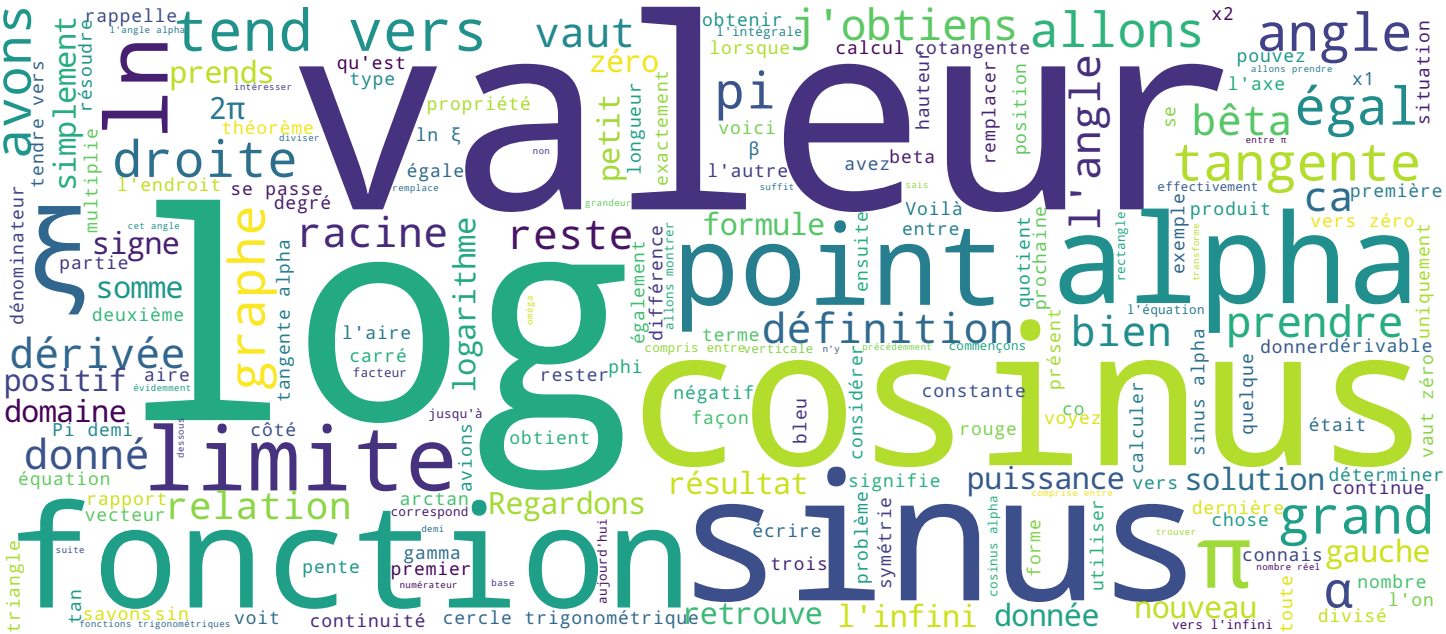
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.2 Le graphe du logarithme naturel

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen



Search MOOC

Video

EPFL

Etude de la fonction ln x

Nous allons montrer que la fonction logarithme naturel

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

est

Bonjour. La dernière fois, nous avons introduit la notion de logarithme naturel d'un nombre positif *x*. Nous l'avons défini comme l'aire signée d'une surface comprise entre l'axe horizontal des *t*, entre le graphe de la fonction *1/t*, et entre les verticales *t* égal à 1 et *t* égal à *x*. Aujourd'hui, nous revenons sur ce log naturel mais nous allons le considérer avant tout comme une fonction. Voici donc le log naturel comme fonction, c'est-à-dire qu'il prend un nombre *x* positif, un nombre réel positif, le transforme en log *x* et nous avons défini précisément ce log comme l'intégrale de 1 à *x* de la fonction *1/t*. Je vous rappelle que le logarithme naturel a des propriétés intéressantes par rapport au produit. Par exemple, le logarithme de *x* fois *y*, du produit, donne la somme des logarithmes, c'est-à-dire log *x* plus log *y*. On a eu des propriétés similaires pour le logarithme du quotient *x* sur *y* et aussi pour le logarithme d'une puissance, c'est-à-dire le logarithme de *x* puissance *y* redonnait *y* fois log de *x*, toujours pour des *x* et *y* qui étaient réels positifs.

Notes

Summary

0m 04s

Etude de la fonction ln x

Nous allons montrer que la fonction logarithme naturel

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

est

- strictement croissante
- non bornée, $\boxed{\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$
- continue
- dérivable, $\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$.

Donc à des puissances, *y* pouvait être vraiment réel quelconque. Alors aujourd'hui, qu'est-ce que nous allons faire ? Nous allons démontrer quatre propriétés. Nous allons montrer que le log, tel qu'il est défini là, est strictement croissant. Nous allons montrer qu'il est non borné, c'est-à-dire que si *x* devient très grand, c'est-à-dire je me déplace sur le bord droit du domaine de définition, la fonction va prendre des valeurs de plus en plus grandes, nous avons donc cette limite de log *x* est plus l'infini. Nous allons également prendre des valeurs de *x* positives et nous approcher du bord gauche du domaine de définition, donc la limite pour *x* vers zéro, depuis la droite, et là, le log *x* va tendre vers moins l'infini. Nous allons montrer que la fonction log *x* est continue et qu'elle est même dérivable et nous allons déterminer la valeur de cette dérivée et nous allons trouver une réponse simple, *1/x*, et peut-être surprenante puisqu'elle sort nettement du cadre log ou trigonométrique. On obtient une simple expression algébrique.

