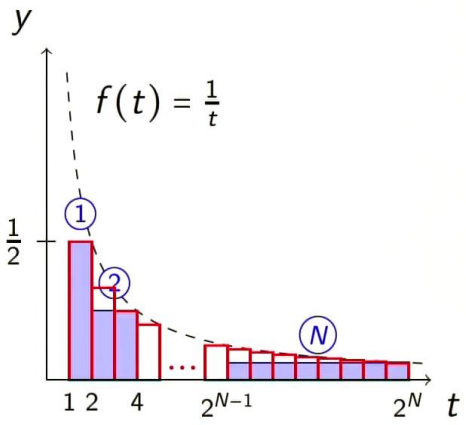
Cette aire est une minoration de la somme des inverses des entiers de 2 à 2^N :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}\geq\frac{N}{2}.$$

Lorsque $N\to\infty$, cette minoration tend vers ∞ et ainsi

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

La série harmonique diverge.



Wir können jetzt also Rechtecke derselben Breite einführen und nehmen immer Rechtecke der Breite 1. Zwischen 2 und 4 zum Beispiel haben wir am Punkt 3 eine neue vertikale Linie, wir nehmen das Rechteck zwischen 2 und 3 mit der Höhe 1/3 und zwischen 3 und 4 das Rechteck der Höhe 1/4, zwischen 4 und 8 tun wir dasselbe, und wir haben hier 1/5, 1/6, 1/7, 1/8. Wenn wir nun die Summe der roten Rechtecke bilden, erhalten wir hier 1/2, und hier 1/3 und 1/4 dann 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 etc. Das letzte hat den Wert zwei hoch N. Und die rote Fläche wird größer sein als die blaue mit dem Wert N/2. Uns interessiert, was geschieht, wenn N sehr groß wird. Wenn N also sehr groß wird, haben wir hier in Rot eine Summe, wir lassen N gegen unendlich gehen, man schreibt diese Summe normalerweise als k, das von 1 bis 1/k (k unendlich) geht, Sie sehen, wenn k gleich 1, dann ergibt das 1/1, ist k gleich 2, dann 1/2, wenn k gleich 3, dann 1/3 usw. und dass ich hier Unendlich schreibe, heißtnur, dass ich den Grenzwert einer endlichen Summe nehme, die bis N geht, ich habe also ein 1/N, wobei N sozusagen gegen Unendlich tendiert. Alos muss diese Summe größer als N/2 sein, wenn N gegen unendlich geht, sie wird also unendlich groß.

Notes

Summary

14m 22s

Exemple d'application

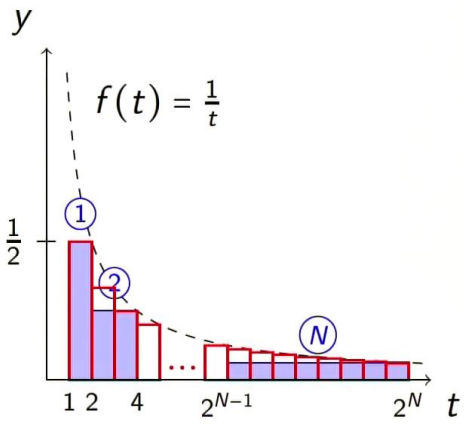
Cette aire est une minoration de la somme des inverses des entiers de 2 à 2^N :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}\geq\frac{N}{2}.$$

Lorsque $N\to\infty$, cette minoration tend vers ∞ et ainsi

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

La série harmonique diverge.



Diese Reihe, die Sie hier sehen, diese unendliche Summe, diese Reihe nennt man eine harmonische Reihe und das Ergebnis ist, dass es eine divergente harmonische Reihe ist. Beachten Sie: Wenn Sie auf die Funktion 1/t zurückkommen, bedeutet es, wenn Sie eine Fläche nehmen, sie durch die Konstante t begrenzen, sie nehmen die durch die t-Achse und die Funktion begrenzte Fläche und begrenzen sie nicht nach rechts, dann wird die Fläche darunter unendlich groß. Dieses Ergebnis impliziert die Divergenz der harmonischen Reihe.

