ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.2 Le graphe du logarithme naturel

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Etude de la fonction ln x

Nous allons montrer que la fonction logarithme naturel

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

est

Guten Tag. Letztes Mal haben wir den natürlichen Logarithmus einer natürlichen Zahl *x* eingeführt. Wir haben ihn definiert als die markierte Fläche eines Bereichs zwischen der Horizontalachse *t*, dem Graphen der Funktion *1/t* und den Vertikalen *t* gleich 1 und *t* gleich *x*. Heute kommen wir auf diesen natürlichen Logarithmus zurück, aber wir werden ihn vor allem als Funktion betrachten. Hier nun der natürliche Logarithmus als Funktion, das heißt er nimmt eine positive Zahl *x*, eine reelle positive Zahl, transformiert sie in log *x*, und wir haben diesen log exakt als Integral von 1 bis *x* der Funktion *1/t* definiert. Denken Sie daran, dass der natürliche Logarithmus interessante Eigenschaften hinsichtlich des Produkts hat. So ergibt etwa der Logarithmus des Produkts *x* mal *y* die Summe der Logarithmen, das heißt log *x* plus log *y*. Ähnliche Eigenschaften hat der Logarithmus des Quotienten *x* durch *y* und auch der Logarithmus einer Potenz, das heißt der Logarithmus von *x* hoch *y* ergibt *y* mal log *x*, immer für *x* und *y*, die positive relle Zahlen sind.

Notes

Summary

0m 04s

Etude de la fonction $\ln x$

Nous allons montrer que la fonction logarithme naturel

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

est

- strictement croissante
- non bornée, $\boxed{\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$
- continue
- dérivable, $\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$.

Bei Potenzen kann *y* also eine beliebige relle Zahl sein. Was machen wir also heute? Wir werden vier Eigenschaften demonstrieren. Wir werden zeigen, dass der log, wie er hier definiert ist, streng zunehmend ist. Wir werden zeigen, dass er nicht begrenzt ist, das heißt, wenn *x* sehr groß wird, das heißt, wenn ich an den rechten Rand des Definitionsbereichs gehe, wird der Funktionswert immer größer, und log *x* geht gegen unendlich. Wir werden auch positive *x*-Werte nehmen und uns dem linken Grenzwert des Definitionsbereichs nähern, sodass der Wert von *x* von rechts aus gegen null geht, und dort wird log *x* gegen minus unendlich gehen. Wir werden zeigen, dass die Funktion log *x* stetig und auch ableitbar ist, und wir werden den Wert dieser Ableitung bestimmen und dabei eine einfache Antwort finden, *1/x*, die vielleicht etwas überraschend ist, da sie klar aus dem logarithmischen bzw. trigonometrischen Rahmen hervorgeht. Man erhält einen einfachen algebraischen Ausdruck.

Notes

Summary

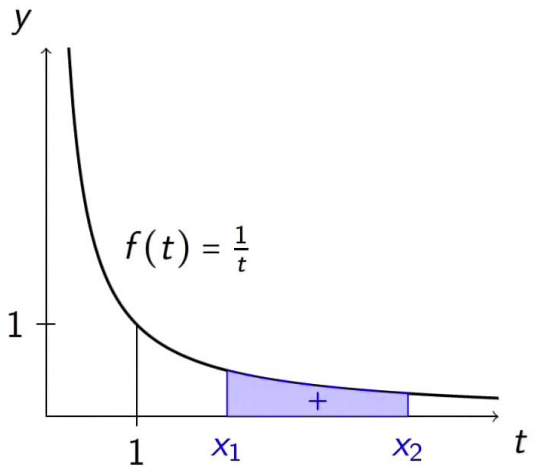
1m 24s

Croissance stricte de ln x

Soient $x_1, x_2 > 0$ avec $x_2 > x_1$. La règle d'addition permet d'écrire

$$\begin{aligned} \ln x_2 &= \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \ln x_1 + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t}}_{\text{aire} > 0} \end{aligned}$$

ainsi $\ln x_2 > \ln x_1$ lorsque $x_2 > x_1 > 0$.



Sehen wir uns die erste Eigenschaft an. Wir werden zeigen, dass der Logarithmus von *x* streng ansteigend ist. Was lernen wir hieraus? Wir nehmen zwei Werte *x1* und *x2*; diese sind einfach positiv, liegen also im Definitionsbereich, und wir nehmen einen Wert, der kleiner als der andere ist, das heißt *x1* ist kleiner als *x2*. So sehen Sie es in der Abbildung. Sie können auch den Fall betrachten, dass *x1* kleiner 1 ist und *x2* kleiner oder größer, das spielt gar keine Rolle. Ich erinnere daran, dass der log von *x2* dieses Integral ist, also die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion, den Achsen der Werte *t*, zwischen *t* gleich 1 und *t* gleich *x2*. Diese Fläche also kann man als Fläche von 1 bis *x1* hier plus *x1* bis *x2* bezeichnen. Das ist die Additionseigenschaft, die wir schon erwähnt hatten. Sie sehen, dass der Grenzwert *x* einmal als oberer und einmal als unterer Grenzwert erscheint und wir haben festgestellt, dass diese beiden Linien völlig identisch sind. Die erste ist also definitionsgemäß einfach log*x1*, und der Rest ist eine Fläche zwischen *x1* und *x2*.