Notes

Summary

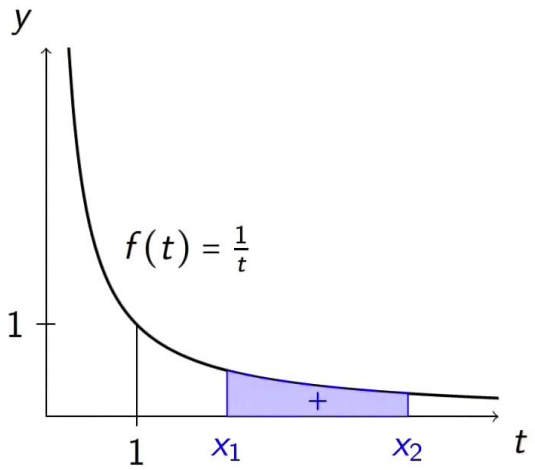
1m 24s

Croissance stricte de $\ln x$

Soient $x_1, x_2 > 0$ avec $x_2 > x_1$. La règle d'addition permet d'écrire

$$\begin{aligned} \ln x_2 &= \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \ln x_1 + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t}}_{\text{aire} > 0} \end{aligned}$$

ainsi $\ln x_2 > \ln x_1$ lorsque $x_2 > x_1 > 0$.



Prenons la première de ces propriétés. Nous allons montrer que le logarithme de *x* est strictement croissant. Qu'est-ce qu'on entend par là ? Nous allons prendre deux valeurs *x1* et *x2* simplement positives, donc dans le domaine de définition, et on va prendre une valeur qui est plus petite que l'autre donc *x1* plus petit que le *x2*. Cela vous le retrouvez ici dans la figure. Vous pouvez tout à fait considérer aussi le cas où *x1* est en-dessous de 1 et *x2* en-dessous ou en-dessus, cela ne joue aucun rôle. Alors, je vous rappelle que le log de *x2* c'est cette intégrale, donc c'est l'aire comprise entre le graphe de la fonction, entre l'axe des *t*, entre *t* égal à 1 et *t* égal à *x2*. Alors cette aire, je peux dire que c'est l'aire de 1 jusqu'à *x1*, ici, plus *x1* jusqu'à *x2*. C'est cette propriété d'addition que nous avions mentionnée. Vous voyez que ici la borne *x1* apparaît une fois comme borne supérieure et une fois comme borne inférieure et nous avions établi le fait que ces deux lignes sont bel et bien identiques. Alors le premier, c'est simplement le log de *x1*, par définition, et ce qui reste, c'est une aire entre *x1* et *x2*.

Notes

Summary

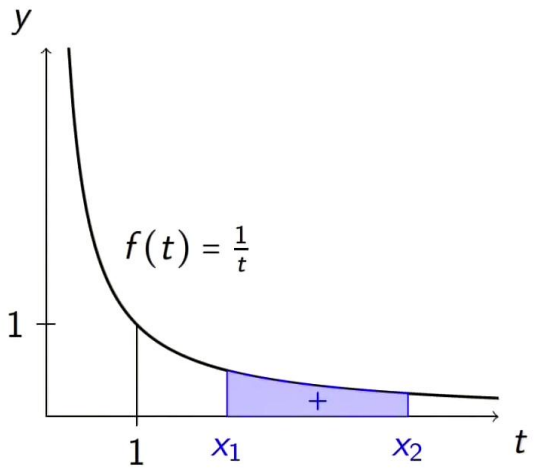
2m 33s

Croissance stricte de $\ln x$

Soient $x_1, x_2 > 0$ avec $x_2 > x_1$. La règle d'addition permet d'écrire

$$\begin{aligned} \ln x_2 &= \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \ln x_1 + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t}}_{\text{aire} > 0} \end{aligned}$$

ainsi $\ln x_2 > \ln x_1$ lorsque $x_2 > x_1 > 0$.



Alors le *x2* est plus grand que le *x1* donc ça va être une aire positive, c'est-à-dire que l'on obtient bel et bien que *ln x2* c'est *ln x1* plus quelque chose de positif, donc *ln x2* est plus grand que *ln x1* si *x2* est plus grand que *x1*. Donc la fonction du logarithme est une fonction qui est strictement croissante.

Notes

Summary

3m 54s

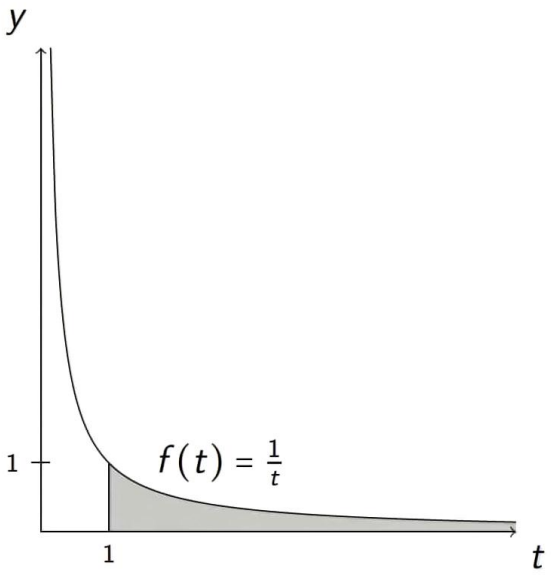
Limites aux bords du domaine de $\ln x$

Par définition,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x$$

est l'aire signée sous la courbe de $t = 1$ à $t \to \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{dt}{t}.$$



Venons-en aux deuxièmes propriétés, celles qui touchaient au comportement de la fonction logarithmique lorsque l'on s'approche avec *x* ou du bord droit ou du bord gauche du domaine de définition. Commençons par le bord qui est à droite, c'est-à-dire commençons par analyser ce qui se passe avec le logarithme de *x* lorsque *x* tend vers plus l'infini. Du point de vue géométrique, ce qui se passe, vous le voyez ici dans le graphe, donc ce que l'obtient, on prend l'aire signée entre 1 et une grande valeur de *x* et le *x* devient de plus en plus grand. Donc en fait, cette limite, c'est ce que l'on dénombre souvent en calcul d'intégrale, l'intégrale de 1 jusqu'à l'infini de *dt/t*, c'est-à-dire que la borne qui est à droite file simplement jusqu'à l'infini.

