Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.3 Exponentielles et logarithmes

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

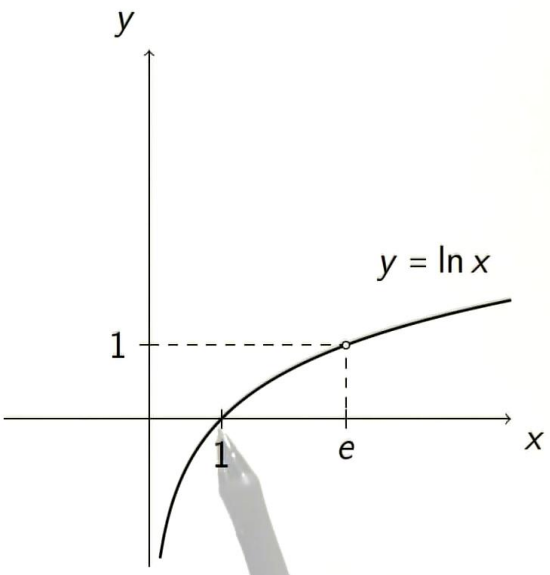
Video

Définition et graphe de l'exponentielle

Nous avons vu que la fonction logarithme naturel

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

est continue et strictement croissante.
Elle est donc bijective.



Guten Tag! Während der letzten beiden Vorträge haben wir den Begriff Logarithmus und logarithmischer Funktionen eingeführt. Heute werden wir uns für die Umkehrfunktion interessieren. Beginnen wir damit, uns diese logarithmische Funktion anzuschauen: *ln*der eine positive reelle Zahl in eine beliebige reelle Zahl umgewandelt. Das *ln x* ist durch einen Flächeninhalt gegeben, das wir bezeichnet haben als Integral von 1 in *x* der Funktion *1/t dt* und wir haben eine Zahl erhalten, die konstant ist, sie ist ableitbar, sie nimmt stetig zu. Wir haben gesagt, dass wenn *x* rechts gegen 0 tendiert, wird der *log* in Richtung - *unendlich* tendieren. Wenn *x* in Richtung + *unendlich* tendiert, wird der *log* in Richtung + *unendlich* tendieren. Sicher sehr langsam, aber dieser *log x* wird die Unendlichkeit kreuzen. Also erhalten wir eine Funktion, die bijektiv ist. Jeder Wert von *y* wird genau ein Mal vom *log x* eingenommen. Wir haben uns auch auf das *log x* der besonderen Werte konzentriert. Demnach ist das *log (1) = 0* das *log (e) = 1*. Also wird die Umkehrfunktion *exponentiale* Funktion genannt.

Notes

Summary

0m 04s

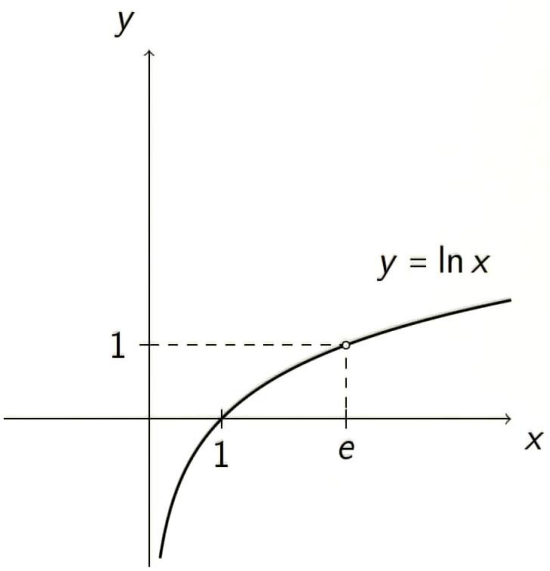
Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction inverse, appelée fonction exponentielle, est définie par

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \exp(\ln x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}_+^*) \\ \ln(\exp x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$



Sie wird bezeichnet als, wie wir es abkürzen werden, *"exp"*. Es sind die drei ersten Buchstaben der Exponentialfunktion. Also wird sie, schauen wir noch einmal, den *log*, der von reellen positiven Zahlen ausgeht, in reelle Zahlen umwandeln. Die Umkehrfunktion wird die positiven und negativen reellen Zahlen in positive reelle Zahlen umwandeln. Wir werden bemerken, dass *x* einfach zu *exp x* umgewandelt wird. Per definitionem haben wir *exp(ln)*, wobei es so ist, dass, was die eine Funktion schafft, von der anderen zerstört wird. Zum Beispiel habe ich *exp(ln x))*, das *x* ergibt, dies gilt für all jene *x*, wo ich links etwas klar Bestimmtes haben kann. Ich erinnere Sie daran, dass *ln x* ausschließlich positive *x* akzeptiert. Also werden wir hier sagen müssen, dass *x* positiv ist. Im Gegenzug ist *exp* nicht so problematisch, *exp* akzeptiert alle reellen Zahlen. Das wird deutlicher, wenn man hier den Graphen von *ln x* nimmt. Wenn Sie den Graphen der Umkehrfunktion nehmen, das heißt, wenn Sie eine Achsensymmetrie *y = x.* machen.