Notes

Summary

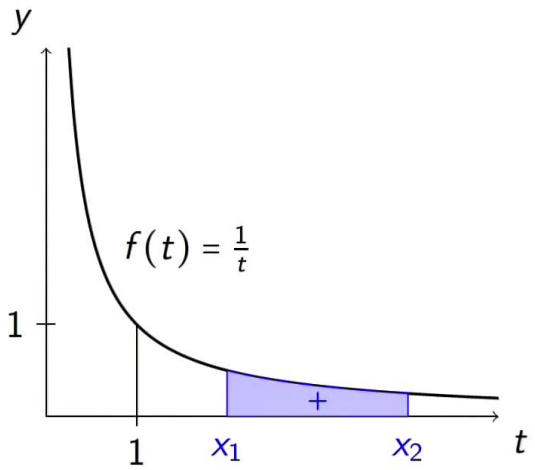
2m 33s

Croissance stricte de $\ln x$

Soient $x_1, x_2 > 0$ avec $x_2 > x_1$. La règle d'addition permet d'écrire

$$\begin{aligned} \ln x_2 &= \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \\ &= \ln x_1 + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t}}_{\text{aire} > 0} \end{aligned}$$

ainsi $\ln x_2 > \ln x_1$ lorsque $x_2 > x_1 > 0$.



Daher ist *x2* größer als *x1* und ergibt daher eine positive Fläche, das heißt, man erhält das Ergebnis, dass *ln x2 ln x1* plus etwas Positives ist, also ist *ln x2* größer als *ln x1*, wenn *x2* größer als *x1* ist. Die Logarithmus-Funktion ist also eine streng ansteigende Funktion.

Notes

Summary

3m 54s

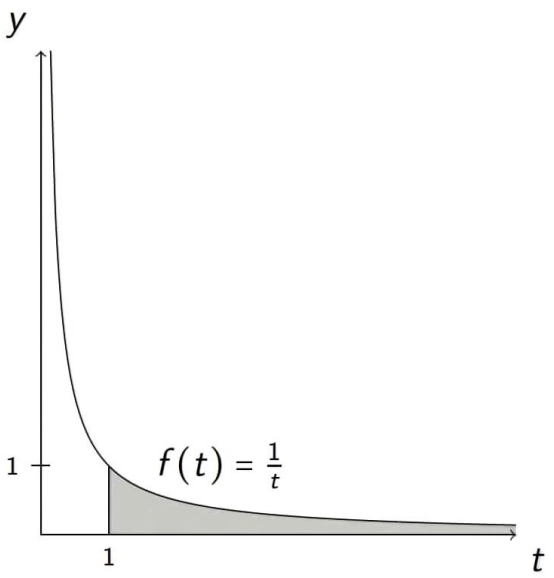
Limites aux bords du domaine de $\ln x$

Par définition,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x$$

est l'aire signée sous la courbe de $t = 1$ à $t \to \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{dt}{t}.$$



kommen wir zu den nächsten Eigenschaften, die das Verhalten der Logarithmus-Funktion betreffen, wenn man sich *x* oder dem rechten oder linken Rand des Definitionsbereichs nähert. Beginnen wir mit dem rechten Rand, analysieren wir also, was mit dem Logarithmus von *x* passiert, wenn *x* gegen unendlich geht. Aus geometrischer Sicht sehen Sie das, was passiert, hier in diesem Graphen, das, was man erhält: Man nimmt die bezeichnete Fläche zwischen 1 und einem großen *x* und *x* wird immer größer. Dieser Grenzwert ist also einer, die man in der Integralrechnung oft findet, das Integral *dt/t* von 1 bis unendlich, das heißt, dass der rechte Grenzwert einfach gegen unendlich geht.

Notes

Summary

4m 17s

Limites aux bords du domaine de $\ln x$

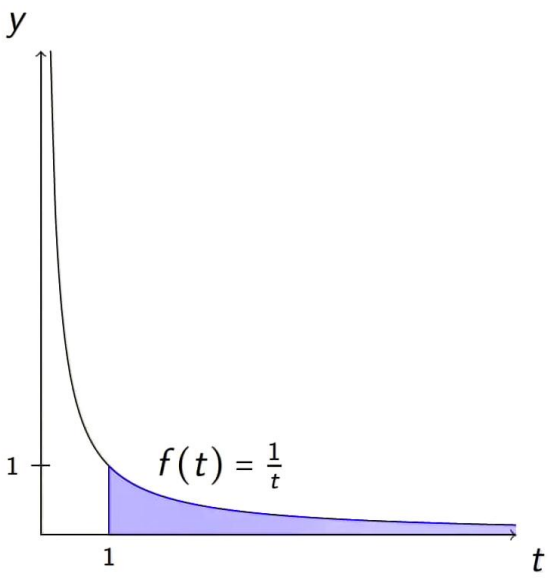
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, cette aire est supérieure à celle comprise entre 1 et 2^N :

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} > \int_1^{2^N} \frac{dt}{t} = \ln(2^N) = N \ln 2 .$$

Alors, pour $N \to \infty$,

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} > \lim_{N\to\infty} N \ln 2 = \infty ,$$

et nous obtenons $\boxed{\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty}$.



Nehmen wir also eine Zahl *N*, eine positive ganze Zahl, die sehr groß wird, und hier haben Sie die Fläche zwischen 1 und wir nehmen *N* hoch 2, wie ein großes *x*. Das Integral geht also von 1 bis unendlich, und wo der rechte Grenzwert gegen unendlich geht, steigt sie streng immer weiter an, und das ist der strenge Anstieg des Logarithmus. pardon, sie wird geringer, streng geringer durch das Integral, das von 1 bis 2 hoch *N* geht, von 1 bis 2 hoch *N*. Und dies ist definitionsgemäß der log von 2 hoch *N* und ein Eigenschaft des Logarithmus ist, dass ich das "hoch *N*" als Fakto eines Produkts vorziehen kann, das ergibt *N* mal log 2. Was geschieht also, wenn *N*, wenn dieses *N* sehr groß wird? Dieser Grenzwert 2 hoch *N* hier geht gegen unendlich und das Ergebnis ist das Integral... Ich habe es größer gemacht, es ist hier größer oder gleich, größer oder gleich diesem Grenzwert, der plus unendlich ist, wir sehen also: Der Grenzwert für *x* gegen unendlich von log*x* ist plus unendlich.

