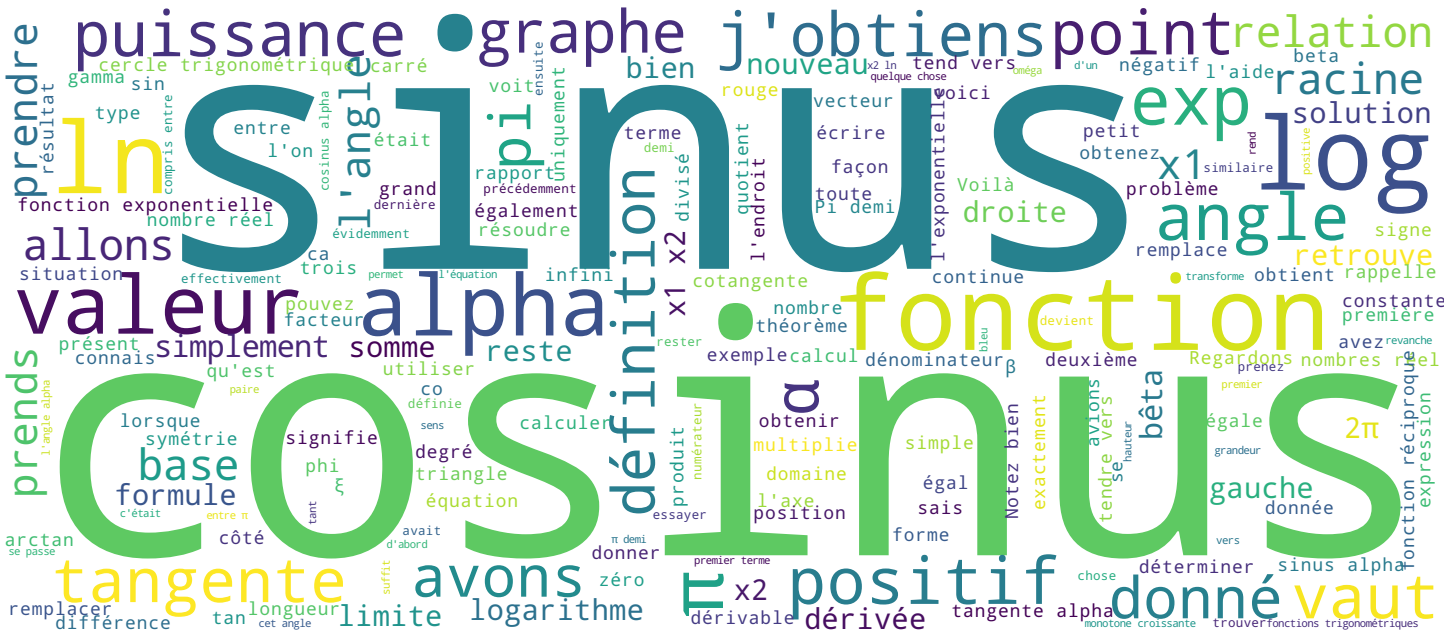
Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.3 Exponentielles et logarithmes

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen


sinus
cosinus
puissance
graphe
j'obtienspoint
relation
exp
log
racine
solution
ln
angle
valeur
alpha
fonction
définition
tangente
avons
positif
donné
vaut
base
formule
prendre
prends
allons
pi
l'angle
bien
nouveau
rouge
vecteur
écrire
façon
droite
x1
x2
cotangente
continue
nombre
théorème
exemple
calcul
dénominateur
deuxième
bêta
gauche
égale
2π
donnée
déterminer
sinus alpha
fonction réciproque
expression
dérivée
tangente alpha
logarithme
limite
différence
remplacer
arctan
côté
degré
triangle
équation
symétrie
signifie
lorsque
calculer
obtenir
multiplie
domaine
position
forme
simple
égal
sais
Notez bien
exactement
avons
tendre vers
Se
hauteur
grandeur
premier
premier terme
essayer
produit
numérateur
π
x2
divisé
quotient
l'endroit
l'exponentielle
voici
tend vers
quelque chose
négatif
l'aide
petit
obtenez
problème
similaire
Voilà
Pi demi
remplace
retrouve
signe
obtient
rappelle
constante
première
avez
revanche
Regardons
nombres réel
prenez
fonction trigonométrique
carré
gamma
sin
type
entre
l'on
était
grand
dernière
également
résoudre
rapport
précédemment
uniquement
ensuite
cosinus alpha
compris entre
résultat
fonction exponentielle
nombre réel
évidemment
ca
trois
situation
effectivement
permet
l'équation
infini
pouvez
facteur
présent
connais
simplement
somme
reste
qu'est
utiliser
co
définie
sens
paire
l'angle alpha
zéro
donner
π demi
limite
logarithme
tangente
longueur
cet angle
tan
différence
remplacer
se passe
entre π
c'était
tant
avait
d'abord
suffit
signifie
phi
ξ
devient
bleu
rester
monotone croissante
trouverfonctions trigonométriques
vers
chose
alpha
dérivable
positif
déterminer
sinus alpha
donnée
gauche
égale
2π
bêta
deuxième
dénominateur
exemple
calcul
théorème
nombre
cotangente
continue
x1
x2
divisé
quotient
l'endroit
l'exponentielle
voici
tend vers
négatif
l'aide
petit
obtenez
problème
similaire
Voilà
Pi demi
remplace
retrouve
signe
obtient
rappelle
constante
première
avez
revanche
Regardons
nombres réel
prenez
fonction réciproque
expression
transforme
positive
rend
premier
grandeur
vers
hauteur
Se
tendre vers
avons
exactement
Notez bien
égal
sais
forme
simple
multiplie
domaine
position
obtenir
calculer
lorsque
symétrie
signifie
degré
triangle
équation
base
formule
prendre
prends
allons
pi
l'angle
bien
nouveau
rouge
vecteur
écrire
façon
droite
x1
x2
cotangente
continue
nombre
théorème
exemple
calcul
dénominateur
deuxième
bêta
gauche
égale
2π
donnée
déterminer
sinus alpha
fonction réciproque
expression
dérivée
tangente alpha
logarithme
limite
différence
remplacer
arctan
côté
degré
triangle
équation
symétrie
signifie
lorsque
calculer
obtenir
multiplie
domaine
position
forme
simple
égal
sais
Notez bien
exactement
avons
tendre vers
Se
hauteur
grandeur
premier
premier terme
essayer
produit
numérateur
π