Notes

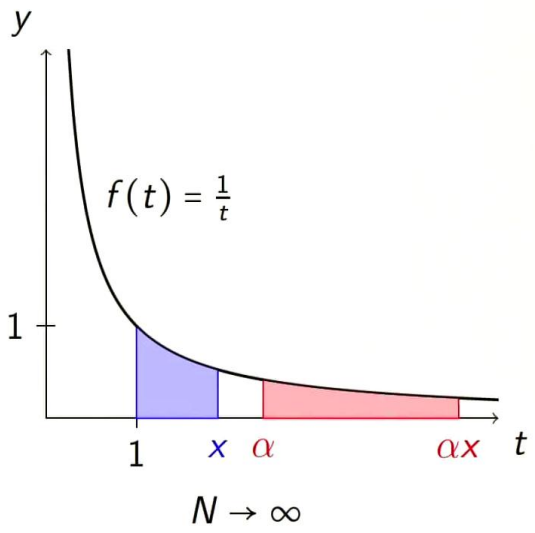
Summary

16m 12s

Propriété du logarithme

L'application T_α conserve l'aire d'un rectangle et donc également la somme des aires des rectangles construits sur une subdivision de l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N sous-intervalles.
Pour le cas limite $N \to \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t} &= \int_\alpha^{\alpha x} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{\alpha x} \frac{dt}{t} - \int_1^{\alpha} \frac{dt}{t} \\ \ln x &= \ln(\alpha x) - \ln \alpha \end{aligned}$$



Zurück zu den Logarithmen. Wir haben gesagt, dass die Abbildung Tα mit irgendeinem positiven α die Fläche für die vorliegende Situation bewahrt. Wir werden zu dem Ergebnis kommen, das ich jetzt entwickle. Ich nehme also die Funktion 1/t, ich nehme ein Rechteck das von 1 bis x geht, dieses Rechteck ist hier blau. Hier erhalte ich die Abbildung, das heißt 1 wird mit α multipliziert, x mit α, die Höhe wird durch α geteilt, ist also durch 1/α gegeben. Unterteilen wir es nun in N Intervalle, das heißt ich versuche, hier wirklich den log von x zu berechnen. Wir haben hier also die Situation N gleich 3, 4, 11 usw. Wenn ich N nehme und weiterhin gegen unendlich gehen lasse, stelle ich fest, dass die blauen und roten Flächen gleich sind. Sehen wir, was dies in der Sprache des Logarithmus bedeutet. In Blau kann man es leicht sagen, da ist es genau das Integral 1 bis x von dt/t, diese Größe finden Sie hier wieder, diese haben wir den log von x genannt. In Rot haben wir dieselbe Funktion 1/t, aber unten begrenzt durch α, oben durch αx, also kann man es in Rot ein wenig anders schreiben, wir versuchen, immern och eine Grenze kleiner als 1 zu haben, um zur Definition des log zurückzukehren, und ich behaupte, dass ich von 1 bis αx gehen und von 1 bis α subtrahieren kann.

Notes

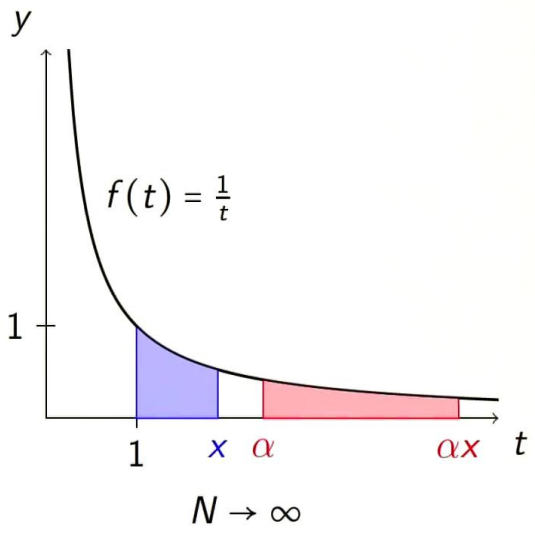
Summary

16m 56s

Propriété du logarithme

L'application T_α conserve l'aire d'un rectangle et donc également la somme des aires des rectangles construits sur une subdivision de l'intervalle $[1, x]$ $(x > 1)$ en N sous-intervalles.
Pour le cas limite $N \to \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t} &= \int_\alpha^{\alpha x} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{\alpha x} \frac{dt}{t} - \int_1^{\alpha} \frac{dt}{t} \\ \ln x &= \ln(\alpha x) - \ln \alpha \end{aligned}$$