Notes

Summary

5m 07s

Limites aux bords du domaine de $\ln x$

Par définition,

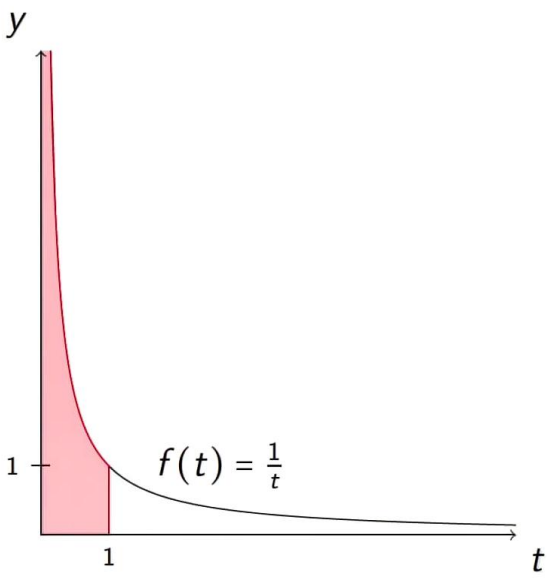
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x$$

est l'aire signée sous la courbe de $t = 1$ à $t = 0$.

Rappelons que cette aire est négative.

Posant $z = \frac{1}{x}$, on a $\ln x = \ln \frac{1}{z} = -\ln z$ et $\lim_{x\to 0^+} z = \infty$.

Nous obtenons donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$.



Sehen wir, was geschieht, wenn ich mit meinem *x* dem linken Rand des Definitionsbereichs nähere, wobei *x* von rechts gegen null tendiert. Also log *x*, der die markierte Fläche zwischen *x* und 1 ergibt, hier rot, ein Fläche deren Vorzeichen hier negativ wird, und wir sehen, was geschieht, wenn *x* wirklich gegen null geht. Mit Blick auf den vorherigen Fall können wir sagen: *z* gleich *1/x*. Der log von *x* hier lässt sich als log von *1/z* schreiben und die Eigenschaften des Logarithmus erlauben uns zu schreiben, dasss es minus log *z*. ist Ich kann also log *x* durch minus log *z* ersetzen. Wenn außerdem *x* von rechts gegen null geht, geht *z* gegen unendlich. Geht also dieser Grenzwert *x* von *ln x* gegen null, so geht zugleich der Grenzwert von - *ln z* für *z* gegen unendlich. Wir haben ja schon vorher diesen Grenzwert untersucht, hier gibt es einfach *x* statt *z*. Nun verwenden wir also dieses Ergebnis von vorher und das negative Vorzeichen bleibt und wir erhalten diesmal minus unendlich. Fassen wir also zusammen. Wenn *x* gegen unendlich geht, wird der log unendlich groß, wenn *x* von rechts gegen null geht, wird der log von *x* unendlich klein.

Notes

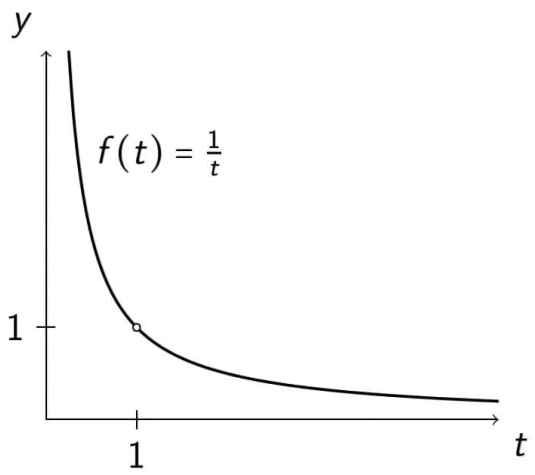
Summary

6m 20s

Continuité de $\ln x$

Montrons pour commencer que $\ln x$ est continue en $\xi = 1$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 1} \ln x = 0 = \ln 1 .$$



Betrachten wir die dritte Eigenschaft, die Stetigkeit des log. Sie ist sehr wichtig, denn wenn der Logarithmus stetig ist, heißt das unter anderem, dass alle Werte zwischen minus und plus unendlich auf der *y*-Achse von der Funktion erfasst werden. Dies ist ein kapitales und wichtiges Resultat. Die Stetigkeit ist also wichtig. Beginnen wir diese Stetigkeit in einem Punkt zu untersuchen. Diesen Punkt, den fixen Wert von *x* nenne ich hier ξ (ksi), also ist ξ (ksi) gleich 1. Der log von 1, also die markierte Fläche zwischen *t*gleich 1 und*t* gleich 1, ist also null, da sind wir einverstanden, und die Funktion ist stetig, wenn der Grenzwert, wenn *x* gegen 1 von *ln x* geht, *ln* an der Stelle 1 ergibt. Wir müssen nun finden und zeigen, dass der Grenzwert für *x* gegen 1 von *ln x* null ist. Wir unterscheiden also zwei Fälle, einmal nehmen wir ein *x* größer als 1 und lassen *x* gegen 1 gehen, einmal nehmen wir ein *x* kleiner als 1 und lassen *x* von links gegen 1 gehen.

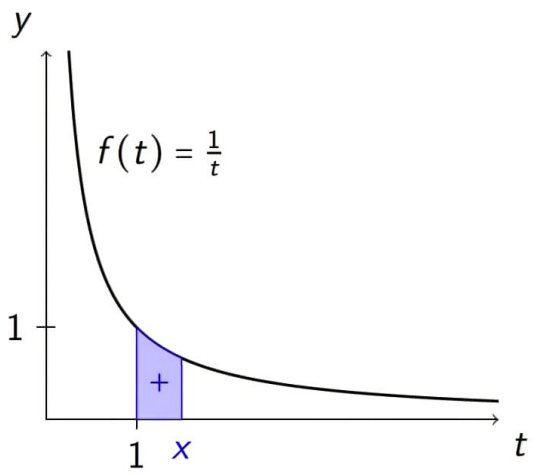
Notes

Summary

7m 52s

Continuité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$.