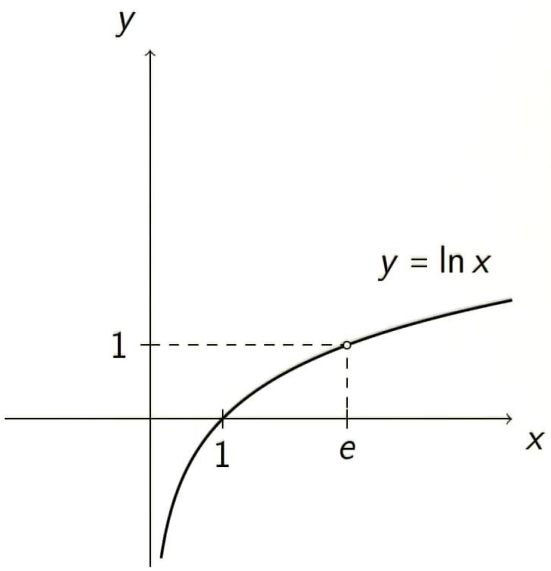
Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction inverse, appelée fonction exponentielle, est définie par

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \exp(\ln x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}_+^*) \\ \ln(\exp x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Bonjour ! Lors des deux dernières séances, nous avons introduit la notion de logarithme et de fonction logarithmique. Aujourd'hui nous allons nous intéressé à la fonction réciproque. Commençons par regarder cette fonction logarithmique : *ln* qui transforme un nombre réel positif en un nombre réel quelconque. Le *ln x* est donné par une aire, que nous avons défini comme l'intégrale de 1 à *x* de la fonction *1/t dt* et nous avons obtenu qui est continue, elle est dérivable, elle est strictement croissante. Nous avions dit lorsque *x* tend vers 0 depuis la droite, le *log* va tendre vers - *infini*. Lorsque *x* tend vers + *infini*, le *log* va tendre vers + *infini*. Certes très lentement mais, ce *log x* va croître à l'infini. Donc nous obtenons une fonction qui est bijective. Chaque valeur de *y* est prise exactement une fois par le *log x*. Nous avons également repéré sur le *log x* des valeurs particulières. Donc le *log (1)* = 0 le *log (e) = 1*. Alors la fonction réciproque, elle est appelée fonction *exponentielle*. Elle est définie, nous allons l'abrégé *"exp"*.

Notes

Summary

0m 04s

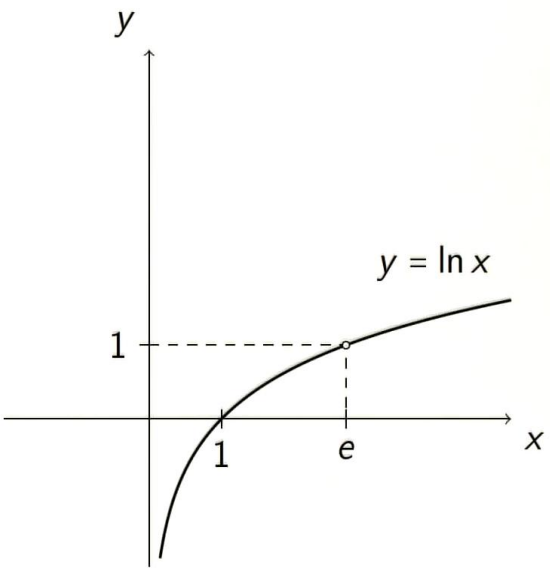
Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction inverse, appelée fonction exponentielle, est définie par

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \exp(\ln x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}_+^*) \\ \ln(\exp x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$



Ceux sont les trois premières lettres de exponentielle. Alors elle va transformer, regardons encore une fois, le *log* allait de nombres réels positifs vers les nombres réels. La fonction réciproque va transformer les nombres réels positifs et négatifs en des nombres réels positifs. Nous allons noté que le *x* est transformé en *exp x* simplement. Par définition, nous avons *exp(ln)* sont du type de ce que l'une fonction fait, l'autre défait. Par exemple, j'ai *exp(ln x))* qui donne *x*, ceci est valable pour tous les *x* où à gauche je peux avoir quelque chose de bien défini. Alors je vous rappelle que *ln x* accepte uniquement de *x* positifs. Donc, là, on va avoir devoir dire que le *x* est positif. *exp*, en revanche, n'est pas aussi problématique, *exp* accepte tous les nombres réels. Ça se voit le mieux si on prend ici le graphe de *ln x*. Si vous prenez le graphe de la fonction réciproque, c'est à dire si vous faites une symétrie d'axe *y = x*. Voilà, vous obtenez le graphe de l'exponentielle et on voit très bien que l'exponentielle accepte tous les nombres réels et rend de nombres positifs.