Notes

Summary

1m 17s

Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction inverse, appelée fonction exponentielle, est définie par

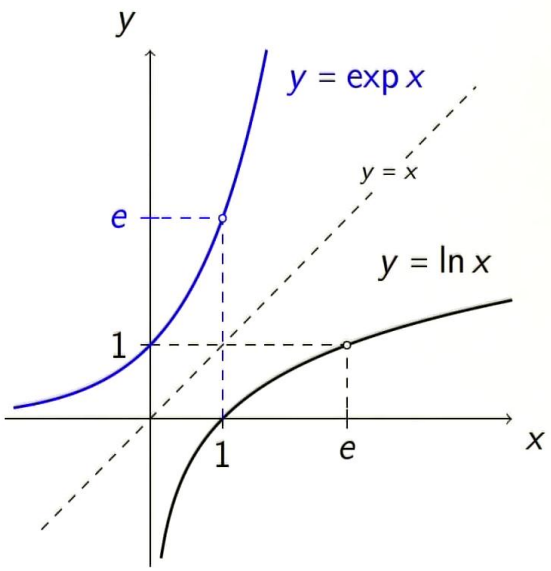
$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \exp(\ln x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}_+^*) \\ \ln(\exp x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Son graphe s'obtient par symétrie à partir de celui du logarithme naturel.

Aussi, $\boxed{\exp(0) = 1}$ et $\boxed{\exp(1) = e}$.



Hier, Sie erhalten den Graphen der Exponentialfunktion und man sieht sehr gut, dass die Exponentialfunktion alle reellen Zahlen akzeptiert und positive Zahlen ergibt. Die erste Reihe ist also vollständig bestimmt für alle positiven *x*. In dem zweiten Beispiel nehmen wir zuerst ein *x*, wenden *exp* und dann *log* an. In der ersten Etappe akzeptiert *exp x* alle reellen *x* und man sieht es, dass eine positive Zahl herauskommt, also kann der *log* den Wert *exp x* berechnen, und man erhält *x*, dieses Mal für alle *x* in *R*. Wenn wir uns noch einmal den Graphen der Exponentialfunktion anschauen, die also eine steigende Monotonie ist, erhalten wir die beiden bestimmten Werte, *exp (0) = 1* und *exp (1) = e*; dies sind die Werte, die den bemerkenswerten Werten der natürlichen *log* Funktion entsprachen.

Notes

Summary

2m 27s

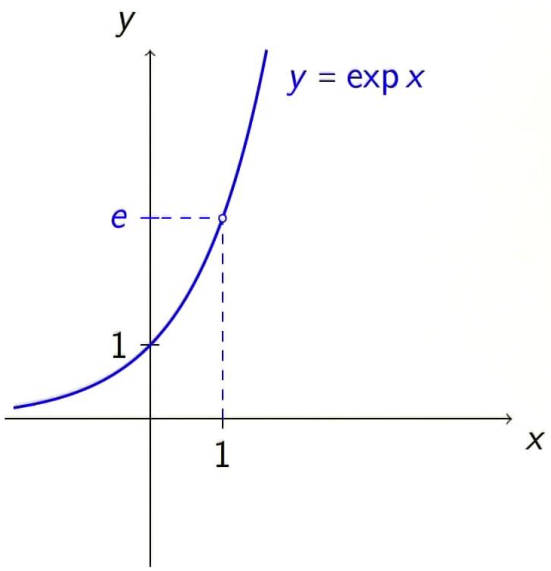
Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction exponentielle est

- strictement croissante
- non majorée, $\boxed{\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty}$
- minorée et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0}$
- continue
- dérivable, $\boxed{\frac{d}{dx}\exp x = \exp x}$.

  En effet, en dérivant l'identité $\ln(\exp x) = x$, nous avons

$$\frac{1}{\exp x}\cdot \exp' x = 1\,.$$



Benennen wir nun einige wichtige Gesetze der Exponentialfunktion. Hier ist der Graph, er ist stetig ansteigend, das haben wir gesagt. Er wird nicht erhöht, das heißt, dass wenn *x* in Richtung unendlich tendiert, *e^x* ebenfalls in Richtung + *infini* tendiert. Wir hatten hier für den *log* die Umkehrfunktion, eine Funktion, die einen sehr langsamen Anstieg in Richtung Unendlichkeit aufwies. Die Umkehrfunktion, hier *e^x*, wird im Gegenzug in Richtung + *infini* tendieren, und zwar sehr schnell. Sie ist absteigend, das heißt, dass wenn *x* in Richtung - *unendlich* tendiert, sieht man, dass *e^x* in Richtung *0* tendieren wird. Diese horizontale Asymptote entspricht der verikalen Asymptote, die wir mit *ln x* herausgefunden haben. Sie ist konstant als konstante Umkehrfunktion. Sie ist ableitbar, sie hat eine bemerkenswerte Ableitung. Die Ableitung von *exp x* ist gleich *exp x*. Wir können uns davon überzeugen, indem wir von der Gleichung *ln (exp x) = x* ausgehen. Dies gilt für alle beliebigen Zahlen *x*. Indem ich ableite, erhalte ich also die *log* der Werte links, die ich abgeleitet habe, *1 /* Zahl Zahl Strich.

Notes

Summary

3m 24s

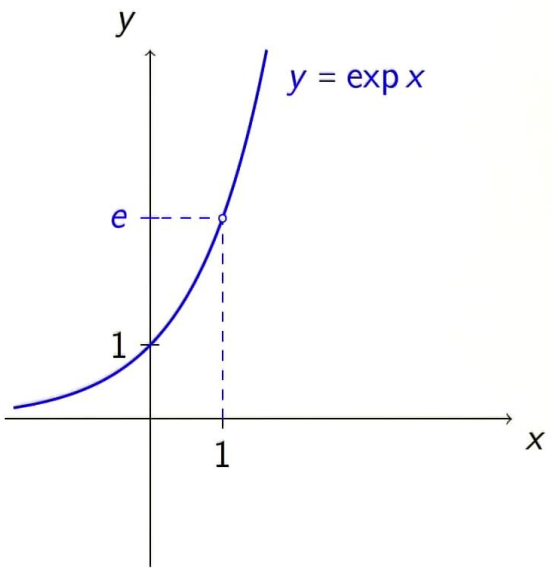
Définition et graphe de l'exponentielle

La fonction exponentielle est

- strictement croissante
- non majorée, $\boxed{\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty}$
- minorée et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0}$
- continue
- dérivable, $\boxed{\frac{d}{dx}\exp x = \exp x}$.