Notes

Summary

4m 17s

Limites aux bords du domaine de $\ln x$

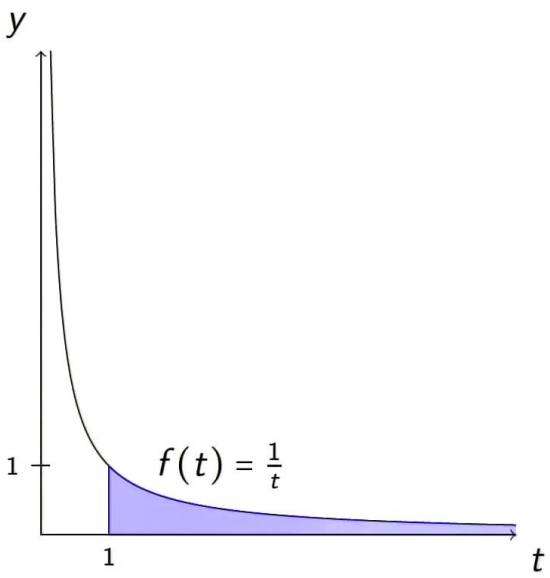
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, cette aire est supérieure à celle comprise entre 1 et 2^N :

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} > \int_1^{2^N} \frac{dt}{t} = \ln(2^N) = N \ln 2 .$$

Alors, pour $N \to \infty$,

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} > \lim_{N\to\infty} N \ln 2 = \infty ,$$

et nous obtenons $\boxed{\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty}$.



Alors prenons un nombre *N*, un entier positif qui va devenir très grand, et là vous avez donc l'aire entre 1 et on va prendre 2 puissance *N*, cela va nous arranger comme un grand *x*. Alors l'intégrale qui va de 1 jusqu'à l'infini donc où la borne à droite file vers l'infini, donc elle est sûrement majorée et strictement majorée, ça c'est la croissance stricte du logarithme. Pardon, elle est minorée, strictement minorée par l'intégrale qui va de 1 jusqu'à 2 puissance *N*, de 1 jusqu'à 2 puissance *N*. Et ça, par définition, c'est le log de 2 puissance *N* et une propriété du logarithme dit que cette puissance *N* je peux la placer devant comme un produit, c'est *N* fois le log de 2. Alors qu'est-ce qu'il arrive lorsque *N* devient très grand, lorsque *N* devient justement très grand ? Cette borne 2 puissance *N* ici, elle va filer vers plus l'infini et on obtient donc que l'intégrale est... J'ai mis plus grand, en fait, c'est plus grand ou égal ici, plus grand ou égal que cette limite qui est plus l'infini, donc nous obtenons bel et bien que la limite pour *x* vers l'infini de log *x* est plus l'infini.

Notes

Summary

5m 07s

Limites aux bords du domaine de $\ln x$

Par définition,

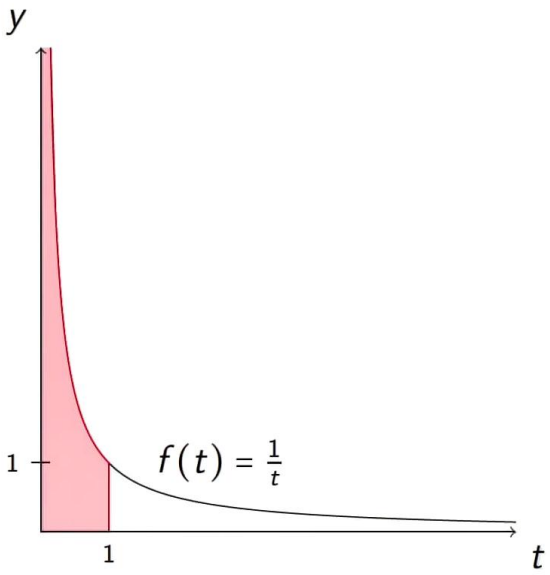
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x$$

est l'aire signée sous la courbe de $t = 1$ à $t = 0$.

Rappelons que cette aire est négative.

Posant $z = \frac{1}{x}$, on a $\ln x = \ln \frac{1}{z} = -\ln z$ et $\lim_{x\to 0^+} z = \infty$.

Nous obtenons donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$.



Regardons ce qui se passe lorsque je m'approche avec mon *x* vers le bord gauche du domaine de définition, donc lorsque *x* tend vers zéro depuis la droite. Alors, le log de *x*, qui donne l'aire signée entre *x* et 1, ici en rouge, une aire qui prend ici le signe négatif, et on va voir ce qui se passe lorsque *x* tend vraiment vers zéro. Alors on peut se ramener au cas précédent en posant simplement que *z* égal *1/x*. Alors ce log de *x*, ici, va s'écrire log de *1/z* et les propriétés du logarithme permettent d'écrire que c'est moins le log de *z*. Donc je peux remplacer ce log de *x* par moins log de *z*. En outre, si le *x* tend vers zéro depuis la droite, le *z* va tendre vers plus l'infini. Donc cette limite, *x* vers zéro de *ln x*, c'est la même chose que la limite de - *ln z* pour *z* vers l'infini. Alors nous avons précédemment étudié cette limite, la voilà, simplement ici, il y a des *x* au lieu des *z*. Donc nous allons utiliser ce résultat que nous avions précédemment et le signe moins reste et nous obtenons donc moins l'infini cette fois-ci. Résumons donc. Si *x* tend vers plus l'infini, le log devient infiniment grand, si *x* tend vers zéro, depuis la droite, le log de *x* devient infiniment petit.