Notes

Summary

1m 20s

Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction inverse, appelée fonction exponentielle, est définie par

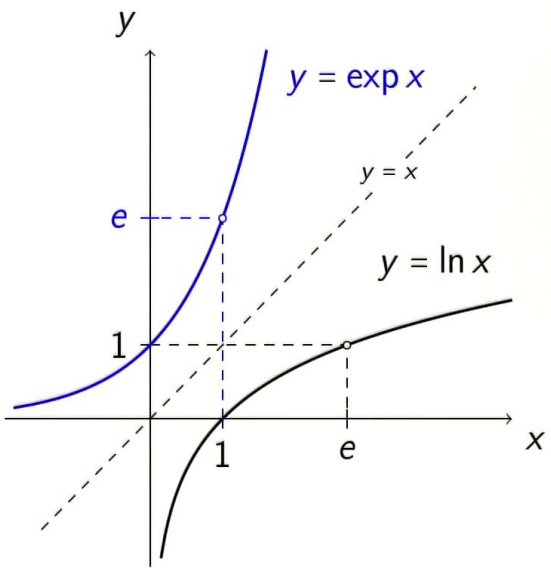
$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \exp(\ln x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}_+^*) \\ \ln(\exp x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Son graphe s'obtient par symétrie à partir de celui du logarithme naturel.

Aussi, $\boxed{\exp(0) = 1}$ et $\boxed{\exp(1) = e}$.



Donc la première ligne est donc tout à fait bien définie pour tous les *x* positifs. La deuxième, on prend d'abord un *x*, on applique *exp*, puis *log*. Alors dans la première étape, *exp x* accepte tous les *x* réels et on le voit, ici rend un nombre positif donc le *log* peut calculer la valeur *exp x* et on retrouve *x*, cette fois pour tous les *x* dans *R*. Si on regarde encore le graphe de exponentielle qui est donc une fonction monotone croissante on retrouve les deux valeurs particulières, que voici *exp (0) = 1* et *exp (1) = e*; ça c'est les valeurs qui correspondaient aux valeurs remarquables de la fonction *log* naturel.

Notes

Summary

2m 36s

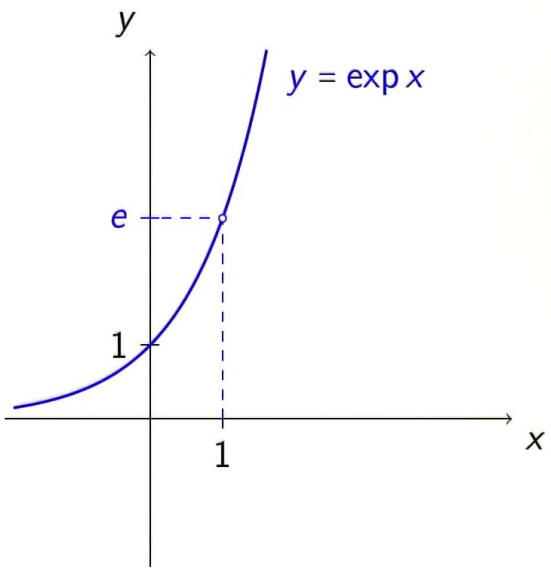
Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction exponentielle est

- strictement croissante
- non majorée, $\boxed{\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty}$
- minorée et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0}$
- continue
- dérivable, $\boxed{\frac{d}{dx}\exp x = \exp x}$.

En effet, en dérivant l'identité $\ln(\exp x) = x$, nous avons

$$\frac{1}{\exp x}\cdot \exp' x = 1\,.$$



Alors donnons quelques propriétés importantes de la fonction exponentielle. Voici le graphe, elle est strictement croissante, ça nous l'avons dit. Elle n'est pas majorée, c'est à dire que si *x* tend vers l'infini, *e^x* va tendre vers + *infini* aussi. On avait pour le *log*, la fonction réciproque ici, une fonction qui avait une croissante très lente vers l'infini. La fonction réciproque, ici, *e^x*, revanche va tendre vers + *infini* très rapidement. Elle est minorée, c'est à dire que si le *x* tend vers - *infini*, on voit que le *e^x* va tendre vers *0*. Cette asymptote horizontale correspond à l'asymptote verticale qu'on avait retrouvé avec *ln x*. Elle est continue en tant que réciproque de fonction continue. Elle est dérivable, elle a une dérivée remarquable. La dérivée de *exp x* est égale à *exp x*. On peut s'en convaincre en partant depuis la relation de *ln (exp x) = x*. Ça c'est vrai pour tous les nombres *x* quelconques. Nous avons alors en dérivant, j'ai des *log* de bidule à gauche donc je dérive, *1 /* bidule bidule prime. Donc *1 / exp x. exp' x*. A droite, je dérive, j'obtiens *1*. Cette relation je peux la résoudre par rapport à la dérivée de *x* et j'obtiens que la dérivée de *x* est également l'exponentielle de *x*.