  En effet, en dérivant l'identité $\ln(\exp x) = x$, nous avons

$$\frac{1}{\exp x}\cdot \exp' x = 1\,.$$



Also *1 / exp x. exp' x*. Rechts erhalte ich nach der Ableitung *1*. Diese Gleichung kann ich in Bezug auf die Ableitung von *x* lösen und ich erhalte das Ergebnis, dass die Ableitung von *x* ebenfalls eine Exponentialfunktion von *x* ist.

Notes

Summary

4m 35s

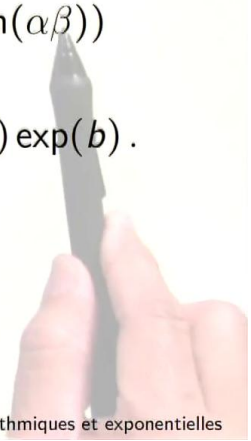
Relations exponentielles fondamentales

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\,\exp(b)\,.}$$

En effet, en posant $a = \ln\alpha$ et $b = \ln\beta$ $(\alpha, \beta > 0)$, nous avons

$$\begin{aligned}\exp(a+b) &= \exp\left(\ln\alpha + \ln\beta\right)\\ &= \exp\left(\ln(\alpha\beta)\right)\\ &= \alpha\beta\\ &= \exp(a)\exp(b)\,.\end{aligned}$$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Also hat die Exponentialfunktion bemerkenswerte Gesetze, die von den bemerkenswerten Gesetzen der logarithmischen Funktion abhängen. Hier ist das erste, *exp (a + b)*, *a + b* sind beliebige reelle Zahlen, also kann ich dies durch die Exponentialfunktion des ersten Terms ersetzen mal die Exponentialfunktion des zweiten Terms, also durch *exp(a). exp (b)*. Warum? Wir werden mit *exp (a + b)* beginnen, *a* und *b* sind zwei reelle Zahlen. Die reelle Zahl *a* kann ich wie den Logarithmus einer bestimmten Zahl α schreiben, einer positiven reellen Zahl. Und *b* kann ich schreiben, dass der natürliche *log* von β eine positive Zahl β ist. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass *log* eine surjektive Funktion ist. Es ist eine Funktion, die jeden reellen Wert genau ein Mal nimmt. Ich habe exakt ein α und ein β dieser Art. Dann ersetze ich *a* und *b* durch *ln a* und *ln b*. Ich habe hier eine Summe der Logarithmen. Hier benutze ich das fundamentale Gesetz der Logarithmen, und ich weiß, dass dies der Logarithmus des Produktes α mal β ist. Hier habe ich den *exp* und den *ln*, der eine wird den anderen ausgleichen, es bleibt α.

Notes

Summary

4m 51s

Relations exponentielles fondamentales

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)\,.}$$

2. Pour tous $a > 0, p \in \mathbb{Q}$, on a

$$\boxed{a^p = \exp(p \ln a)\,.}$$

En effet,

$$\begin{aligned} a^p &= \exp\left(\ln(a^p)\right) \\ &= \exp(p \ln a)\,. \end{aligned}$$

β. Was ist also α? Wenn *a* durch *ln α* gegeben ist, wenn ich die Exponentialfunktion nehme, werde ich herausbekommen, dass die Exponentialfunktion von *a* α ergibt. Also habe ich hier *exp(a)* und für β *exp(b)*. Also erhalte ich schließlich das Ergebnis, dass die Exponentialfunktion der Summe gleich ist wie das Produkt der Exponentialfunktionen. Zweite wichtige Gleichung, wenn ich ein *a* nehme, dieses Mal positiv, ein *p*, ein Element von *Q*, also eine rationale Zahl. Ich nehme an, dass *a^p* gegeben ist durch *exp (p ln a)*. Warum? Der Grund ist einfach, ich werde hier einen Trick geben, der oft interessante Ergebnisse bringt. Ich werde dieses *a^p* wieder aufgreifen und ich werden es zuerst anwenden auf den *log* und dann auf den *exp*. Diese beiden Funktionen neutralisieren sich. Was interessant ist, innerhalb von *exp* habe ich dieses *ln (a^p)*. Hier kann ich ein Gesetz *log* des Logarithmus anwenden. Das heißt, dass ich diese Potenz *p* als Produkt vor den *log* setzen kann, und ich erhalte also, dass es *exp (p ln(a))* ist.

Notes

Summary

6m 09s

Relations exponentielles fondamentales

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

2. Pour tous $a > 0, p \in \mathbb{Q}$, on a

$$a^p = \exp(p \ln a).$$

Une puissance rationnelle d'un réel positif peut donc s'exprimer à l'aide de l'exponentielle !