Sehen wir, was geschieht, wenn ich einen Wert von x knapp über 1 nehme. Da wissen wir aufgrund der strengen Steigung bereits, dass der log von x positiv ist, und wir wissen es auch deswegen, weil der log von x in diesem Fall eine Fläche mit positivem Vorzeichen ist.

Notes

Summary

9m 05s

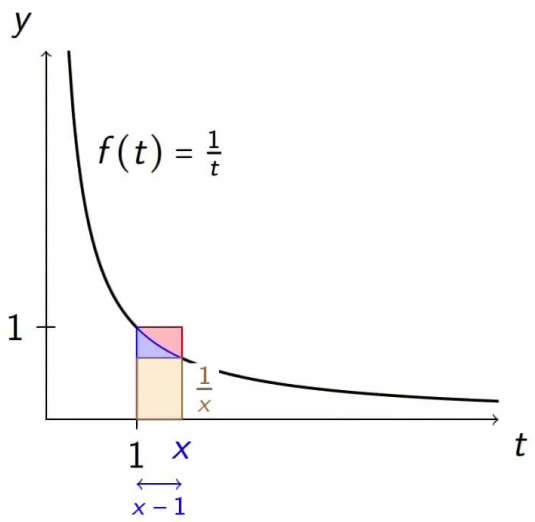
Continuité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$.
  L'aire géométrique sous la courbe est comprise entre celle de deux rectangles, l'un de hauteur $\frac{1}{x}$ et l'autre de hauteur 1 :

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)\,1\,.$$

  Lorsque x tend vers 1 par la droite, les expressions encadrant $\ln x$ tendent toutes deux vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0\,.$$



Sehen wir noch einmal hin. Hier haben wir die blaue Fläche. Wir können diese Fläche auf folgende Weise verkleinern und vergrößern: Ich habe also den log *x*, das war dieblaue Fläche, verkleinern wir sie. Ich nehme als Breite *x - 1* und als Höhe den Funktionswert am rechten Rand dieses Intervalls 1 bis*x*, also mal *1/x*. Jetzt erhalte ich eine rechteckige Fläche und diese Fläche ist kleiner als log*x*. Vergrößern wir sie. Das heißt, wir nehmen ein Rechteck derselben Breite *x-1*, aber diesmal nehmen wir als Höhe den höchsten Wert, der in der Funktion *1/t* in diesem Intervall von *1* à *x* möglich ist, das heißt den Wert 1. Wir können nun den Wert von log *x* verkleinern und vergrößern, und zwar durch zwei algebraische Ausdrücke. Sehen wir, was geschieht, wenn *x* gegen 1 geht, wobei *x* immer noch größer als 1 ist. Also wenn ich mit dem Ausdruck rechts beginne, geht *x - 1* gegen null, null mal eins, hier stabilisiert er sich also bei null. Links stabilisiert sich *x - 1*, der Grenzwert wird null sein. *1/x* wird, wenn *x* gegen 1 geht, 1 ergeben.

Notes

Summary

9m 20s

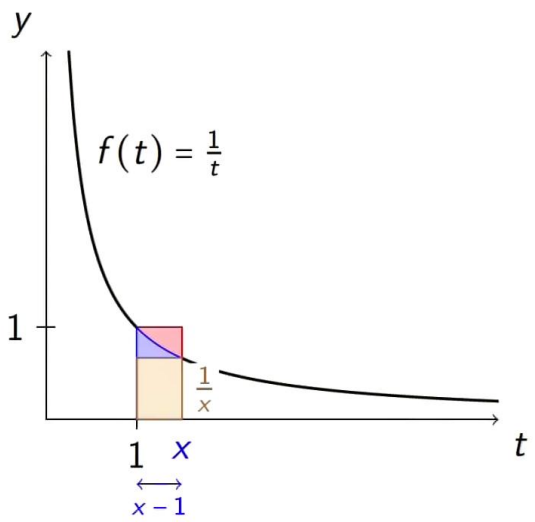
Continuité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$.
  L'aire géométrique sous la courbe est comprise entre celle de deux rectangles, l'un de hauteur $\frac{1}{x}$ et l'autre de hauteur 1 :

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)1.$$

  Lorsque x tend vers 1 par la droite, les expressions encadrant $\ln x$ tendent toutes deux vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0.$$



Das Produkt stabilisiert sich ebenfalls gegen null, der Grenzwert ist null, der *ln x* ist also eingeklemmt, wenn *x* von rechts gegen 1 geht, und zwar zwischen einem Grenzwert null und einem Grenzwert null, sodass der Grenzwert von *ln x*, wenn *x* von rechts gegen 1 geht, null ist. Das ist unser gesuchtes Ergebnis, und wir hätten sicher gerne, dass wir links zu einem entsprechenden Ergebnis kommen.

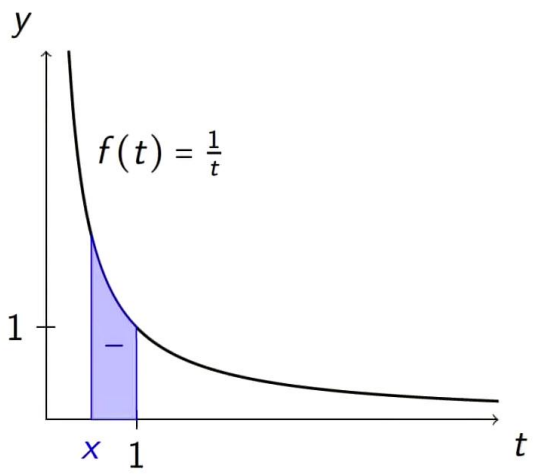
Notes

Summary

10m 42s

Continuité de $\ln x$

- Pour $x < 1$, on a $\ln x < 0$.