Notes

Summary

3m 24s

Relations exponentielles fondamentales

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\,\exp(b)\,.}$$

En effet, en posant $a = \ln\alpha$ et $b = \ln\beta$ $(\alpha, \beta > 0)$, nous avons

$$\begin{aligned}\exp(a+b) &= \exp\left(\ln\alpha + \ln\beta\right)\\ &= \exp\left(\ln(\alpha\beta)\right)\\ &= \alpha\beta\\ &= \exp(a)\exp(b)\,.\end{aligned}$$

Alors la fonction exponentielle a des propriétés remarquables qui elles sont liées aux propriétés remarquables de la fonction logarithme. Voici la première, *exp (a + b)*, *a + b* sont des nombres réels quelconques, alors je peux remplacer ça par l'exponentielle du premier terme fois l'exponentielle du deuxième terme, donc par *exp(a). exp (b)* Pourquoi ? On va partir depuis *exp (a + b)*, *a* et *b* sont deux nombres réels. Le nombre réel *a*, je peux l'écrire comme le log d'un certains nombre α, un réel positif. Et *b*, je peux l'écrire que le *log* naturel de β, un β positif. Ça c'est du au fait que le *log* est une fonction surjective. C'est une fonction qui prend toute valeur réelle exactement une fois. J'ai exactement un α et un β de ce type. Alors je remplace *a* et *b* par *ln a* et *ln b*. J'ai ici une somme de logarithme. Là, j'utilise la propriété fondamentale des logarithmes et je sais que ça le logarithme du produit α fois β. Ici j'ai le *exp* et le *ln*, l'un va neutraliser l'autre, il reste α. β. Alors qu'est ce que c'est α ? Si *a* est donné par *ln α*, si je prend l'exponentiel, j'aurai que l'exponentiel de *a* redonne α.

Notes

Summary

4m 51s

Relations exponentielles fondamentales

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\,\exp(b)\,.}$$

2. Pour tous $a > 0, p \in \mathbb{Q}$, on a

$$\boxed{a^p = \exp(p \ln a)\,.}$$

En effet,

$$\begin{aligned} a^p &= \exp\left(\ln(a^p)\right) \\ &= \exp(p \ln a)\,. \end{aligned}$$

Donc j'ai ici *exp(a)* et pour β, *exp(b)*. Donc j'obtiens, bel et bien, que l'exponentiel de la somme est égale à au produit des exponentielles. Deuxième relation importante, si je prends un *a*, cette fois-ci positif un *p*, un élément de *Q*, donc un nombre rationnel. Je prétends que *a^p* est donné par *exp (p ln a)*. Pourquoi ? La raison est simple, je vais utiliser ici une astuce qui souvent donne des résultats intéressants. Je vais reprendre ce *a^p* et je vais lui appliquer d'abord le *log* puis *exp*. Ces deux fonctions se neutralisent. Ce qui est intéressant, à l'intérieur de *exp*, j'ai ce ce *ln (a^p)*. Là, je peux appliquer une loi *log* du logarithme.

Notes

Summary

6m 21s

Relations exponentielles fondamentales

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

2. Pour tous $a > 0, p \in \mathbb{Q}$, on a

$$a^p = \exp(p \ln a).$$

Une puissance rationnelle d'un réel positif peut donc s'exprimer à l'aide de l'exponentielle !

C'est à dire que cette puissance *p*, je peux la placer comme produit devant le *log* et j'obtiens alors que c'est *exp (p ln(a))* Ce qui est remarquable ici, effectivement, une puissance comme ça de ce type avec un *p* rationnel, peut s'exprimer avec l'aide de la fonction exponentielle sous la forme de *exp (p ln (a))*. Nous devions toujours nous assurer que *p* était rationnel, ça c'était du au fait que la loi logarithmique que je viens d'utiliser, était uniquement démontrer pour de tel *p*. A présent, nous pouvons regarder ce qui est ici à droite et il n'y a aucune raison de dire que *p* doit être rationnel, on pourrait dire que *p* est un nombre irrationnel également, le tout fait un sens, j'ai un nombre fois *ln a*. C'est un nombre réel, l'exponentielle d'un nombre réel est définie et j'obtiens ainsi un *a^p*. Et nous allons prendre ça comme définition de puissance. Donc cette relation que l'on a ici, en quelque sorte, elle remplace toutes les définitions de puissance qu'on avait jusqu'à présent. Prenons d'abord un cas particulier de cette relation, ici.

Notes

Summary

7m 16s

Exponentielle de base e

Pour $a = e$, on a donc l'identité

$$e^p = \exp(p) \quad (p \in \mathbb{Q}).$$

Comme la fonction exponentielle est continue, on définit naturellement la fonction puissance de e par

$$\boxed{e^x = \exp(x) \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

On dit que e^x est l'exponentielle de base e.