Was hier tatsächlich bemerkenswert ist, eine Potenz von dieser Art mit einem rationalen *p* kann sich mithilfe der Exponentialfunktion ausdrücken in Form von *exp (p ln (a))*. Wir mussten uns immer vergewissern, dass *p* rational war, dies war auf den Fakt zurückzuführen, dass das logarithmische Gesetz, das ich soeben angewandt habe, nur für diese *p* bewiesen ist. Jetzt können wir und anschauen, was hier rechts ist und es gibt keinen Grund, zu sagen, dass *p* rational ist, wir könnten genauso sagen, dass *p* eine irrationale Zahl ist, das macht insgesamt Sinn, ich habe eine Zahl mal *ln a*. Es ist eine reelle Zahl, die Exponentialfunktion einer reellen Zahl ist bestimmt und ich erhalte so ein *a^p*. Und wir werden dies als Definition von Potenz nehmen. Somit ersetzt diese Gleichung, die wir hier haben, irgendwie alle Definitionen von Potenz, die wir bis jetzt hatten. Nehmen wir zuerst einen bestimmten Fall dieser Gleichung hier.

Notes

Summary

7m 25s

Exponentielle de base e

Pour $a = e$, on a donc l'identité

$$e^p = \exp(p) \quad (p \in \mathbb{Q}).$$

Comme la fonction exponentielle est continue, on définit naturellement la fonction puissance de e par

$$\boxed{e^x = \exp(x) \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

On dit que e^x est l'exponentielle de base e.

Nehmen wir *a = e*. Also werden wir *e^p* haben, und hier werden wir *ln (e)* erhalten, und *ln (e)* ergibt *1*. Ich habe *e^p = exp (p)* mal *ln (e)*, das war mal *1*. Das gilt für alle *p* in *Q*. Ich weiß, dass die Exponentialfunktion hier eine Funktion ist, die bestimmt wird für alle *p*, die reelle Zahlen sind, sie ist konstant. Wir werden einfach sagen, dass dies per definitionem die Potenz *e^p* ist, *p*, eine beliebige rationale oder irrationale Zahl. Ich ersetze dieses *p* durch *x*, ich werde einfach sagen, dass *e^x* immer durch *exp (x)* gegeben ist. Also findet man beide Schreibweisen wieder, mal schreiben Sie die Exponentialfunktion *exp (x)*, mal schreiben Sie *e^x*, *e* ist diese Eulerzahl, man spricht von der Basis der Exponentialfunktion.

Notes

Summary

8m 23s

Exponentielle de base a

Pour $a > 0$, on a l'identité

$$a^p = \exp(p \ln a) = e^{p \ln a} \quad (p \in \mathbb{Q}).$$

On définit alors la fonction puissance de $a > 0$ par

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

On dit que a^x est l'exponentielle de base a.

Cette définition justifie la propriété du logarithme naturel

$$\boxed{\ln(a^x) = x \ln a \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

Man kann auch eine beliebige positive Zahl *a* nehmen, dann schreibt sich das *a^p* wie *exp(p ln(a))*, also kann ich dieses Mal dieses *exp* durch *e^(p. ln (a))* ersetzen. Auch dies haben wir nur für *p* in *Q* bewiesen, doch man kann voll und ganz sagen, dass der Ausdruck rechts für alle *p* berechenbar sind, die reell sind, also werde ich dieses *p* durch eine reelle Zahl *x* ersetzen und ich werde sagen, dass *a^x*, das per definitionem immer durch *e^(x. ln(a))* gegeben ist. Hier werden wir über die Exponentialfunktion *a^x* mit der Basis *a* sprechen. Merken Sie sich gut, dass, wenn man auf diese Weise vorgeht, es darauf hinausläuft zu sagen, dass *log de (a^x)*, wenn ich also den *log* dieser Größe nehme, erhalte ich *x. ln(a)*, dieses Mal für alle *x* in *R*. Genau dieses Gesetz haben wir einzig und allein für die reellen *x* bewiesen und ich hatte angekündigt, dass dies auch wahr ist für die beliebigen reellen Zahlen *x*.

Notes

Summary

9m 20s

Relations de l'exponentielle de base e

Proposition

La fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x = e^x \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\, e^{x_2}}$ (relation fondamentale)
- $\boxed{e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}}$ car $e^{x_1} = e^{(x_1-x_2)+x_2} = e^{x_1-x_2}\, e^{x_2}$

Fassen wir die Situation für die Basis-Exponentialfunktion *e* zusammen. Zu Beginn, auf den beliebigen Wert für die Basis *a* werde ich etwas später zurückkommen. Wir haben also einen Satz, der die Exponentialfunktion *exp* von *R* in *R+** vorgibt. Er hat die folgenden Gesetze: Zunächst spielt dies für alle *x1* und *x2*, die reelle Zahlen sind, positiv oder negativ, keine Rolle, *e^(x1 + x2) = e^x1 + e^x2*. Hier werden wir von einer fundamentalen Gleichung der Exponentialfunktion sprechen, da sie von der fundamentalen Gleichung auf dem *log* abhängt, doch wenn Sie sich diese Gleichung etwas näher anschauen, werden Sie feststellen, dass ich dies sehr gut kenne, und zwar ist es das, was ich gelernt habe, als ich gelernt habe, mit Potenzen zu rechnen. Tatsächlich ist die Exponentialfunktion eine Potenz. Daher erhält man diese Gleichung hier. Wir haben es anhand des Rests gezeigt, wir haben gesagt, dass *exp (a + b) = exp(a). exp (b)*, also ist das genau diese Gleichung. Man kann auch die Summe durch eine Differenz ersetzen, das habe ich hier gemacht. Also ist dieses Mal *e^(x1 - x2) = e^x1 / e^x2*. Warum?