In der Tat können Sie ganz analog diskutieren, wenn *x* kleiner als 1 ist, zwischen null und 1. Hier ist der log von *x* diesmal die blaue Fläche mit negativem Vorzeichen.

Notes

Summary

11m 05s

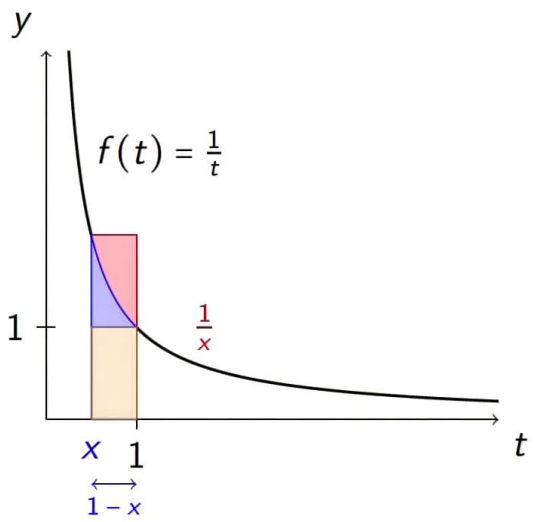
Continuité de $\ln x$

- Pour $x < 1$, on a $\ln x < 0$.
  L'aire géométrique sous la courbe est comprise entre celle de deux rectangles, l'un de hauteur $\frac{1}{x}$ et l'autre de hauteur 1 :

$$(1-x)\,1 < -\ln x < (1-x)\,\frac{1}{x}.$$

  Lorsque x tend vers 1 par la gauche, les expressions encadrant $-\ln x$ tendent toutes deux vers 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 1^-} \ln x = 0.$$



Um die Flächen zu vergleichen, nehmen wir die Fläche mit dem positiven Vorzeichen, also - *ln x*, die hier die blaue Fläche war, und vergrößern und verkleinern sie wie beim letzten Mal. Beide Male ist die Breite *1 - x*, die Höhe ist einmal durch 1 gegeben, das verkleinern wir, und die Höhe hier, die wir vergrößern, ist gegeben durch den Funktionswert von *1/t* an der Stelle *x*, ich erhalte also *1/x*. Man hat also dasselbe Ergebnis wie vorher, wenn *x* gegen 1 geht, - *ln x* am Grenzwert liegt zwischen 0 und 0, daher ist diesmal dieser Grenzwert für *x*, das von links gegen 1 geht, ebenfalls 1.

Notes

Summary

11m 17s

Continuité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est continue en $\xi = 1$: $\lim_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est continue en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\lim_{x\to\xi} (\ln x - \ln \xi) = \lim_{x\to\xi} \ln \frac{x}{\xi} = \lim_{z\to 1} \ln z = 0,$$

si bien que $\lim_{x\to\xi} \ln x = \ln \xi$.

La fonction $\ln x$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Und dies heißt offensichtlich, dass der Grenzwert für *x*, das gegen 1 geht, ob links oder rechts, ob es nach links oder rechts springt, von *ln x* immer null, das heißt *ln 1* ist. Und das ist die Stetigkeit der log-Funktion an der Stelle ξ gleich 1. Bemerkenswert ist Folgendes: Wenn diese Funktion an einem Punkt stetig ist, heißt das, dass sie überall stetig ist, und der Schlüssel zum Ergebnis sind die Eigenschaften des Logarithmus. Sehen wir uns das genauer an. Wir betrachten jetzt nicht mehr den Fall ξ gleich 1, sondern nehmen für ξ irgendeinen fixen positiven reellen Wert. Uns interessiert, wo der *ln x* sich stabilisiert, wenn *x* gegen ξ geht. Am liebsten wäre es uns, wenn die Antwort *ln* ξ wäre, das heißt, wir hätten Stetigkeit. Um die Berechnung zu vereinfachen, fragen wir, wo sich diese Differenz *ln x - ln* ξ stabilisiert, wenn *x* gegen ξ geht? Wir berechnen also den Grenzwert für *x* gegen ξ der Differenz *ln x - ln* ξ und möchten, dass sie null ist, denn wenn dieser Grenzwert null ist, und das werden wir gleich zeigen, wenn er null ist, heißt das, das der Grenzwert für *x* gegen ξ von*ln x ln* ξ ist, und das bedeutet, dass die Funktion stetig ist.

Notes

Summary

12m 01s

Continuité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est continue en $\xi = 1$: $\lim_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est continue en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\lim_{x\to\xi} (\ln x - \ln \xi) = \lim_{x\to\xi} \ln \frac{x}{\xi} = \lim_{z\to 1} \ln z = 0,$$

si bien que $\lim_{x\to\xi} \ln x = \ln \xi$.

La fonction $\ln x$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Wie nehmen wir nun diesen Grenzwert in Angriff? Nun, wir haben eine log-Differenz und eine fundamentale Eigenschaft des besagten log, das dies den log des Quotienten darstellt. Ich kann also diesen log *x* minus log ξ ersetzen, und zwar durch den log dieses Quotienten *x/ξ*. Sehen wir nun, was geschieht, wenn *x* gegen ξ geht. Ich kann dieses *x/ξ z*, nennen, habe also einen *ln z*, und wenn *x* gegen ξ geht, geht dieser Quotient gegen 1. Wieder geht dieser Grenzwert *z* gegen 1 von *ln z*, das ist genau der Grenzwert, und er ergibt null. Man kann also diese Stetigkeit an einer Stelle ξ gleich 1 benutzen, um die Stetigkeit des log an jeder positiven reellen stelle ξ zu finden.