Notes

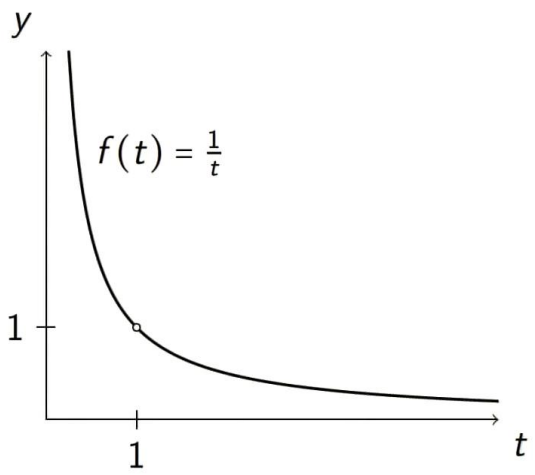
Summary

6m 20s

Continuité de $\ln x$

Montrons pour commencer que $\ln x$ est continue en $\xi = 1$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 1} \ln x = 0 = \ln 1 .$$



Regardons la troisième propriété, celle de la continuité du log. Elle est assez importante parce que si le logarithme est continu, cela va signifier, entre autre, que toutes les valeurs entre moins l'infini et plus l'infini sur l'axe des *y* seront des valeurs prises par la fonction. Ça, ça va être un résultat qui est capital et important. Donc la continuité, c'est important. Alors commençons par étudier cette continuité en un point. Alors le point, la valeur fixe de *x*, je vais l'appeler ξ (ksi), là, donc ξ vaut 1. Le log de 1, donc la surface signée est comprise entre *t* égal à 1 et *t* égal à 1, donc elle vaut zéro, ça nous sommes d'accord, et la fonction est continue si la limite lorsque *x* tend vers 1 de *ln x* redonne *ln* à l'endroit 1. Donc il faut trouver, il faut démontrer que la limite pour *x* vers 1 de *ln x* vaut, bel et bien, zéro. Alors nous allons distinguer deux cas, une fois nous allons prendre *x* plus grand que 1 et faire tendre *x* vers 1, et l'autre fois, nous allons prendre *x* plus petit que 1 et faire tendre *x* depuis la gauche vers 1.

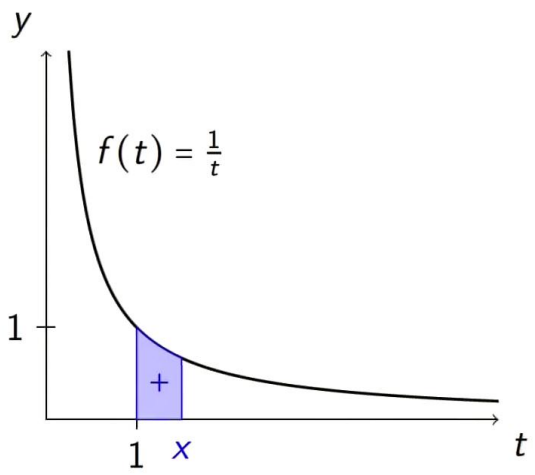
Notes

Summary

7m 52s

Continuité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$.



Alors regardons ce qui se passe si je prends une valeur de x juste un peu plus grande que 1. Là, nous savons déjà par croissance stricte que le log de x est positif, nous le savons aussi par le fait que le log de x dans ce cas-là est une aire avec un signe plus.

Notes

Summary

9m 05s

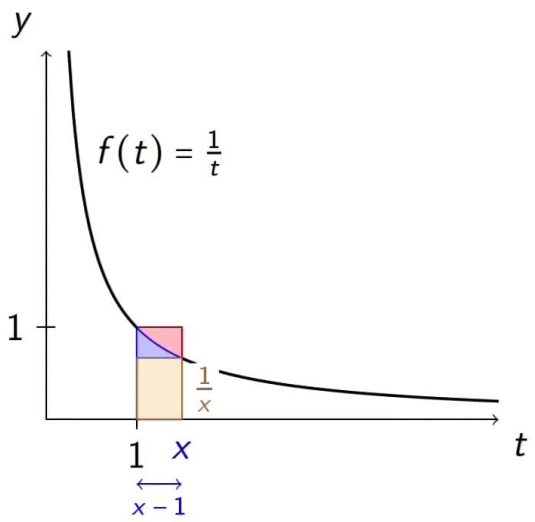
Continuité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$.
  L'aire géométrique sous la courbe est comprise entre celle de deux rectangles, l'un de hauteur $\frac{1}{x}$ et l'autre de hauteur 1 :

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)\,1\,.$$

  Lorsque x tend vers 1 par la droite, les expressions encadrant $\ln x$ tendent toutes deux vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0\,.$$



On peut, regardons encore une fois. On a l'aire ici en bleu. On peut minorer et majorer cette aire de la façon suivante : Donc j'ai le log *x*, c'était l'aire qui était en bleu, minorons. Alors je prends comme largeur *x* - *1* et comme hauteur la valeur de la fonction sur le bord droit de cet intervalle 1 à *x*, donc fois *1/x*. Ça, ça me donne l'aire d'un rectangle et cette aire sera plus petite que log de *x*. Majorons. C'est-à-dire que nous reprenons un rectangle de même largeur *x* - *1* mais cette fois-ci comme hauteur, nous prenons la valeur maximale possible de la fonction *1/t* sur cet intervalle qui va de *1* à *x*, c'est-à-dire la valeur de 1. Donc nous pouvons minorer et majorer la valeur de log de *x* par deux expressions algébriques. Regardons ce qui se passe à présent lorsque *x* tend vers 1, le *x* étant toujours plus grand que 1. Alors si je commence avec l'expression à droite, le *x* - *1* va tendre vers zéro, zéro fois un, donc là, ça va se stabiliser à zéro. Sur la gauche, le *x* - *1* se stabilise, la limite va être zéro. Le *1/x*, lorsque *x* tend vers 1, va donner 1.