Das ist die Additionseigenschaft, die ich am Anfang erwähnt habe. Wenn Sie sie formell überprüfen möchten, nehmen Sie diesen Term und ziehen ihn von der anderen Seite der Gleichung ab, und Sie sehen, dass Sie die Grenze α erhalten, die einmal die Untergrenze, einmal die Obergrenze ist und deshalb vielleicht irgendwie gelöscht werden kann. Sie können es auch gleich auf der Abbildung sehen, hier nehme ich also die markierte Fläche zwischen 1 und αx, das heißt eine positive Fläche, und subtrahiere die Fläche von 1 bis α, und was übrig bleibt, ist der rot markierte Teil. Dieser Term, das Integral von eins bis αx, ist der log von αx. Das Integral von eins bis α ist der log α. Ich erhalte also diese wichtige Beziehung, dass der log von x gleich dem log von αx minus log α ist.

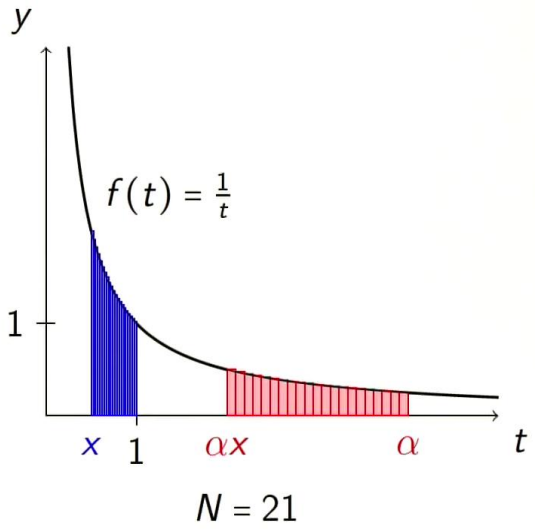
Notes

Summary

18m 38s

Propriété du logarithme

Il en est de même dans le cas $0 < x < 1$ où l'on divise l'intervalle $[x, 1]$ en N sous-intervalles.



Offensichtlich kann man sich fragen: Bleibt diese Eigenschaft auch dann wahr, wenn x kleiner als 1 ist, wenn es also zwischen 0 und 1 liegt. Machen wir also dasselbe, wir unterteilen die entsprechenden Flächen, man beginnt von 1 bis x, wobei x kleiner als 1 ist, mit der Abbildung Tα geht die 1 nach α, x nach αx, und hier habe ich immer noch in Rot das, was der Abbildung des blauen Teils durch Abbildung Tα entspricht. Ich erhöhe die Anzahl der Unterteilungen, auch hier, und wenn ich N gegen unendlich gehen lasse, komme ich wieder zu dem Ergebnis, dass diese Flächen gleich sind.

Notes

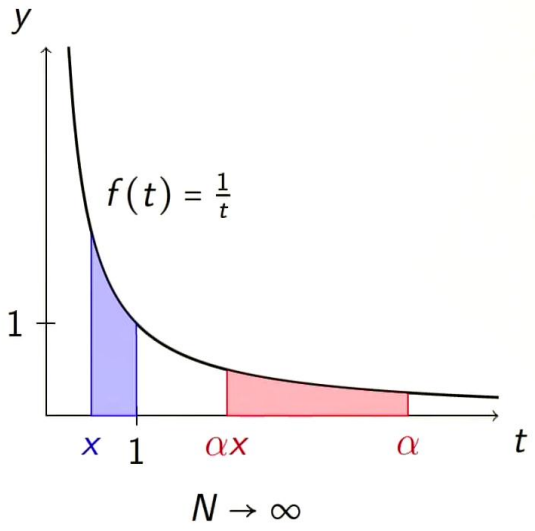
Summary

19m 32s

Propriété du logarithme

Il en est de même dans le cas $0 < x < 1$ où l'on divise l'intervalle $[x, 1]$ en N sous-intervalles.
Pour le cas limite $N \to \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t} &= \int_\alpha^{\alpha x} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{\alpha x} \frac{dt}{t} - \int_1^{\alpha} \frac{dt}{t} \\ \ln x &= \ln(\alpha x) - \ln \alpha \end{aligned}$$