Notes

Summary

13m 26s

Dérivabilité de $\ln x$

- Pour $x > 1$, nous avons donné l'encadrement

$$(x-1)\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)\,1\,.$$

En divisant par $x-1$,

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1\,.$$

Lorsque x tend vers 1 par la droite, les expressions encadrant $\frac{\ln x}{x-1}$ tendent toutes deux vers 1. Ainsi

$$\ln'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1\,.$$

Die Ableitbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als die Stetigkeit, und für diese Eigenschaft werden wir uns jetzt interessieren, sie ist, wie gesagt, noch stärker. Fragen wir also nochmals, ob die Funktion *ln x* ableitbar ist. Wir spielen fast dasselbe Spiel an einer Stelle und werden sehen, dass, wenn sie an einer Stelle ableitbar ist, wiederum überall ableitbar ist. Ich frage also nach der Ableitung des log an der Stelle ξ gleich 1, das heißt nach der ersten Ableitung an der Stelle 1. Definitionsgemäß muss ich nun den log *x* nehmen, *x* nahe 1, *x* geht gegen 1, log von *x* minus log von 1 geteilt durch *x - 1*. Der log von 1 ist null, aber ich habe noch den log *x* an *x - 1*, und wir werden zeigen, dass dieser Grenzwert existiert und gleich 1 ist. Wieder analysieren wir separat die Fälle, dass *x* von rechts bzw. dass *x* von links gegen 1 geht. Ich beginne mit dem Fall, dass *x* größer als 1 ist, also von rechts gegen 1 geht. Also für ein *x* größer als 1. Wir hatten vorher einen Rahmen für log *x* vorgegeben, das war der Vergleich, der Rahmen, den wir durch die Fläche zweier Rechtecke erhielten, eines kleiner, eines größer als die Fläche, die durch *ln x* dargestellt wird, für*x* größer als 1. Dies war unser Resultat. Jetzt gehen wir rückwärts.

Notes

Summary

14m 17s

Dérivabilité de $\ln x$

- Pour $x < 1$, nous avons donné l'encadrement

$$(1-x)\,1 < -\ln x < (1-x)\,\frac{1}{x}\,.$$

En divisant par $1-x$,

$$1 < \frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x}\,.$$

Lorsque x tend vers 1 par la gauche, les expressions encadrant $\frac{\ln x}{x-1}$ tendent toutes deux vers 1. Ainsi

$$\ln'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1\,.$$

Sie sehen, der *ln x* muss durch *x - 1* geteilt werden. *x - 1* ist ein positiver Wert, ich kann teilen und erhalte den Rahmen *1/x* kleiner als log *x* geteilt durch *x - 1* kleiner als 1. Wenn *x* nun von rechts gegen 1 geht, geht *1/x* gegen 1, 1 geht gegen 1, durch diesen Rahmen, sozusagen per polizeilicher Vorschrift, kommen wir zu dem Ergebnis, dass der log *x* an *x - 1* gegen 1 geht. Diese Diskussion können Sie für *x* kleiner 1 durchführen, Sie müssen nur den Rahmen, den ich gerade benutzt habe, durch den Rahmen ersetzen, der für *x* kleiner 1 gültig war. Denken Sie daran, dass er da ist, dieser log hat ein negatives Vorzeichen, und das wird vieles klären. Wir müssen also teilen durch... Wir teilen durch *1 - x*, *1 - x* ist positiv, es bleibt also hier 1, dort bleibt *1/x* und hier neutralisiere ich das Minus, indem ich *1-x* durch *x-1* ersetze. Dort stoße ich also genau auf den Ausdruck, der mich interessiert und wiederum da *x* gegen 1geht, links und rechts sind die Grenzwerte gleich, nämlich 1, und ich bekomme den Fall, dass der Grenzwert von *ln x-ln 1* an *x-1*, also der Grenzwert, der die Ableitung links ergibt, ebenfalls 1 ist.

Notes

Summary

15m 50s

Dérivabilité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est dérivable en $\xi = 1$: $\ln'(1) = 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est dérivable en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\ln'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln x - \ln \xi}{x - \xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln \frac{x}{\xi}}{\xi(\frac{x}{\xi} - 1)} = \frac{1}{\xi} \lim_{z\to 1} \frac{\ln z}{z - 1} = \frac{1}{\xi} \ln'(1) = \frac{1}{\xi}.$$

La fonction $\ln x$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Man kann also schließen, dass der log von *x* ableitbar ist, zuminest in einem Punkt ξ gleich 1, und dass diese Ableitung den Wert 1 hat. Es gilt also wie für die Stetigkeit: Sobald die Funktionan einem Punkt ableitbar ist, ist sie überall ableitbar. Sehen wir nun hin. Wir nehmen ein fixes positives reelles *ξ*, und wenn ich die Ableitung an diesem Punkt berechnen will, muss ich die Differenz *ln x* betrachten, das *x* geht gegen *ξ*, *ln x* - *ln ξ* an *x* - *ξ*, dies ist definitionsgemäß die Ableitung der log-Funktion an einem fixen Punkt *ξ*. Wieder gibt mir die Differenz der beiden logs hier den log des Quotienten *x/ξ*. Im Nenner werde ich versuchen, auch ein *x/ξ* erscheinen zu lassen. Das geht ganz leicht, indem ich dieses *ξ* hervorhebe. Mir bleibt also ein *ξ*, das multipliziert, das *x* wird durch *x* - *ξ* ersetzt, man sieht hier sehr gut, durch Multiplikation erhalten wir das *x* zurück, minus 1, das *ξ* wird hervorgehoben. Das *ξ* also, das eine Konstante ist, das *x* geht gegen *ξ*, aber das *ξ* ist eine Konstante, ich kann vor den Grenzwert *1/ξ* gehen.

Notes

Summary

17m 25s

Dérivabilité de $\ln x$

Nous avons donc montré que $\ln x$ est dérivable en $\xi = 1$: $\ln'(1) = 1$.