Prenons *a = e*. Donc on va avoir *e^p* et ici on aura *ln (e)*, *ln (e)* qui vaut *1*. J'ai *e^p = exp (p)* fois le *ln (e)*, c'était fois *1*. Ça c'est vrai pour tous les *p* dans *Q*. Je sais que l'exponentielle, ici, est une fonction qui est définie pour tous les *p* qui seraient réels, elle est continue. Nous allons simplement dire que ça, par définition, c'est la puissance *e^p*, *p* un nombre quelconque rationnel ou irrationnel. Je remplace ce *p* par *x*, je vais simplement dire que *e^x* est toujours donné par *exp (x)* Alors on retrouve les deux notations, la fonction exponentielle tantôt vous la notez *exp (x)*, tantôt vous la notez *e^x*, *e* est ce nombre d'Euler, on parle de la base de la fonction exponentielle.

Notes

Summary

8m 23s

Exponentielle de base a

Pour $a > 0$, on a l'identité

$$a^p = \exp(p \ln a) = e^{p \ln a} \quad (p \in \mathbb{Q}).$$

On définit alors la fonction puissance de $a > 0$ par

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

On dit que a^x est l'exponentielle de base a.

Cette définition justifie la propriété du logarithme naturel

$$\boxed{\ln(a^x) = x \ln a \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

On peut aussi prendre un *a* positif quelconque, alors le *a^p* s'écrit comme *exp(p ln(a))*, donc cette fois-ci, ce *exp* je peux le remplacer par *e^(p. ln (a))* Là encore, nous l'avions démontré uniquement pour *p* dans *Q* mais on peut tout à fait dire que l'expression à droite elle est calculable pour tous les *p* qui sont réels donc je vais remplacer ce *p* par un *x* réel et je vais dire que *a^x*, par définition est toujours donnée par *e^(x. ln(a))* Là on va parler de la fonction exponentielle, *a^x* de base *a*. Notez bien que si on agit de la sorte ça revient à dire que le *log de (a^x)*, donc si je prends le *log* de cette grandeur, j'obtiens *x. ln(a)*, cette fois-ci pour tous les *x* dans *R*. C'est cette loi que nous avions démontrée uniquement pour des *x* rationnels et que j'avais annoncé être vrai également pour des *x* réels quelconques.

Notes

Summary

9m 20s

Relations de l'exponentielle de base e

Proposition

La fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x = e^x \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\, e^{x_2}}$ (relation fondamentale)
- $\boxed{e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}}$ car $e^{x_1} = e^{(x_1-x_2)+x_2} = e^{x_1-x_2}\, e^{x_2}$

Résumons la situation, pour la fonction exponentielle de base *e*. Pour commencer, je reviendrai à la base *a* quelconque un peu plus tard. Alors on a une proposition qui dicte la fonction exponentielle *exp* de *R* dans *R+** Elle a les propriétés suivantes : D'abord, pour tous les *x1* et *x2* qui sont des nombres réels positifs ou négatifs, cela ne joue aucun rôle, le *e^(x1 + x2) = e^x1 + e^x2*. Là, on va parler d'une relation fondamentale de l'exponentielle parce qu'elle est liée à la relation fondamentale sur le *log* mais si vous regardez d'un peu plus près cette relation, vous allez dire que ça je connais au fond, c'est ce que j'ai appris lorsque j'ai appris à calculer avec des puissances. Alors effectivement, la fonction exponentielle est une puissance. Donc on retrouve cette relation ici. Nous l'avions démontré du reste, nous avions dit que *exp (a + b) = exp(a). exp (b)*, donc c'est exactement cette relation. On peut aussi remplacer la somme par une différence, c'est ce que je fait ici. Alors cette fois-ci, *e^(x1 - x2) = e^x1 / e^x2*. Pourquoi ? Vous pouvez justifiez cela avec la relation fondamentale ci-dessus.

Notes

Summary

10m 15s

Relations de l'exponentielle de base e

Proposition

La fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x = e^x \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\, e^{x_2}}$ (relation fondamentale)
- $\boxed{e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}}$ car $e^{x_1} = e^{(x_1-x_2)+x_2} = e^{x_1-x_2}\, e^{x_2}$
- $\boxed{\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2}}$ car $\ln\left[\left(e^{x_1}\right)^{x_2}\right] = x_2 \ln\left(e^{x_1}\right) = x_1 x_2$.

Vous écrivez *e^x1* comme *e* puissance. Alors vous remplacez le *x1* par *x1 - x2 + x2*. Vous regroupez les deux premiers termes, ça c'est tout à fait légitime, et vous retrouvez à l'aide de la relation fondamentale que c'est *e^(x1 - x2). e^(x2)* et vous pouvez passer ce *e^x2* qui est positif. L'exponentielle donne toujours une réponse positive. Vous pouvez passez ce *e^x2* de l'autre côté, et vous obtenez la relation voulue. Troisième propriété, si vous prenez *e^x1*, et vous élevez le tout à la puissance *x2*, alors vous obtenez *e^(x1. x2)*. Notez bien que ici, il faut vraiment écrire ces parenthèses là et là. Sans ces parenthèses le *x2* agirait uniquement sur *x1*. Donc on mettrai uniquement, le *x1* à la puissance *x2*. Ici, on veut vraiment élever à la puissance *x2* l'expression *e^x1*, c'est pour ça que je mets des parenthèses. La vérification, je vais simplement vérifier que les logarithmes sont les mêmes. Le terme à gauche et à droite sont positifs donc je peux prendre les logarithmes à gauche et à droite et si les logarithmes sont égaux les expressions ont été égales également parce que le *log* était une fonction bijective.