Notes

Summary

9m 20s

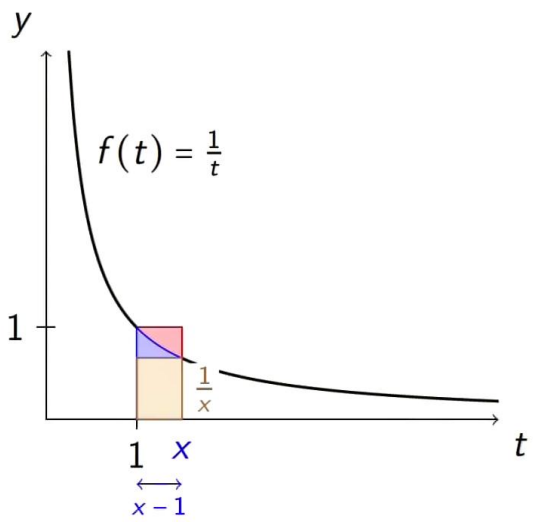
Continuité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$.
  L'aire géométrique sous la courbe est comprise entre celle de deux rectangles, l'un de hauteur $\frac{1}{x}$ et l'autre de hauteur 1 :

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)1.$$

  Lorsque x tend vers 1 par la droite, les expressions encadrant $\ln x$ tendent toutes deux vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0.$$



Le produit va se stabiliser également vers zéro, la limite est zéro, donc le *ln x* en fait est coincé lorsque *x* tend vers 1 depuis la droite, entre une limite zéro et une limite zéro donc la limite de *ln x* lorsque *x* tend vers 1 depuis la droite va valoir zéro. C'est le résultat que nous chercherons et nous aimerions, évidemment, que sur la gauche, on retrouve le résultat similaire.

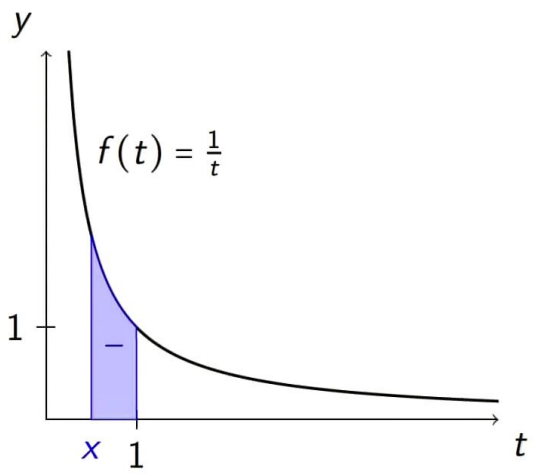
Notes

Summary

10m 42s

Continuité de $\ln x$

- Pour $x < 1$, on a $\ln x < 0$.



Alors effectivement, vous pouvez faire un raisonnement tout à fait analogue lorsque x est en-dessous de 1, entre zéro et 1. Là, le log de x, cette fois-ci, c'est cette aire en bleu munie du signe moins.

Notes

Summary

11m 05s

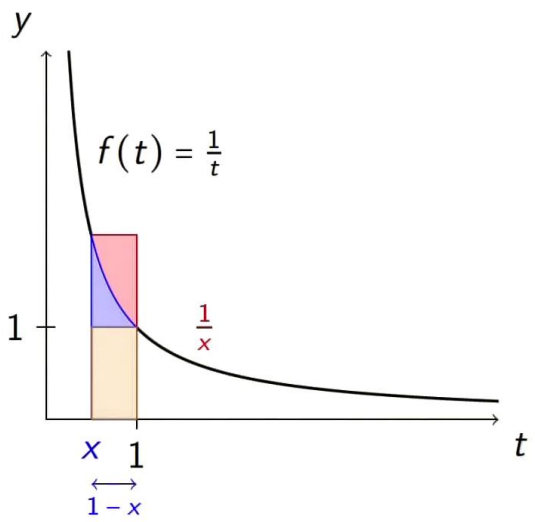
Continuité de $\ln x$

- Pour $x < 1$, on a $\ln x < 0$.
  L'aire géométrique sous la courbe est comprise entre celle de deux rectangles, l'un de hauteur $\frac{1}{x}$ et l'autre de hauteur 1 :

$$(1-x)\,1 < -\ln x < (1-x)\,\frac{1}{x}.$$

  Lorsque x tend vers 1 par la gauche, les expressions encadrant $-\ln x$ tendent toutes deux vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 1^-} \ln x = 0.$$



Pour pouvoir comparer des aires, nous allons prendre l'aire avec le signe positif, donc on va prendre - *ln x*, qui était l'aire de la partie en bleu ici, et nous minorons et majorons comme la dernière fois. Donc la largeur, les deux fois c'est *1 - x*, la hauteur, une fois elle est donnée par 1, ça on minore, et la hauteur ici qui majore, elle est donnée par la valeur de la fonction *1/t* à l'endroit *x*, donc j'ai *1/x*. On retrouve maintenant le même résultat que précédemment lorsque *x* tend vers 1, le - *ln x* à la limite sera situé entre 0 et 0, donc cette fois-ci, cette limite pour *x* tendant vers 1 depuis la gauche est également 1.

Notes

Summary

11m 17s

Continuité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est continue en $\xi = 1$: $\lim_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est continue en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\lim_{x\to\xi} (\ln x - \ln \xi) = \lim_{x\to\xi} \ln \frac{x}{\xi} = \lim_{z\to 1} \ln z = 0,$$

si bien que $\lim_{x\to\xi} \ln x = \ln \xi$.

La fonction $\ln x$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et cela signifie, évidemment, que la limite pour *x* tendant vers 1, que ce soit à gauche ou à droite, que se soit en sautillant à gauche et à droite, de *ln x* vaut toujours zéro, qui est *ln 1*. Et ça, c'est la continuité de la fonction log au point ξ égal à 1. Alors ce qui est remarquable, c'est que une fois que cette fonction est continue en un point, cela signifiera qu'elle va être continue partout et la clé qui va donner le résultat ce sont les propriétés du logarithme. Regardons ça d'un peu plus près. On va se mettre maintenant, non pas en ξ égal à 1, mais on va prendre pour ξ une valeur fixe quelconque réelle positive. Alors ce qui nous intéresse c'est où est-ce que le *ln x* se stabilise lorsque *x* tend vers ξ. Nous aimerions que la réponse soit *ln ξ*, ça signifie que nous aurions continuité. Alors nous allons, pour simplifier les calculs, nous intéresser où est-ce que se stabilise cette différence *ln x* - *ln ξ* lorsque *x* tend vers ξ ?

Notes

Summary

12m 01s

Continuité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est continue en $\xi = 1$: $\lim_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est continue en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\lim_{x\to\xi} (\ln x - \ln \xi) = \lim_{x\to\xi} \ln \frac{x}{\xi} = \lim_{z\to 1} \ln z = 0,$$

si bien que $\lim_{x\to\xi} \ln x = \ln \xi$.