Wir müssen also noch das Vorzeichen analysieren. Wenn ich das Integral von eins bis x nehme, ist das Vorzeichen dieser Fäche negativ, und hier nehme ich das Integral von α bis αx, und habe dieselbe Fläche mit negativem Vorzeichen, die Gleichheit ist also korrekt. Der Rest lässt sich genauso ableiten, man transformiert also dieses Integral zu einer Integraldifferenz und erhält den log von x, das ist der log von αx minus der log von α, und das gilt für alle α größer als 0.

Notes

Summary

20m 24s

Relation logarithmique fondamentale

Proposition

Pour tous $\alpha > 0$ *et* $x > 0$, *on a*

$$\boxed{\ln(\alpha x) = \ln \alpha + \ln x\,.}$$

Fassen wir alles in einem Satz zusammen: Für alle positiven α und alle positiven x gilt, dass der log des Produkts der log von α plus der log von x ist. Gehen wir zurück: Sie sehen hier, dass der log von x gleich dem log des Produkts minus log von α ist, man verschiebt nur α auf die andere Seite, so wird diese Eigenschaft normalerweise geschrieben, der Logarithmus hat also ein Produkt αx in eine Summe von logs transformiert, den log von α plus den log von x.

Notes

Summary

21m 00s

Relations logarithmiques

1. $\boxed{\ln 1 = 0}$

Par définition,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0\,,$$

l'aire sous la courbe entre 1 et 1 est nulle.

Sobald man diese wirklich fundamentale Eigenschaft kennt, folgt aus ihr eine ganze Reihe von Eigenschaften für diese natürliche Logarithmus-Funktion. Ich erinnere an die Definition: Der Wertebereich sind alle positiven x, das Ergebnis ist durch diese markierte Fläche gegeben. Die Eigenschaften sind also: Erstens, wenn ich den log von 1 nehme, erhalte ich 0, Sie sehen, der log von 1 ist das Integral von 1 bis 1 dx dt. Das bedeutet, dass die Fläche unter der Kurve der Funktion 1/t zwischen t=1 und t=1 liegt, also ist sie null.

Notes

Summary

21m 31s

Relations logarithmiques

1. $\boxed{\ln 1 = 0}$
2. $\boxed{\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)}$

C'est la relation logarithmique fondamentale.

Zweite Eigenschaft: Dies ist die fundamentale Beziehung, nämlich dass der Logarithmus des Produkts x1 mal x2 (beide positiv) der log von x1 plus der log von x2 ist.

Notes

Summary

22m 09s

Relations logarithmiques

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$
3. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad (x > 0)$
4. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$

Directement,

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 + \ln \frac{1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2 .$$

Dritte Eigenschaft: Wenn ich den log von 1/x erhalten möchte, muss ich nur den log von x mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nehmen. Dies gilt für alle positiven x. Warum? Nun, wir verwenden die beiden ersten Eigenschaften. Ich habe also 0, das gleich dem log von 1 ist, 1 kann ich als x mal 1/x schreiben, wenn x irgendeine positive Zahl ist. Ich habe hier ein Produkt und werde die zweite Eigenschaft nutzen, ich erhalte den log von x plus log von 1/x. Wir brauchen nur auzuflösen: 0 = log von x plus log von 1/x. Mit Bezug auf den letzten Term ergibt sich, dass der log von 1/x kleiner als der log von x ist. Vierte Eigenschaft: Der log eines Quotienten x1 durch x2, wobei x1 und x2 positiv sind, ist gegeben durch den log des Zählers, also von x1 minus den log des Nenners x2. Wieder ergibt sich dies unmittelbar aus den Sätzen 2 und 3, man muss nur x1 geteilt durch x2 als x1 mal 1/x2 schreiben, und erhält den log von x1, des ersten Terms der Multiplikation, plus den log des zweiten Terms 1/x2, und auf diesen log eins durch x2 wende ich Regel drei an und komme zu dem Ergebnis, dass es log von x1 minus log von x2 ist.