Notes

Summary

11m 34s

Relations de l'exponentielle de base e

Proposition

La fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x = e^x \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\, e^{x_2}}$ (relation fondamentale)
- $\boxed{e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}}$ car $e^{x_1} = e^{(x_1-x_2)+x_2} = e^{x_1-x_2}\, e^{x_2}$
- $\boxed{\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2}}$ car $\ln\left[\left(e^{x_1}\right)^{x_2}\right] = x_2 \ln\left(e^{x_1}\right) = x_1 x_2$.

Alors le *log* sur la gauche, c'est *ln [(e^x1)^x2)]* cette puissance *x2*, je peux la placer devant le *log*, en tant que facteur, j'ai donc *x2. ln (e^x1)* et le *log* et l'exponentielle se neutralisant, il reste donc *x1. x2* qui est le log de ce qu'il a y à droite. Regardons si je remplace la base *e* par une base *a* positif réel quelconque.

Notes

Summary

12m 52s

Relations de l'exponentielle de base a

Proposition

La fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a} \end{aligned}$$

a les mêmes propriétés :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\, a^{x_2}}$ car $e^{(x_1+x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)+(x_2 \ln a)} = e^{x_1 \ln a} e^{x_2 \ln a}$
- $\boxed{a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}}$ car $e^{(x_1-x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)-(x_2 \ln a)} = \dfrac{e^{x_1 \ln a}}{e^{x_2 \ln a}}$

Cette fois, j'ai une fonction que je note *a* avec cette parenthèse-point-parenthèse. C'est à dire que le *x* est transformé en *a^x*. Un *a^x* qui par définition est donné par *e^[x. ln (a)]* Je vous rappelle que vous obtenez cela, simplement en écrivant le *a^x* comme le *exp (ln [a^x)])*. On a les mêmes propriétés, vous avez que *a^(x1 + x2)* est donné par *(a^x1). (a^x2)* La vérification est similaire à ceux que nous venons de faire, vous remplacez à gauche ce *a^(x1 + x2)*, vous remplacez par la définition, ici, ce *a^x* est remplacé par *x1 + x2* donc j'ai *e^[(x1 + x2). ln (a)]* Je distribue et j'ai ici l'exponentielle d'une somme, c'est donc *e* puissance le premier terme fois *e* puissance le deuxième terme. Le premier terme, je le compare avec la définition de *a^x* donc c'est ça c'est *a^x1*. Le deuxième terme, pour les mêmes raisons, est égale à *a^x2*. Donc j'ai ici *(a^x1). (a^x2)* Si au lieu d'une somme on mettait une différence dans la puissance donc *a^(x1 - x2)*, vous allez obtenir le quotient (a^x1) / (a^x2). Là de nouveau, on peut justifier le fait en remplaçant à gauche par sa définition.

Notes

Summary

13m 26s

Relations de l'exponentielle de base a

Proposition

La fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a} \end{aligned}$$

a les mêmes propriétés :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\, a^{x_2}}$ car $e^{(x_1+x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)+(x_2 \ln a)} = e^{x_1 \ln a} e^{x_2 \ln a}$
- $\boxed{a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}}$ car $e^{(x_1-x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)-(x_2 \ln a)} = \dfrac{e^{x_1 \ln a}}{e^{x_2 \ln a}}$
- $\boxed{\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}}$ car $\left(e^{x_1 \ln a}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2 \ln a}$.

Donc *e* puissance, le *x* devient *(x1 - x2). ln (a)* En distribuant, et là on a l'exponentielle d'une différence et dans la proposition précédente, nous avions vu que ç'est le quotient d'exponentielle donc j'ai *[exp (x1. ln(a))] / [exp (x2. ln(a))]* Le numérateur, je l'identifie à l'aide de la définition *a^x1*. Le dénominateur, comme *a^x2*. J'obtiens donc le quotient voulu. Finalement, si j'ai *a^x1*, le tout élevé à la puissance *x2*, je peux remplacer cette l'expression simplement par *a^(x1. x2)*. De nouveau, on justifie le tout à l'aide de la définition le *a^x1* c'est *e^[x1. ln (a)]*, le tout à la puissance *x2*. Et là, on sait que l'on peut multiplier les puissances et on obtient *e^(x1. x2. ln (a))* Si je compare ça avec la définition, je vois que cela n'est rien d'autre que *a* à la puissance, ce produit *x1*.

Notes

Summary

15m 04s

Graphe de la fonction a^x

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

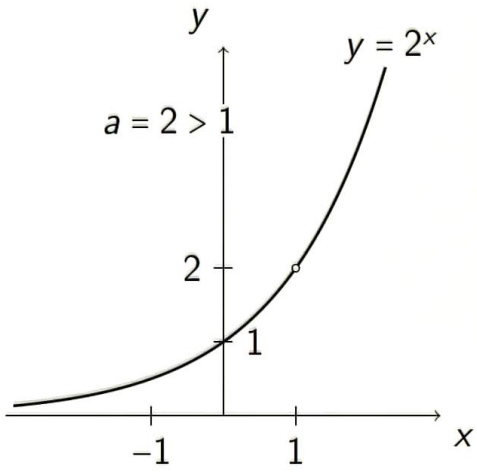
Cette fonction est continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