La fonction $\ln x$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc nous calculons la valeur de la limite pour *x* vers ξ de la différence *ln x* - *ln* ξ et nous aimerions que ce soit zéro parce que si cette limite donne zéro, et nous allons le montrer dans un instant, si elle vaut zéro, ça signifie qu'en fait la limite pour *x* vers ξ de *ln x* est *ln* ξ et cela signifie que la fonction est continue. Alors comment attaquer cette limite ? Alors on a une différence de log et une propriété fondamentale du log dit que cela représente alors le log du quotient. Donc je peux remplacer ce log de *x* moins log de ξ par le log de ce quotient *x*/ξ. Alors regardons ce qui arrive lorsque *x* tend vers ξ. Je peux appeler ce *x*/ξ, *z*, donc j'ai un *ln z*, et si *x* tend vers ξ, ce quotient tend vers 1. Donc ici, j'ai à nouveau cette limite *z* vers 1 de *ln z*, c'est tout à fait cette limite-ci, et elle redonne zéro. Donc on peut utiliser cette continuité en un point ξ égal à 1, pour retrouver la continuité du log en tout point ξ réel positif.

Notes

Summary

13m 06s

Dérivabilité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, nous avons donné l'encadrement

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)\,1\,.$$

En divisant par $x-1$,

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1\,.$$

Lorsque x tend vers 1 par la droite, les expressions encadrant $\frac{\ln x}{x-1}$ tendent toutes deux vers 1. Ainsi

$$\ln'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1\,.$$

La dérivabilité est une propriété plus forte que la continuité et on va s'intéresser maintenant à cette propriété qui est encore plus forte. Alors regardons, de nouveau, est-ce que la fonction *ln x* est dérivable ? On va rejouer un peu le même jeu en un point et nous verrons qu'une fois qu'elle est dérivable en un point, elle va être dérivable de nouveau partout. Donc je vais m'intéresser à la dérivée du log au point ξ égal à 1, c'est-à-dire le log prime, dérivé, à l'endroit 1. Par définition, je dois donc prendre le log *x*, *x* proche de 1, *x* va tendre vers 1, log de *x* moins log de 1 divisé par *x - 1*. Alors le log de 1, lui, il vaut zéro, donc il me reste log de *x* sur *x - 1* et nous allons montrer que cette limite existe et qu'elle vaut 1. De nouveau, nous allons analyser séparément les cas *x* tend vers 1 depuis la droite et *x* tend vers 1 depuis la gauche. Et je commence par le cas où *x* est plus grand que 1 donc va tendre vers 1 depuis la droite. Donc pour *x* plus grand que 1.

Notes

Summary

14m 17s

Dérivabilité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, nous avons donné l'encadrement

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)\,1\,.$$

En divisant par $x-1$,

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1\,.$$

Lorsque x tend vers 1 par la droite, les expressions encadrant $\frac{\ln x}{x-1}$ tendent toutes deux vers 1. Ainsi

$$\ln'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1\,.$$

Alors on avait donné un encadrement, précédemment, pour le log de *x*, c'était la comparaison, ou c'était l'encadrement obtenu par l'aire de deux rectangles, l'un plus petit et l'autre plus grand que l'aire représentée par *ln x* pour *x* plus grand que 1. Alors ça c'était le résultat obtenu. Alors, à présent, revenons en arrière.

Notes

Summary

15m 31s

Dérivabilité de $\ln x$

- Pour $x < 1$, nous avons donné l'encadrement

$$(1-x)\,1 < -\ln x < (1-x)\,\frac{1}{x}.$$

En divisant par $1-x$,

$$1 < \frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x}.$$

Lorsque x tend vers 1 par la gauche, les expressions encadrant $\frac{\ln x}{x-1}$ tendent toutes deux vers 1. Ainsi

$$\ln'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Vous voyez, le *ln x* doit être divisé par *x - 1*. *x - 1* est une grandeur positive, je peux diviser et j'obtiens alors l'encadrement *1/x* plus petit que log de *x* divisé par *x - 1* plus petit que 1. Maintenant, si *x* tend vers 1 depuis la droite, le *1/x* tend vers 1, le 1 tend vers 1, donc avec cet encadrement, par la règle des gendarmes si vous voulez, on va obtenir que le log de *x* sur *x - 1* tend bel et bien vers 1. Ce raisonnement vous pouvez le reprendre pour *x* plus petit que 1, il suffit de remplacer l'encadrement que je viens d'utiliser par l'encadrement qui était valable pour *x* plus petit que 1. Je vous rappelle qu'il est là, il y a un signe moins sur ce log, cela va nous arranger beaucoup. Alors nous devons diviser par... Alors on va diviser par *1 - x*, *1 - x* qui est positif, donc là il reste 1, là il reste *1/x* et ici, le moins je le neutralise en remplaçant le *1 - x* par *x - 1*. Donc là, je tombe exactement sur l'expression qui m'intéresse et de nouveau lorsque *x* tend vers 1, à gauche et à droite les limites sont égales et valent 1 et j'obtiens le fait que la limite de *ln x - ln 1* sur *x - 1*, donc cette limite qui donne la dérivée sur la gauche, vaut bel et bien 1 aussi.