Nous pouvons directement en déduire que $\ln x$ est dérivable en tout $\xi \in \mathbb{R}_+^*$.
En posant $z = \frac{x}{\xi}$, nous avons

$$\ln'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln x - \ln \xi}{x - \xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\ln \frac{x}{\xi}}{\xi(\frac{x}{\xi} - 1)} = \frac{1}{\xi} \lim_{z\to 1} \frac{\ln z}{z - 1} = \frac{1}{\xi} \ln'(1) = \frac{1}{\xi}.$$

La fonction $\ln x$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Wie vorher kann ich das *x/ξ z* nennen, und habe also *ln z*. Hier bleibt mir ein *z - 1* und der Grenzwert... Also wenn *x* gegen ξ geht, was geschieht mit diesem *z*, das *x/ξ* ist? Es wird also gegen 1 gehen, und mit bleibt hier der Grenzwert für *z* gegen 1 von *ln z* an *z-1* und das ist genau die Ableitung an der Stelle 1, mir bleibt also ein *1/ξ*. Wenn man es also verständlicher ausdrückt, das heißt, ich will die Ableitung nicht an der Stelle ξ berechnen, um *1/ξ* zu erhalten, sondern ich sage einfach, und schreibe anders *x*, die Verwendung von ξ war interessant, um solche Ausdrücke abzuschätzen, wo man ein *x* hatte, das erschien, aber nun gibt die Ableitung von *ln x*, die Ableitung von *ln ξ* ist also *1/ξ*, die Ableitung von *ln x* ergibt *1/x*. Nun, wir haben gezeigt, dass der Logarithmus streng steigend ist, dass er gegen unendlich geht, wenn *x* gegen unendlich geht, dass er gegen minus unendlich geht, wenn *x* gegen minus unendlich geht. Wir haben gezeigt, dass der Logarithmus stetig ist. Wir haben gezeigt, dass er ableitbar ist. Nehmen wir nun alles zusammen und sehen uns an, was dies für den Graphen bedeutet.

Notes

Summary

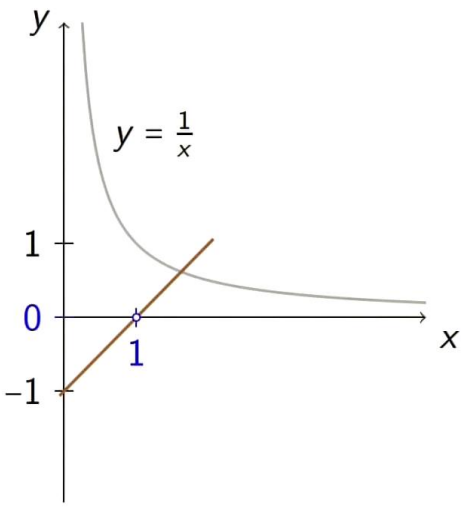
18m 42s

Graphe du logarithme naturel

Nous sommes maintenant en mesure de représenter le graphe de $\ln x$.

- Pour $x = 1$,

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln'(1) = 1.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier. Wir sehen uns dieses Achsensystem an, diesmal nenne ich es *x*,*y*, weil ich den Graphen dieser Funktion zeichnen werde, der *x* in *ln x* transformiert. Hier ist die Hyperbel, die vorher *1/t* war, ich nenne sie jetzt *1/x*, dadurch können wir leichter vergleichen. Also wenn *x* gleich null ist, das hatten wir schon gesagt, ist der *ln* an der Stelle 1 gleich 0, einfach weil dies die Fläche zwischen der Vertikale 1 und 1 ist, ist die Fläche null. Wir wissen, dass auch die Ableitung den Wert 1 hat, der Graph wird also durch diesen Punkt verlaufen, an *x* gleich 1 hat er den Wert null, und die Steigung ist eine Steigung von 1. Wenn *x* größer wird, was geschieht dann? Wir lassen *x* größer werden. In dem Maße, in dem *x* größer wird, wird der log die entsprechende Fläche unter der Hyperbel sein, das heißt, der log von *x* wird größer. Die Ableitung, die die Steigung dieser Funktion ergibt wird gegeben sein durch *1/x*. Man findet diese Hyperbel direkt in der Ableitung. Die Steigung wird immer kleiner werden, Das heißt, der log hat die Tendenz, immer weniger zu wachsen. Sehen wir uns dies näher an.

Notes

Summary

19m 57s

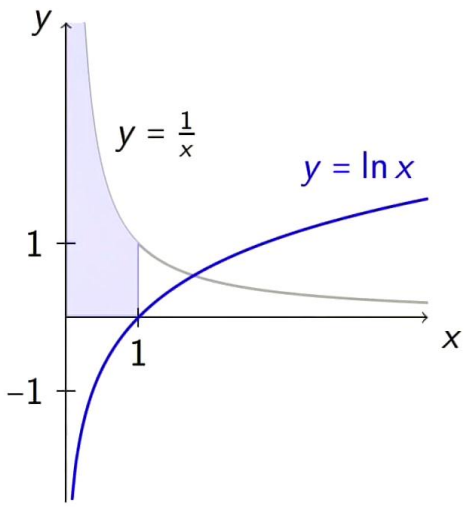
Graphe du logarithme naturel

- Pour $x = 1$,

$$\ln(1) = 0 \qquad \ln'(1) = 1.$$

- Pour $x < 1$,

$$\ln(x) < 0 \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 1.$$



REPLAY

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Hier sieht man sehr gut, wie dieser log wächst. Hier sieht man am Ende, dass für ein gegebenes *x* die Steigung durch *1/x* gegeben ist. Sehen wir, was geschieht, wenn *x*, ausgehend von *x* gleich 1, das ist nicht die Situation von vorhin, was also geschieht, wenn *x* gegen null geht? Hier haben wir schon einen Teil des Graphen. Diesmal gilt: Wenn *x* unter 1 fällt, ergibt der log eine Fläche mit negativem Vorzeichen, der log wird also negativ. Dies entspricht dem strengen Anstieg des log. Hier geht es hinunter, das heißt, die Funktion bleibt ansteigend. Was macht die Steigung? Die Steigung ist gegeben durch *1/x*, das heißt, die Steigung hat die Tendenz, sehr, sehr groß zu werden, wenn ich mich *x* gleich null nähere. Betrachten wir es konkret. Hier sieht man sehr gut, dass die Steigung in der Umgebung von *x* gleich 1 sehr, sehr groß wird. Siehe da, es ist der Graph des log von *x*. Er geht gegen minus unendlich, wenn *x* gegen null geht. Er geht gegen plus unendlich, wenn *x* gegen plus unendlich geht. Die Steigung hier, wir sehen es gleich, wird sehr langsam sein. Man nähert sich sehr langsam dem Wert plus unendlich.