et monotone

- strictement croissante si $a > 1$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a > 0$$



x2. Alors intéressons nous encore un peu au graphe de la fonction *a^x*. C'est à dire au graphe de cette fonction qui transforme un *x* réel en *x* positif, *a^x*, qui est donné par *e^[x. ln (a)]* Alors cette fonction, elle est continue, c'est la composition de fonction continue. Elle est dérivable, on peut dériver ce *e* puissance bidule. Donc on va obtenir comme dérivée *e* puissance bidule bidule prime. Donc *e* puissance bidule; le bidule prime. Donc il faut dériver une constante fois *x*. On donne la constante. Donc on obtient l'expression *a^x* qui est multiplié par *ln (a)*. Si *a* est plus grand que *1*, le ln (a) est positif. Le *a^x* en tant que *e^[x.ln (a)]* est positif donc la dérivée sera toujours positif. Donc la fonction va être monotone croissante. Alors on peut trouver deux points remarquables. Si je calcule *a^0*, j'ai *e^0* qui donne *1*. Si je calcule *a^1*, alors j'ai *e^ln (a)* qui donne *a*, donc j'obtiens ici, si *a* vaut 3, j'obtiens pour *1* la valeur de *3*. Et à l'aide de ces deux points, je peux dessiner cette fonction monotone croissante. Si je remplace le *a = 3* par *a = e* qui est légèrement plus petit, j'obtiens le graphe que voici. Là, *a* vaut *2*, c'est le graphe de la fonction *2^x*.

Notes

Summary

16m 05s

Graphe de la fonction a^x

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

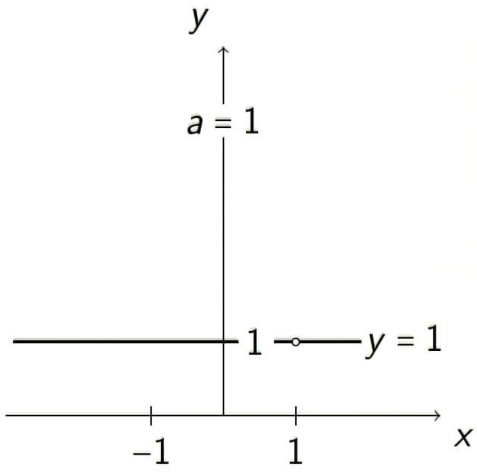
Cette fonction est continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

et monotone

- constante si $a = 1$

$$\frac{d}{dx} 1^x = 0$$



Si on prend le cas *a = 1*, mais celui-là il est vraiment exceptionnel parce que là vous avez en fait *1^x1*, donc *a* vaut *1*, donc ici *ln a* vaut *0*; *e^0*, c'est *1* toujours, c'est une constante. Pour trouver ici, soit dit en passant dans cette formule, la dérivée *1^(x. 0)* donc on retrouve la dérivée nulle, là il n'y a pas grand chose à dire, c'est une droite horizontale.

Notes

Summary

17m 46s

Graphe de la fonction a^x

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

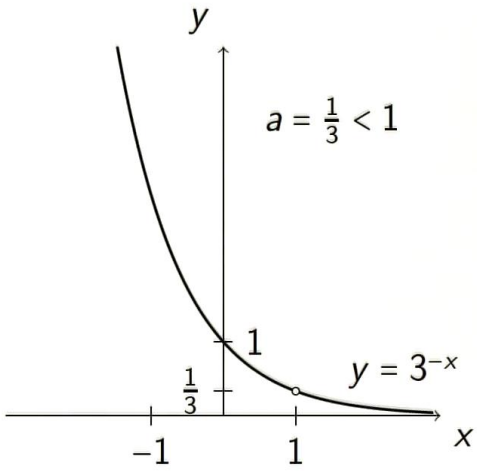
Cette fonction est continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

et monotone

- strictement décroissante si $a < 1$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a < 0.$$



En revanche si *a* est situé entre *0* et *1*, cette fois-ci, le *a^x* reste positif mais le *ln a* devient négatif donc la fonction est monotone décroissante. De nouveau pour *x = 0*, on obtient *1*. Si je prends, ici *x = 0*, j'obtiens *e^0* qui vaut *1*. Si je prends *x =1*, j'obtiens *e^ln(a)* donc j'obtiens *a*; donc ici j'ai pris *a = 1/2*, donc pour *1* j'obtiens *1/2*. La fonction est monotone décroissante. Notez bien qu'on préfère écrire *2^-x* au lieu *(1/2)^x*. Là *a* vaut *1/e*. Là *a* vaut *1/3*. Considérons encore cette fonction exponentielle *a* puissance quelque chose.

Notes

Summary

18m 10s

Logarithme de base a

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est bijective.