Notes

Summary

15m 50s

Dérivabilité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est dérivable en $\xi = 1$: $\ln'(1) = 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est dérivable en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\ln'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln x - \ln \xi}{x - \xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln \frac{x}{\xi}}{\xi(\frac{x}{\xi} - 1)} = \frac{1}{\xi} \lim_{z\to 1} \frac{\ln z}{z - 1} = \frac{1}{\xi} \ln'(1) = \frac{1}{\xi}.$$

La fonction $\ln x$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Donc on peut en déduire que le log de *x* est dérivable, en tout cas en un point ξ égal à 1 et que cette dérivée vaut 1. Alors comme nous l'avons fait pour la continuité, une fois que la fonction est dérivable en un point, elle va être dérivable partout. Alors regardons. On va prendre un ξ réel positif fixe et si je veux calculer la dérivée en ce point, je dois considérer la différence *ln x*, le *x* va tendre vers ξ, *ln x* - *ln* ξ sur *x* - ξ, ça, par définition, c'est la dérivée de la fonction log en un point fixe ξ. De nouveau, la différence des deux log, ici, me donne le log du quotient *x*/ξ. Au dénominateur, je vais essayer de faire apparaître également un *x*/ξ. Je peux le faire aisément en mettant ce ξ en évidence. Alors il va me rester un ξ qui multiplie, le *x* est remplacé par *x* - ξ, on voit très bien là, par multiplication, on retrouve le *x*, moins et le 1, le ξ est mis en évidence. Alors ce ξ, qui est une constante, le *x* bouge vers ξ mais ξ est une constante, je peux passer devant la limite *1/*ξ.

Notes

Summary

17m 25s

Dérivabilité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est dérivable en $\xi = 1$: $\ln'(1) = 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est dérivable en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\ln'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln x - \ln \xi}{x - \xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln \frac{x}{\xi}}{\xi(\frac{x}{\xi} - 1)} = \frac{1}{\xi} \lim_{z\to 1} \frac{\ln z}{z - 1} = \frac{1}{\xi} \ln'(1) = \frac{1}{\xi}.$$

La fonction $\ln x$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Comme précédemment ce *x/ξ* je peux l'appeler *z*, donc j'ai *ln z*. Là il me reste un *z - 1* et la limite... Alors si *x* tend vers *ξ*, qu'est-ce qui se passe avec ce *z* qui est *x/ξ* ? Alors il va tendre vers 1, il me reste ici la limite pour *z* vers 1 de *ln z* sur *z - 1* et ça, c'est exactement la dérivée à l'endroit 1 donc il me reste un *1/ξ*. Alors si on passe au langage plus usuel, c'est-à-dire que la dérivée je ne veux pas la calculer à l'endroit *ξ* pour obtenir *1/ξ* mais je dis simplement, je réécris en langage *x*, l'emploi du *ξ* était intéressant pour pouvoir évaluer de telles expressions où on avait un *x* qui apparaissait mais donc la dérivée de *ln x*, la dérivée de *ln ξ* c'est donc *1/ξ*, la dérivée de *ln x* donne *1/x*. Alors nous avons montré que le logarithme est strictement croissant, qu'il tend vers plus l'infini si *x* tend vers plus l'infini, qu'il tend vers moins l'infini lorsque *x* tend vers moins l'infini. Nous avons montré que le logarithme est continu. On a montré qu'il est dérivable. Mettons le tout ensemble et regardons ce que cela signifie pour le graphe.

Notes

Summary

18m 42s

Graphe du logarithme naturel

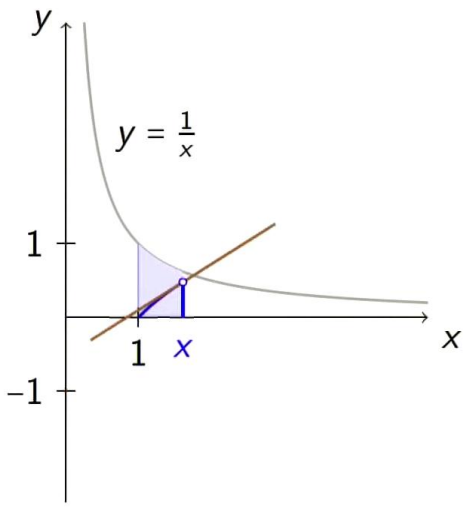
Nous sommes maintenant en mesure de représenter le graphe de $\ln x$.

- Pour $x = 1$,

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln'(1) = 1.$$

- Pour $x > 1$,

$$\ln(x) > 0 \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x} < 1.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Voilà. Alors on va considérer ce système d'axes, cette fois-ci, je l'appelle *x*,*y* parce que je vais dessiner le graphe de la fonction qui transforme *x* en *ln x*. Ici, l'hyperbole, qui était avant *1/t*, je l'appelle *1/x*, cela nous permettra de comparer un peu mieux les choses. Alors si *x* vaut zéro, ça nous l'avions déjà dit, le *ln* à l'endroit 1 vaut 0, simplement parce que ça c'est l'aire comprise entre la verticale 1 et 1, l'aire est nulle. Nous savons aussi que la dérivée vaut 1, donc le graphe va passer par ce point, en *x* égal à 1, il vaut zéro, et la pente va être une pente de 1. Lorsque *x* augmente, qu'est-ce qu'il va arriver ? On va faire augmenter *x*. Alors au fur et à mesure que le *x* augmente, le log va être l'aire correspondante sous l'hyperbole, donc le log de *x* va devenir plus grand. La dérivée qui donne la pente de cette fonction va être donnée par *1/x*. On retrouve cette hyperbole justement dans la dérivée. La pente va devenir de plus en plus petite, c'est-à-dire que le log aura tendance à croître de moins en moins. Regardons ça de plus près. Alors là, on voit très, très bien comment ce log croît.

Notes

Summary

19m 57s

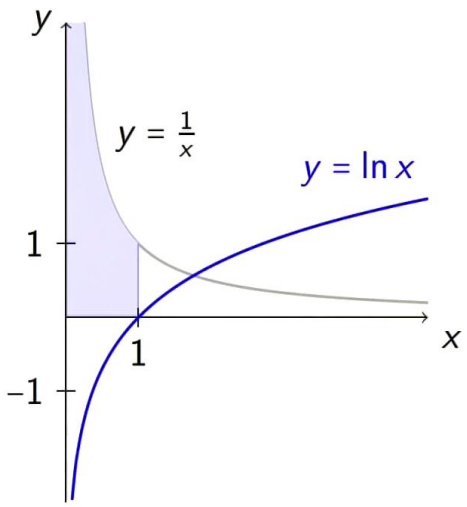
Graphe du logarithme naturel

- Pour $x = 1$,

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln'(1) = 1.$$

- Pour $x < 1$,

$$\ln(x) < 0 \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 1.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