Notes

Summary

10m 15s

Relations de l'exponentielle de base e

Proposition

La fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x = e^x \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\, e^{x_2}}$ (relation fondamentale)
- $\boxed{e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}}$ car $e^{x_1} = e^{(x_1-x_2)+x_2} = e^{x_1-x_2}\, e^{x_2}$
- $\boxed{\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2}}$ car $\ln\left[\left(e^{x_1}\right)^{x_2}\right] = x_2 \ln\left(e^{x_1}\right) = x_1 x_2$.

Sie können dies mit der obigen fundamentalen Gleichung rechtfertigen. Sie schreiben *e^x1* als Potenz *e*. Anschließend ersetzen Sie das *x1* durch *x1 - x2 + x2.*. Sie gruppieren die beiden ersten Terme neu, das ist vollkommen legitim, und Sie erhalten mithilfe der fundamentalen Gleichung *e^(x1 - x2). e^(x2)* und Sie können dieses *e^x2* verschieben, das positiv ist. Die Exponentialfunktion ergibt immer ein positives Ergebnis. Sie können das *e^x2* auf die andere Seite verschieben, und Sie erhalten die gewünschte Gleichung. Das dritte Gesetz, wenn Sie *e^x1* nehmen, und das alles auf die Potenz *x2* erheben, dann erhalten Sie *e^(x1. x2)*. Merken Sie sich gut, dass Sie hier wirklich diese runden Klammern da und dort schreiben müssen. Ohne diese Klammern wirkt sich das *x2* nur auf *x1* aus. Also werden wir nur das *x1* auf die Potenz *x2* erheben. Hier will man wirklich den Ausdruck *e^x1* zur Potenz *x2* erheben, deshalb setze ich hier Klammern. Die Überprüfung, ich werde einfach überprüfen, dass die Logarithmen dieselben sind.

Notes

Summary

11m 28s

Relations de l'exponentielle de base e

Proposition

La fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp x = e^x \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\, e^{x_2}}$ (relation fondamentale)
- $\boxed{e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}}$ car $e^{x_1} = e^{(x_1-x_2)+x_2} = e^{x_1-x_2}\, e^{x_2}$
- $\boxed{\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2}}$ car $\ln\left[\left(e^{x_1}\right)^{x_2}\right] = x_2 \ln\left(e^{x_1}\right) = x_1 x_2$.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Die Terme links und rechts sind positiv, also kann ich die Logerithmen links und rechts nehmen, und wenn die Logarithmen gleich sind, waren die Ausdrücke ebenfalls gleich, weil der *log* eine bijektive Funktion war. Also ist das *log* auf der linken Seite *ln [(e^x1)^x2)]* diese Potenz *x2* kann ich vor den *log* setzen, als Faktor, so habe ich *x2. ln (e^x1)* und der *log* und die Exponentialfunktion neutralisieren sich, es bleibt also *x1. x2*, was der log dessen ist, was sich rechts befindet. Schauen wir uns den Fall an, wenn ich die Basis *e* durch eine beliebige positive reelle Basis *a* ersetze.

Notes

Summary

12m 40s

Relations de l'exponentielle de base a

Proposition

La fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a} \end{aligned}$$

a les mêmes propriétés :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\, a^{x_2}}$ car $e^{(x_1+x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)+(x_2 \ln a)} = e^{x_1 \ln a} e^{x_2 \ln a}$
- $\boxed{a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}}$ car $e^{(x_1-x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)-(x_2 \ln a)} = \dfrac{e^{x_1 \ln a}}{e^{x_2 \ln a}}$

Dieses Mal habe ich eine Funktion, die ich als *a* notiere, mit dieser Klammer-Punkt-Klammer. Das heißt, dass das *x* in *a^x* umgewandelt wird. Ein *a^x*, das per definitionem durch *e^[x. ln (a)]* gegeben ist. Ich erinnere Sie daran, dass Sie dies einfach erhalten, indem Sie *a^x* ebenso wie *exp (ln [a^x)])* schreiben. Man hat hier dieselben Gesetze, Sie haben den Fakt, dass *a^(x1 + x2)* durch *(a^x1). (a^x2)* gegeben ist. Die Überprüfung ist ähnlich wie jene, die wir soeben durchgeführt haben, Sie ersetzen links dieses *a^(x1 + x2)*, sie ersetzen es durch die Definition, hier wird dieses *a^x* durch *x1 + x2* ersetzt, also habe ich *e^[(x1 + x2). ln (a)]*. Ich gebe dies aus und erhalte hier die Exponentialfunktion einer Summe, dies ist also *e* Potenz als erster Term mal *e* als zweiter Term. Den ersten Term vergleiche ich mit der Definition von *a^x*, also macht dies *a^x1*. Der zweite Term ist aus denselben Gründen gleich *a^x2*. Also habe ich hier *(a^x1). (a^x2)*. Wenn man anstelle einer Summe eine Differenz in die Potenz erhebt, also *a^(x1 - x2)*, werden Sie den Quotienten (a^x1) / (a^x2) erhalten.

Notes

Summary

13m 26s

Relations de l'exponentielle de base a

Proposition

La fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a} \end{aligned}$$

a les mêmes propriétés :
pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- $\boxed{a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\, a^{x_2}}$ car $e^{(x_1+x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)+(x_2 \ln a)} = e^{x_1 \ln a} e^{x_2 \ln a}$
- $\boxed{a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}}$ car $e^{(x_1-x_2)\ln a} = e^{(x_1 \ln a)-(x_2 \ln a)} = \dfrac{e^{x_1 \ln a}}{e^{x_2 \ln a}}$
- $\boxed{\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}}$ car $\left(e^{x_1 \ln a}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2 \ln a}$.