Sa fonction inverse est définie par l'équivalence

$$y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y\,.$$

Avec un *a* qui est positif mais pas égale à *1*. Pour *a = 1*, on avait ce cas dégénéré d'une droite horizontale. Mais pour toutes les autres valeurs de *a*, la fonction *a* est bijective, elle est croissante ou décroissante. On peut essayer de résoudre l'équation *y = a^x* par rapport à *x*. Alors lorsque vous avez une équation où l'inconnue, la grandeur recherchée est en puissance, on peut essayer de prendre le logarithme à gauche et à droite, tant que les membres sont positifs. Alors, *a^x*, c'est à dire c'est un *e^[x. ln (a)]* Donc c'est une exponentielle, donc c'est positif. On pourra résoudre cette équation uniquement pour des *y* positifs. Donc je prends le *log* à gauche, *ln y*. A droite c'est *x. ln (a)*, le *ln a* avec *a* différent de *1* est non nul, donc je peux diviser par *ln a*. J'obtiens mon *x* comme *ln (y) / ln (a)*. Alors ce type de quotient se rencontre fréquemment et nous allons l'abréger comme *log* de *y* avec un *a* comme indice. Par définition, le *log (y)* en base *a* est le quotient *ln (y) / ln (a)*.

Notes

Summary

19m 01s

Logarithme de base a

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est bijective.

Sa fonction inverse est définie par l'équivalence

$$y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y\,.$$

La fonction $\log_a$ est donc définie par

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,. \end{aligned}$$

C'est le logarithme de base a.

Alors cela permet de donner la définition que voici : On va définir une fonction *log* en base *a* avec un *a* positif différent de *1* qui transforme *x* en *ln (x) / ln (a)* Ici *ln a* est une constante, c'est le *x* qui est variable. On parlera du logarithme en base *a*.

Notes

Summary

20m 12s

Graphe de la fonction $\log_a$

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est donnée par

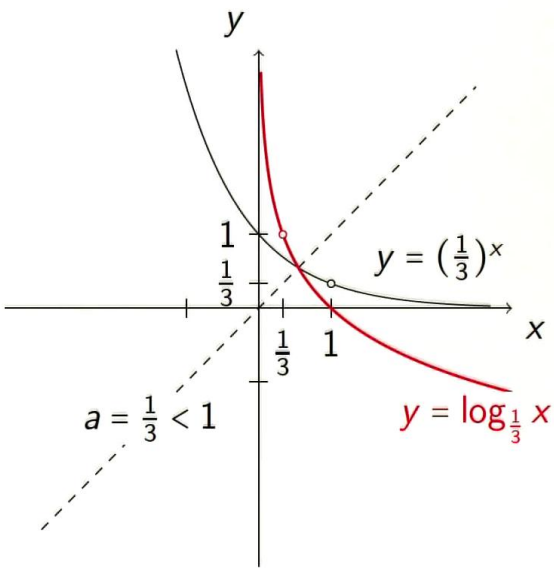
$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \end{aligned}$$

Cette fonction et continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a},$$

- strictement décroissante si $a < 1$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} < 0.$$



Si on veut connaître le graphe de ces fonctions *log* en base *a*, On fera simplement remarquer qu'elle est continue, c'est une fonction, *ln x*, continue divisée par une constante. Elle est dérivable, il suffit de dériver cette expression qui est du type constante fois *ln x*, donc on retrouve la dérivée de *ln x* qui est *1/x* fois cette constante, donc *1/ (x. ln a)* Alors si *a* est positif, le *ln a* est positif aussi. Le *x* doit être positif aussi puisqu'il est dans le domaine de définition de *log* en base *a*, la fonction est monotone croissante. Vous prenez la fonction *3^x* par exemple si *a* vaut *3*; *3^x*. Et la fonction réciproque *log* en base *3* qui est ici et qui est effectivement monotone croissante. Si on prend un *a* entre *0* et *1*, cette fois-ci le *ln a* est négatif. Alors si vous partez depuis *(1/2)^x* ou *2^-x*, la fonction réciproque est donnée par le *log* en base demi de *x*. On voit, cette fois-ci, que c'est une fonction monotone croissant. Le *log* de *1* vaut toujours *0* et le *log* de la base *1/2* c'est *[ln (1/2)] / [ln (1/2)]* donne *1*. Ça, c'est un phénomène qu'on retrouve toujours. Là, si la base vaut *1/3*, le log en base *1/3* de *1/3* vaut *1*.

Notes

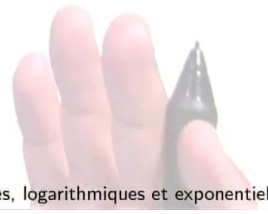
Summary

20m 30s

Logarithmes de base e, 10 et 2

Les logarithmes les plus utilisés sont

- le logarithme naturel, noté ln ,
- le logarithme de base 10, noté $\log_{10}$,
- le logarithme de base 2, noté $\log_2$.



Alors les bases les plus utilisées, alors c'est largement la base le nombre d'Euler, donc le *log* naturel est de loin le logarithme le plus utilisé. Pourquoi ? Simplement parce qu'il présente les propriétés les plus simples, la dérivée est simplement *1/x*, la réciproque est simplement *e^x*, la dérivée de la réciproque donc la dérivée de *e^x* c'est *e^x*. Par le passé, on avait beaucoup utilisé le logarithme en base *10*, il était particulièrement intéressant parce qu'on pouvait facilement calculer les *log* des puissances de *10*, donc le log en base *10* de *1000* était *3*, le *log* en base *10* de *100* était *2*, etc. On utiliser encore le *log* en base *2*, notamment en théorie de l'information. Nous arrivons ainsi à la fin de cette séance, la prochaine séance sera quelque peu particulière, ça sera la dernière séance de ce cours. Alors, à la prochaine.

Notes

Summary

22m 05s