On voit ici, à la fin, que pour une valeur de *x* donnée, la pente, elle est donnée par la valeur de *1/x*. Regardons ce qui se passe lorsque *x*, en partant de *x* égal à 1, ce n'est pas la situation que nous avions, qu'est-ce qu'il arrive lorsque *x* tend vers zéro ? Donc là, on a déjà une partie du graphe. Cette fois-ci, si le *x* descend en-dessous de 1, le log va donner une aire avec un signe moins, donc le log devient négatif. Ça correspond à la croissance stricte du log. On va descendre ici, c'est-à-dire la fonction reste croissante. Que fera la pente ? La pente est donné par *1/x*, c'est-à-dire que la pente aura tendance à être très, très grande lorsque je m'approche de *x* égal à zéro. Alors regardons ça, effectivement. Là, on le voit très, très bien, cette pente devient très, très grande dans le voisinage de *x* égal à 1. Voilà, ça c'est le graphe du log de *x*. Il tend vers moins l'infini lorsque *x* tend vers zéro. Il tend vers plus l'infini si *x* tend vers plus l'infini. La croissance, ici, on le voit tout de suite, va être très lente. On monte très lentement vers cette valeur plus l'infini.

Notes

Summary

21m 27s

Bijectivité et nombre d'Euler

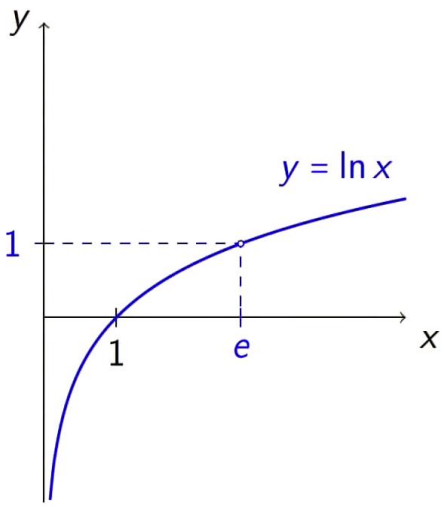
Le logarithme naturel

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

est continu et strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, donc bijectif :
en particulier, il existe un nombre réel positif, noté e, tel que

$$\boxed{\ln e = 1\,.}$$

e est la base du logarithme naturel.



Alors il en résulte, et on le voit ici sur le graphe, qu'en fait le log de *x* va être une bijection. Donc il prend une valeur positive réelle et la transforme en une valeur positive ou négative réelle, et chaque valeur sur l'axe des *y* sera une fois une valeur log *x* d'un certain *x*. Cette fonction est donc continue strictement croissante et de ce fait, bijective. Si vous choisissez, là, une valeur fixe de *y*, vous allez retrouver exactement un *x* qui est le point de départ pour la fonction log tel que le log de *x* redonne cet *y*. Il y a une valeur qui va nous intéresser très particulièrement, c'est la valeur que l'on dénomme *e*. *e* provient simplement du fait que ce nombre s'appelle nombre d'Euler. Donc si je prends le log de ce nombre, j'obtiens la valeur de 1, et ce nombre *e* s'appelle la base du logarithme naturel. La base c'est le nombre *x*, c'est la valeur de *x*, où le log de *x* prend la valeur de 1. Ce nombre d'Euler est un nombre qui est irrationnel et je peux vous donner là une valeur approximative.

Notes

Summary

22m 48s

Remarque

Le nombre e porte le nom de nombre d'Euler. On peut établir qu'il est irrationnel et vaut

$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240$

On peut montrer que e est également donné par les expressions suivantes :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Irrationnel signifie évidement que dans le développement décimal ici, il n'y a pas de période, il n'y a pas un schéma qui, en fin de compte, va se répéter indéfiniment, il n'y a pas de périodicité dans ce nombre, il est irrationnel. Alors on peut déterminer des formules pour calculer *e*. Je vous en donne ici deux. L'une par une série donc par la limite d'une somme qui va de *k* jusqu'à *n* avec *n* devenant de plus en plus grand, et on prend *1/k* factoriel. On peut aussi prendre un *1 + 1/n* à la puissance *n*, et *n* très grand. Faites attention ici quand même, je vous rappelle que dans le calcul des limites, on ne peux pas faire ce qu'on pourrait appeler un « une deux », donc prendre d'abord la limite sur une partie puis après sur l'autre. Les débutants usuellement font toujours l'erreur. La parenthèse, si *n* devient grand, tend vers 1, et 1 puissance *n* vaut 1 donc la limite serait 1, ce n'est pas le cas. Il faut vraiment faire tendre ces deux occurrences, ces deux fois que le *n* apparaît, il faut les faire tendre vers l'infini en même temps et alors vous obtenez ces 2,71828 et cetera.

Notes

Summary

24m 14s

Graphe du logarithme naturel

Ce que nous avons appris :

- croissance et continuité (et donc bijectivité) de la fonction logarithme naturel
- graphe du logarithme naturel
- le nombre e.

Prochain Chapitre :

- Fonction exponentielle
- Exponentielle de base quelconque
- Logarithme de base quelconque.

Résumons donc ce que je vous ai montré aujourd'hui. On a établi ces propriétés fondamentales qui sont la croissance, la continuité et, de ce fait, la bijectivité. On a dérivé le log. On a établi les limites à l'infini. On a dessiné le graphe. On a défini ce qu'était un nombre d'Euler. Alors qu'est-ce qui nous attend la prochaine fois ? Alors la prochaine fois, nous allons, cela ne vous surprendra pas si vous regardez le graphe de la fonction logarithmique, le fait que c'est une bijection, si c'est une bijection, la fonction réciproque va nous intéresser. Il va s'avérer que la fonction réciproque est une fonction dite exponentielle. Alors on va aussi remplacer la base qui est actuellement d'Euler, *e*, on va la remplacer par d'autres bases positives et donc nous allons définir des exponentielles de base quelconque et des logarithmes de base quelconque, toujours log et exp vont être des fonctions réciproques. Je vous remercie et à une prochaine.

Notes

Summary

25m 35s