Hier können wir erneut die Tatsache beweisen, indem wir links durch seine Definition ersetzen. Also wird bei der Potenz *e* das *x* zu *(x1 - x2). ln (a)*. Beim Verteilen, und hier haben wir die Exponentialfunktion einer Differenz, und in dem vorigen Satz haben wir gesehen, dass es der Quotient der Exponentialfunktion ist, also habe ich hierbei *[exp (x1. ln(a))] / [exp (x2. ln(a))]*. Den Zähler bestimme ich mithilfe der Definition *a^x1*. Den Nenner als *a^x2*. So erhalte ich den gewünschten Quotienten. Schließlich, wenn ich *a^x1* habe, und das Ganze auf die Potenz *x2* erhebe, kann ich diesen Ausdruck einfach durch *a^(x1. x2)* ersetzen. Erneut begründen wir das Ganze mithilfe der Definition *a^x1*, das ist *e^[x1. ln (a)]*, alles mit der Potenz *x2.*. Und hier wissen wir, dass wir die Potenzen multiplizieren können und erhalten so *e^(x1. x2. ln (a))* Wenn ich dies mit der Definition vergleiche, sehe ich, dass dies nichts anderes ist als *a* in der Potenz, dieses Produkt *x1. x2.*.

Notes

Summary

14m 55s

Graphe de la fonction a^x

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

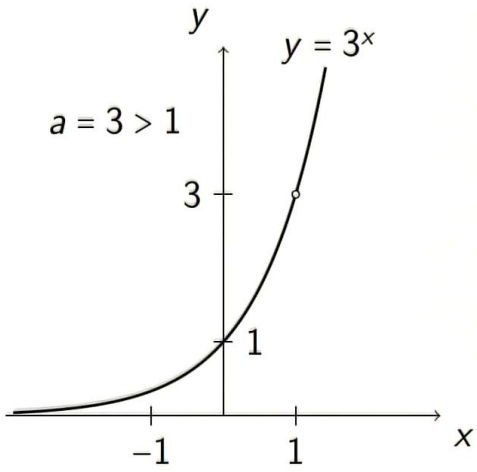
Cette fonction est continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

et monotone

- strictement croissante si $a > 1$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a > 0$$



Nun interessieren wir uns ein wenig für den Graphen der Funktion *a^x*.. Das heißt, für den Graphen jener Funktion, die eine reelle Zahl *x* in eine positive Zahl *x* umwandelt, *a^x*, das durch *e^[x. ln (a)]* gegeben ist. Also, diese Funktion ist konstant, es ist die konstante Zusammensetzung der Funktion. Sie ist ableitbar, man kann diese Potenz *e* ableiten. Also werden wir als Ableitung *e* Potenz irgendwas irgendwas Strich erhalten. Also *e* beliebige Potenz; die gesuchte Zahl. Also müssen wir eine Konstante *x* mal ableiten. Wir geben die Konstante vor. Also erhalten wir den Ausdruck *a^x*, der mal *ln (a)* multipliziert wird. Wenn *a* größer ist als *1*, dann ist ln (a) positiv. Das *a^x* ist als *e^[x.ln (a)]* positiv, also wird die Ableitung immer positiv sein. Somit wird die Funktion monoton ansteigend sein. Dann können wir zwei bemerkenswerte Punkte finden. Wenn ich *a^0* berechne, habe ich *e^0*, das *1* ergibt. Wenn ich *a^1* berechne, dann habe ich *e^ln (a)*, das *a* ergibt, also erhalte ich hier, wenn *a* 3 entspricht, für *1* den Wert von *3*.

Notes

Summary

16m 08s

Graphe de la fonction a^x

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

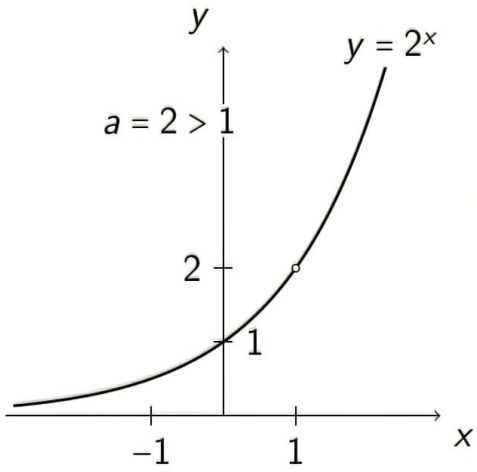
Cette fonction est continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

et monotone

- strictement croissante si $a > 1$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a > 0$$



Und mithilfe dieser beiden Punkte kann ich diese monotone, ansteigende Funktion zeichnen. Wenn ich das *a = 3* durch *a = e* ersetze, das ein wenig kleiner ist, erhalte ich diesen Graphen hier. Hier ist *a* gleich *2*, das ist der Graph der Funktion *2^x*.