Notes

Summary

22m 21s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$

Pour $n = 2$,

$$\ln(x^2) = \ln(x\,x) = \ln x + \ln x = 2 \ln x .$$

Pour $n = 3$,

$$\ln(x^3) = \ln(x^2\,x) = 2 \ln x + \ln x = 3 \ln x ,$$

et ainsi de suite pour $n \in \mathbb{N}$.

Fünfte Eigenschaft, wenn ich ein positives x und ein ganzzahliges n habe, das positiv oder negativ sein kann, ist der log von x hoch n gegeben durch n mal log von x, das heißt die Potenz wird als Faktor vor den log gezogen. Sehen wir uns dies für positive und negative n an, zum Beispiel für n = 2, ich habe log von x² und schreibe x² als "x" mal "x", und nutze die fundamentale Eigenschaft des log, dass das Produkt transformiert wird in log von x plus log von x, also zweimal log von x. Für n=3 mache ich dasselbe und erhalte den log von x^3, ich schreibe x^3 als x² mal x, log von x² mal x das ist der log von x², also zweimal log von x, wie wir gerade gesehen haben, plus log von x, und insgesamt habe ich dreinal den log von x. Und so kann man immer weitermachen: für x hoch 4, 5, 6 usw., wenn Sie möchten, können wir dies durch vollständige Induktion demonstrieren. Sehen wir nun, was geschieht, wenn n eine negative Ganzzahl ist, zum Beispiel n=-2.

Notes

Summary

23m 50s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$

Pour $n = -2$,

$$\ln \frac{1}{x^2} = \ln \frac{1}{x\,x} = \ln \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} = -2 \ln x\,.$$

Pour $n = -3$,

$$\ln \frac{1}{x^3} = \ln \frac{1}{x^2\,x} = \ln \frac{1}{x^2} + \ln \frac{1}{x} = -3 \ln x\,,$$

et ainsi de suite pour $n \in \mathbb{Z}_-$.

Ich habe 1/x², den log von eins durch x², und schreibe dieses 1/x² als 1/(x mal x), oder, wenn Sie es lieber möchten, als 1/x mal 1/x, und die fundamentale Eigenschaft des log für Produkte gibt mir den log des ersten Faktors 1/x plus den log des zweiten Faktors 1/x, so erhalte ich beide Male denselben Term, und dieser log von 1/x ist nichts Anderes als minus log von x, ich bekomme also zweimal log von x, und so sehen wir gut, dass ich hier tatsächlich x hoch -2 habe, und dieses -2 wird vorgezogen. Für n=-3 verfahren Sie wiederum mit einer Art Induktion, Sie sagen: log von 1/x^3, schreiben dieses 1/x^3 als 1/x² mal 1/x, und erhalten den log von 1/x², den Sie gerade berechnet haben, Ihnen bleibt hier ein log von 1/x, der in der Tat kleiner ist als x, und das Ganze ergibt minus drei log x.

Notes

Summary

24m 56s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$

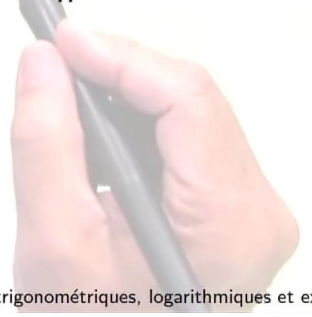
6. $\boxed{\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{N}^*)}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln x = \ln(\sqrt[n]{x})^n = n \ln \sqrt[n]{x}$$

et donc

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x .$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Sechste Eigenschaft: Der log der n-ten Wurzel aus x ist gegeben durch 1/n mal log x, hier muss das x also positiv sein, und n muss eine natürliche positive Zahl sein. 1, 2, 3, 4, 5. Warum? Hier der Grund: Man schreibt einfach den log von x, und dieses x wird als n-te Wurzel von x hoch n geschrieben, und ich weiß, dass dieses "hoch n" als Faktor vor den log gezogen werden kann, ich habe also n mal den log der n-ten Wurzel aus x. In dieser Gleichung also ln x = n mal n-te Wurzel aus x. Ich ziehe das n auf die andere Seite und erhalte dieses Resultat. Ein bemerkenswertes Resultat. Warum? Es ist bemerkenswert, weil Sie, wenn Sie diese n-te Wurzel aus x als x hoch eins durch n schreiben, wiederum Regel Nummer fünf haben, und die gilt immer, das stimmt.