Notes

Summary

21m 23s

Bijectivité et nombre d'Euler

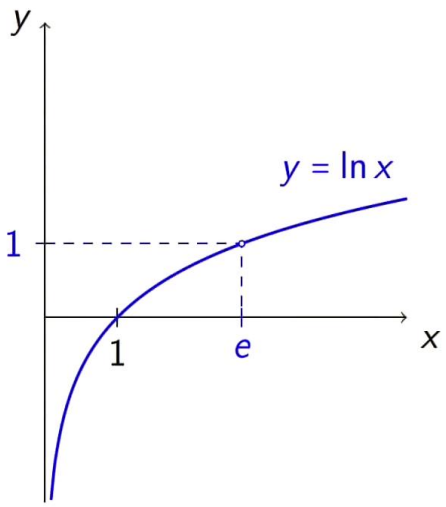
Le logarithme naturel

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

est continu et strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, donc bijectif :
en particulier, il existe un nombre réel positif, noté e, tel que

$$\boxed{\ln e = 1\,.}$$

e est la base du logarithme naturel.



Daraus resultiert, und man sieht es hier am Graphen, dass der log von x in der Tat eine Bijektion sein wird. Er nimmt also einen positiven reellen Wert und transformiert ihn in einen positiven oder negativen reellen Wert, und jeder Wert auf der y-Achse wird einmal ein Wert von log x für ein bestimmtes x sein. Diese Funktion ist also stetig, streng ansteigend und daher bijektiv. Wenn Sie nun hier einen fixen Wert von y wählen, finden Sie genau ein x, der der Ausganspunkt für die log-Funktion ist, bei der der log von x dieses y ergibt. Es bleibt nun ein Wert, der uns ganz besonders interessiert, nämlich der Wert, der e genannt wird. Der Name e kommt einfach daher, dass es die sogenannte Eulersche Zahl ist. Wenn ich also den log dieser Zahl nehme, erhalte ich den Wert 1, und diese Zahl e nennt man die Basis des natürlichen Logarithmus. Die Basis ist die Zahl x, ist der Wert von x, wo der log x den Wert 1 annimmt. Diese Eulersche Zahl ist eine irrationale Zahl, und ich kann Ihnen einen Näherungswert nennen.

Notes

Summary

22m 48s

Remarque

Le nombre e porte le nom de nombre d'Euler. On peut établir qu'il est irrationnel et vaut

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407$

On peut montrer que e est également donné par les expressions suivantes :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Irrational heißt natürlich, dass es hier in der Dezimalentwicklung keine Periode gibt, es gibt also kein Schema, das sich am Ende unendlich wiederholt, es gibt keine Periodizität in dieser Zahl, sie ist irrational. Man kann nun Formeln zur Berechnung von *e* festlegen. Ich nenne Ihnen hier zwei. Einmal durch eine Reihe, also als Grenzwert einer Summe, die von *k* bis *n* geht, wobei *n* immer größer wird, und man nimmt *1/k* faktoriell. Man kann auch ein *1 + 1/n* hoch *n* nehmen, und *n* sehr groß werden lassen. Passen Sie hier trotzdem auf, denken Sie daran, dass man bei der Grenzwertberechnung nicht etwas tun kann, was man "eins zwei" nennen könnte, alos zuerst den Grenzwert für einen Teil, dann für den anderen Teil nehmen. Anfänger machen andauernd diesen Fehler. Wenn *n* groß wird, geht die Klammer gegen 1, und 1 hoch *n* ist gleich 1, der Grenzwert wäre also 1, und das ist nicht der Fall. Man muss also diese beiden Male, in denen *n* auftritt, gegen unendlich tendieren lassen, und zwar gleichzeitig und erhält dieses 2,71828 und so weiter.

Notes

Summary

24m 14s

Graphe du logarithme naturel

Ce que nous avons appris :

- croissance et continuité (et donc bijectivité) de la fonction logarithme naturel
- graphe du logarithme naturel
- le nombre e.

Prochain Chapitre :

- Fonction exponentielle
- Exponentielle de base quelconque
- Logarithme de base quelconque.

Fassen wir nun zusammen, was ich Ihnen heute gezeigt habe. Wir haben diese fundamentalen Eigenschaften kennengelernt: Wachstum, Stetigkeit und Bijektivität. Wir haben den log abgeleitet. Wir haben die Grenzwerte für unendlich festgestellt. Wir haben den Graphen gezeichnet. Wir haben die Eulersche Zahl definiert. Wa serwartet uns nun beim nächsten Mal? Beim nächsten Mal werden wir, und das wird Sie nicht überraschen, wenn Sie sich den Graphen der logarithmischen Funktion ansehen, und die Tatsache, dass es sich um eine Bijektion handelt, wenn es eine Bijektion ist, wird uns die Umkehrfunktion interessieren. Es wird sich zeigen, dass die Umkehrung eine sogenannte Exponentialfunktion ist. Wir werden dann die Basis, aktuell die Eulersche Zahl e durch andere positive Basen ersetzen und werden die Exponentialwerte zu irgendwelchen Basen und die Logarithmen zu irgendwelchen Basen definieren, wobei log und exp immer reziproke Funktionen sein werden. Vielen Dank und bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

25m 35s