Notes

Summary

17m 28s

Graphe de la fonction a^x

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

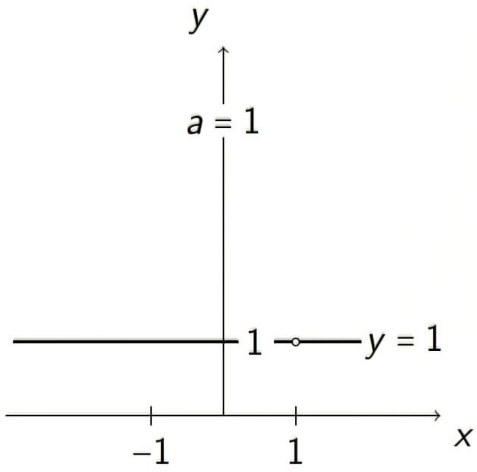
Cette fonction est continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

et monotone

- constante si $a = 1$

$$\frac{d}{dx} 1^x = 0$$



Wenn man diesen Fall *a = 1* nimmt, aber dieser ist wirklich eine Ausnahme, weil Sie da tatsächlich *1^x1* haben, also ist *a* gleich *1*, also ist hier *ln a* gleich *0*; *e^0* ist immer *1*, es ist eine Konstante. Um hier, wohlgemerkt durch Umverteilung in dieser Formel, die Ableitung *1^(x. 0)* zu finden, hier kommt also die Ableitung Null heraus, hier gibt es nicht viel zu sagen, es ist eine waagerechte Gerade.

Notes

Summary

17m 46s

Graphe de la fonction a^x

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est donnée par

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

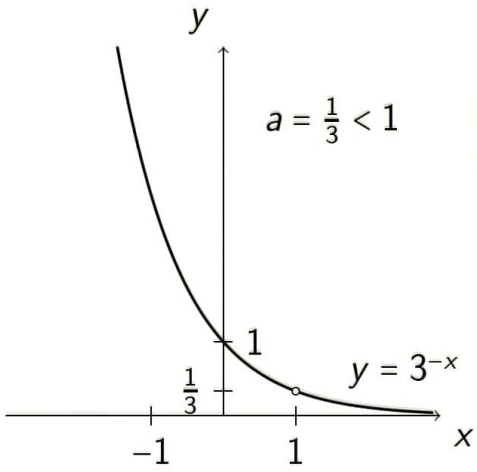
Cette fonction est continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

et monotone

- strictement décroissante si $a < 1$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a < 0.$$



Wenn wiederum *a* zwischen *0* und *1* liegt, bleibt das *a^x* positiv, jedoch wird das *ln a* negativ, also ist die Funktion monoton absteigend. Erneut erhält man für *x = 0* das Ergebnis *1*. Wenn ich hier *x = 0* nehme, erhalte ich *e^0*, das *1* ergibt. Wenn ich *x =1* nehme, erhalte ich *e^ln(a)*, also erhalte ich *a*; also habe ich hier *a = 1/2* genommen, wobei ich für *1* das Ergebnis *1/2.* erhalte. Die Funktion ist monoton absteigend. Merken Sie sich gut, dass man vorzugsweise *2^-x* anstelle von *(1/2)^x.* schreibt. Hier ist *a* gleich *1/e.*. Hier ist *a* gleich *1/3.*.

Notes

Summary

18m 10s

Logarithme de base a

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est bijective.

Sa fonction inverse est définie par l'équivalence

$$y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y\,.$$

Betrachten wir noch einmal diese Exponentialfunktion *a* Potenz von irgendwas. Mit einem positiven *a*, das aber nicht gleich *1* ist. Für *a = 1* hatten wir diesen ungewöhnlichen Fall einer waagerechen Gerade. Doch für alle anderen Werte von *a* ist die Funktion *a* bijektiv, sie ist entweder an- oder absteigend. Wir können versuchen, die Gleichung *y = a^x* in Bezug auf *x* zu lösen. Wenn Sie also eine Gleichung haben, wo die Unbekannte, die gesuchte Größe, in der Potenz steht, können Sie versuchen, den Logarithmus links oder rechts zu nehmen, so lange die Glieder positiv sind. Das heißt also, dass *a^x* ein *e^[x. ln (a)]* ist. Es ist also eine Exponentialfunktion, und somit positiv. Wir können diese Gleichung nur für positive Zahlen *y* lösen. Also nehme ich den *log* links, *ln y*. Rechts ist es *x. ln (a)*, das *ln a*, wobei *a* verschieden von *1* ist, und nicht null, also kann ich es durch *ln a* teilen. Ich erhalte mein *x* in Form von *ln (y) / ln (a)*. So ergibt sich sofort diese Art Quotient und wir werden ihn abkürzen als *log* von *y* mit einem *a* als Messzahl. Per Definition ist der *log (y)* mit der Basis *a* der Quotient *ln (y) / ln (a)*.

Notes

Summary

18m 54s

Logarithme de base a

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $a^{(\cdot)}$ est bijective.

Sa fonction inverse est définie par l'équivalence

$$y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y\,.$$

La fonction $\log_a$ est donc définie par

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,. \end{aligned}$$

C'est le logarithme de base a.

Also ermöglicht dies es, die folgende Definition zu geben: Wir werden eine Funktion *log* mit Basis *a* definieren, mit einem positiven *a*, das verschieden von *1* ist, welches *x* in *ln (x) / ln (a)* umwandelt. Hier ist *ln a* eine Konstante, es ist das *x*, das variabel ist. Wir werden vom Logarithmus auf der Basis von *a* sprechen.