Notes

Summary

25m 51s

Relations logarithmiques

5. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})}$
6. $\boxed{\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{N}^*)}$
7. $\boxed{\ln(x^p) = p \ln x \quad (x > 0, p \in \mathbb{Q})}$

Pour $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\begin{aligned} \ln x^p &= \ln x^{\frac{m}{n}} = \ln(\sqrt[n]{x})^m \\ &= m \ln \sqrt[n]{x} = \frac{m}{n} \ln x \\ &= p \ln x\,. \end{aligned}$$

Wenn Sie also ln von x^p nehmen, ist er p mal ln x. p kann zum Beispiel 1/n sein, wie hier oben, aber p kann zum Beispiel irgendeine rationale Zahl sein. Wenn p die Form m/n hat, wobei m eine positive oder negative Ganzzahl und n eine natürliche positive Zahl, also 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. ist. Wenn ich den log von x hoch p habe, wobei p m/n ist, sage ich zunächst, dass dies x ist, ich nehme die n-te Wurzel hoch m, das "hoch m" wird vorgezogen, die n-te Wurzel wird als 1 durch n vorgezogen, und dieses m/n ist p. Wir erhalten also diese Beziehung für p Element von Q. Wenn Sie die Eigenschaften fünf, sechs und sieben ansehen, so sind sie gleich. Eigenschaft sieben enthält das Resultat fünf sechs und sieben.

Notes

Summary

26m 47s

Relations logarithmiques

5. $\ln(x^n) = n \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{Z})$
6. $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x \quad (x > 0, n \in \mathbb{N}^*)$
7. $\ln(x^p) = p \ln x \quad (x > 0, p \in \mathbb{Q})$

Généralisation :

$\ln(x^y) = y \ln x \quad (x > 0, y \in \mathbb{R})$

Nous verrons que cette relation est généralisable aux exposants réels, même irrationnels, par une définition adéquate de x^y $(x > 0, y \in \mathbb{R})$.

Man kann diese Eigenschaft sieben sogar verallgemeinern: Man kann diese Potenz p durch eine Potenz y ersetzen, wobei y irgendeine reelle Zahl ist. Hier leite ich dieses Ergebnis noch nicht her, weil es fundamental davon abhängt, wie man Potenzen definiert, ich werde also nicht definieren, was eine Zahl x mit einer Potenz y ist, wobei y eine irrationale Zahl ist; ich könnte es tun, aber das würde zu viel Zeit kosten. Wir werden darauf zurückkommen, weil ich Ihnen eine Definition von x hoch y geben werde, wobei y irgendeine reelle Zahl ist. Diese Definition werde ich in einer der kommenden Lektionen geben.

Notes

Summary

27m 41s

Logarithme naturel

Ce que nous avons appris :

- définition du logarithme naturel en tant qu'aire signée
- propriétés de la fonction logarithme naturel.

Prochain Chapitre :

- Etude de la fontion ln et son graphe
- Nombre d'Euler e.

Fassen wir zusammen, was Sie heute gelernt haben: Sie haben die Definition des natürlichen Logarithmus als markierte Fläche gelernt, und Sie haben eine ganze Reihe von Eigenschaften dieses Logarithmus gelernt. Eigenschaften, die alle fundamental auf dieser selben Eigenschaft beruhen, nämlich, dass der log von α mal x gleich dem log von α plus dem log von x ist, wenn α und x zwei relle positive Zahlen sind. Beim nächsten Mal werden wir den Graphen der Funktion des natürlichen log untersuchen und eine Eulersche Zahl "e" einführen. Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

28m 19s