Notes

Summary

20m 12s

Graphe de la fonction $\log_a$

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est donnée par

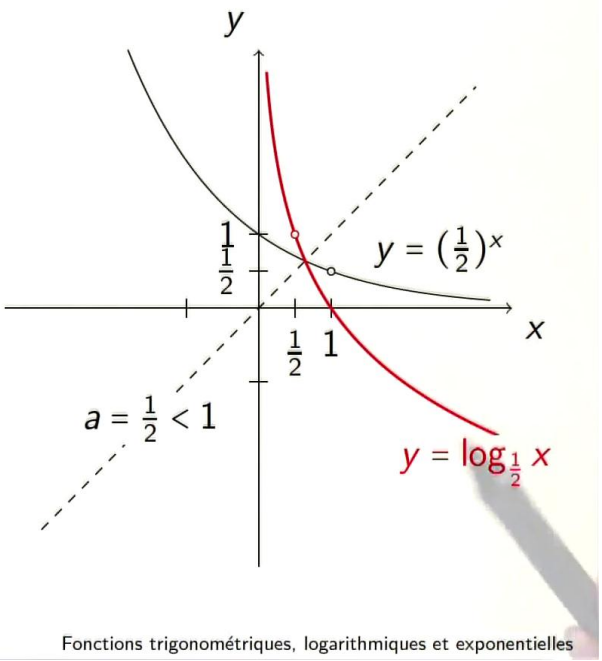
$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \end{aligned}$$

Cette fonction et continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a},$$

- strictement décroissante si $a < 1$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} < 0.$$



Wenn wir den Graphen dieser *log* Funktionen mit der Basis *a* kennen wollen, wir werden einfach bemerken, dass sie konstant ist, es ist eine konstante Funktion, *ln x*, geteilt durch eine Konstante. Sie ist ableitbar, es genügt, diesen Ausdruck abzuleiten, der eine Art Konstante mal *ln x* ist, also erhält man die Ableitung von *ln x*, die *1/x* mal diese Konstante ist, also *1/ (x. ln a)*. Wenn also *a* positiv ist, ist der *ln a* auch positiv. Das *x* muss ebenfalls positiv sein, zumal es in dem Definitionsbereich von *log* auf der Basis von *a* ist, die Funktion ist monoton ansteigend. Nehmen Sie die Funktion *3^x*, wenn beispielsweise *a* gleich *3*; *3^x*. Und die Umkehrfunktion *log* mit der Basis *3*, die hier ist und die in der Tat monoton ansteigend ist. Wenn man ein *a* zwischen *0* und *1* nimmt, ist *ln a* dieses Mal negativ Wenn Sie also von *(1/2)^x* ausgehen oder von *2^-x*, ist die Umkehrfunktion gegeben durch den *log* auf halber Basis von *x*. Man sieht, dass es dieses Mal eine monotone, ansteigende Funktion ist.

Notes

Summary

20m 30s

Graphe de la fonction $\log_a$

Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est donnée par

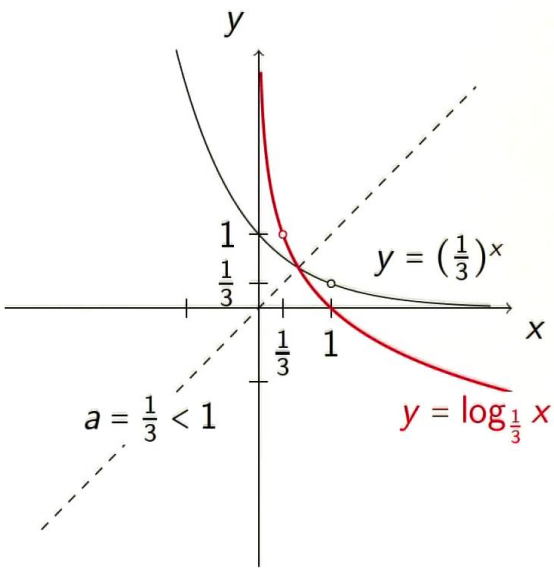
$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \end{aligned}$$

Cette fonction et continue, dérivable,

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a},$$

- strictement décroissante si $a < 1$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} < 0.$$



Der *log* von *1* ergibt immer *0* und der *log* mit der Basis *1/2* ist *[ln (1/2)] / [ln (1/2)]* donne *1*. Dies ist ein Phänomen, das man immer vorfindet. Hier, wenn die Basis *1/3* ist, ist der log mit der Basis *1/3* von *1/3* gleich *1*.

Notes

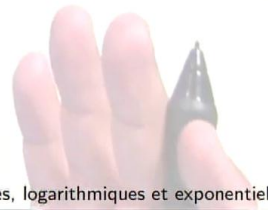
Summary

21m 44s

Logarithmes de base e, 10 et 2

Les logarithmes les plus utilisés sont

- le logarithme naturel, noté ln ,
- le logarithme de base 10, noté $\log_{10}$,
- le logarithme de base 2, noté $\log_2$.



Dann sind die am meisten verwendeten Basen, meist sind diese Basen Eulerzahlen, dann ist der natürliche *log* weit von dem am meisten verwendeten Logarithmus entfernt. Warum? Schlicht deswegen, weil er die einfachsten Gesetze repräsentiert, die Ableitung ist einfach *1/x*, die Umkehrfunktion ist einfach *e^x*, die Ableitung der Umkehrfunktion somit die Ableitung von *e^x*, das macht *e^x*.. In der Vergangenheit hat man oft den Logarithmus mit der Basis *10* benutzt, er ist besonders interessant, weil man dort auf einfache Weise die *log* der Potenzen von *10* berechnen konnte, so dass der log auf der Basis *10* von *1000 3* ergab, der *log* mit der Basis *10* von *100 2* ergab, etc. Wir werden noch den *log* auf der Basis von *2* verwenden, wohlgemerkt in der informativen Theorie. So kommen wir zum Ende dieses Vortrags, der nächste Vortrag wird etwas speziell sein, es wird der letzte Vortrag dieses Kurses sein. Also, bis zum nächsten Mal.

Notes

Summary

22m 05s