ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.4 Exemples importants

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Search MOOC

Video

EPFL

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

Je vous souhaite la bienvenue au cours sur les fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles. Aujourd'hui, nous allons clore ce cours par la présentation de quelques exemples de calculs, quelques exemples qui sont importants, des résultats qu'il vaut la peine de mémoriser. Le premier résultat, intéressant encore une fois que je vous propose de mémoriser, si vous prenez l'expression 1+*x*, *x* = un nombre R quelconque divisé par *n* et vous élevez cette somme à la puissance N, si N tend vers + l'infini, vous allez obtenir *e* puissance *x* J'ai déjà mentionné un résultat qui était un cas particulier, si vous prenez ici *x* = 1, donc 1 + *x* sur *n* puissance *n*, vous obtenez le nombre d'Euler *e*. J'ai également mentionné que ce type de limite ne doit pas être calculé en deux temps, donc on ne peut pas d'abord calculer la limite de la parenthèse, limite qui vaut 1, 1 puissance *n* vaut 1, donc le résultat serait 1, non, il faut simultanément augmenter *n*, il faut augmenter *n* dans la somme 1+*x* sur *n*, et en même temps augmenter la puissance *n*. Comment déterminer cette limite?

Notes

Summary

0m 03s

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

car l'exponentielle est continue. Montrons alors que l'exposant vaut x.

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Nous allons recourir à cette astuce dont j'ai déjà parlé, c'est-à-dire que, si nous avons une expression, nous remplaçons cette expression par *e* puissance log de l'expression, et nous appliquons des propriétés du logarithme. Donc dans le cas présent, je prends cette expression 1 + *x* puissance *n* puissance *n*, et je dis que c'est *e*, je prends le log de l'expression, alors le log de l'expression c'est *n* fois le log de la somme, j'ai déplacé la puissance *n* comme facteur devant le log. Alors j'ai encore cette limite, qui est devant l'exponentielle, l'exponentielle est une fonction continue et de ce fait, je peux déplacer la limite depuis devant l'exponentielle vers l'intérieur, donc il faut en quelque sorte uniquement déterminer la limite de cette puissance *n* fois le log de 1 + *x* sur *n*. Notons bien que c'est une limite qui est délicate, et là on le voit maintenant de façon très précise, le premier facteur devient infiniment grand, le second, on a 1 + ce terme qui tend vers 0, donc on va s'approcher de ln 1 qui vaut 0. Donc on est dans une indétermination comme on l'appelle, du type infini fois 0.

Notes

Summary

1m 36s

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x\in\mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

car l'exponentielle est continue. Montrons alors que l'exposant vaut x.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = x\ln'(1) = x.$$

On va montrer qu'au fond, la limite ici, dans l'exponent, *ox*. Là, vous avez la limite *n* fois le log. Alors nous allons conserver le log, nous allons diviser par *x* sur *n* pour retrouver ce même terme, pour conserver l'égalité. Vous voyez le facteur *n* serait de type 1 sur *n*, il y a le problème de ce *x*, je le neutralise ici en multipliant le tout par *x*. Voilà, là on a une égalité. Le facteur *x* ne contient pas *n*, donc je peux mettre ce facteur devant la limite, ensuite j'ai le *ln* de 1+, et si *x* est fixe, *n* va donner infiniment grand, je vais remplacer ce *x* sur *n* par un *h*, qui tend vers 0, là le *x* sur *n* également *h*. Ce qui me reste alors, c'est le log de 1+*h* divisé par *h*. Notez bien qu'on peut ici compléter le numérateur, en écrivant *ln* (1+*h*) - 0 sous la forme *ln* de 1. Et on reconnaît alors ici la dérivée, la limite de si *h* tend vers 0, va donner la dérivée du log à l'endroit 1. Cette dérivée vaut 1 sur 1, donc 1, et il va me rester *x*. Donc j'obtiens finalement ce résultat remarquable que *e* puissance *x* peut être exprimé à l'aide d'une limite.

Notes

Summary

3m 06s

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x\in\mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

car l'exponentielle est continue. Montrons alors que l'exposant vaut x.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = x\ln'(1) = x.$$

Finalement, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

C'est important de mentionner ce résultat parce que cela permet de donner une définition de *e* puissance *x*, qui ne passe pas par la réciproque d'une fonction logarithmique. Donc ici on peut en quelque sorte définir la puissance *exp* immédiatement, sans recourir à une fonction logarithmique.

Notes

Summary

4m 44s

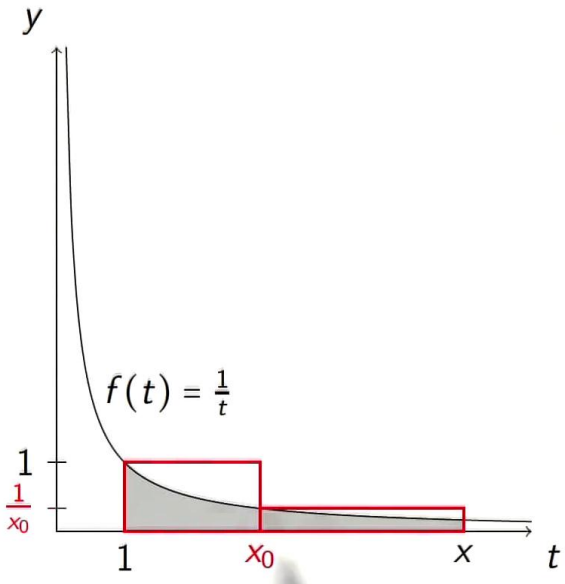
Quelques limites importantes

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\ln x$ est l'aire entre 1 et x $(x > 1)$.

Pour tout x_0 tel que $1 < x_0 < x$, cette aire est majorée par l'aire des deux rectangles :

$$0 < \ln x < (x_0 - 1)\cdot 1 + (x - x_0)\cdot \frac{1}{x_0}$$



Deuxième exemple : Là, nous considérons une limite *x* vers ∞, en quotient on a le log de *x*, sur *x*. C'est une limite qui est à nouveau pénible. Nous savons déjà que si *x* devient très grand, donc si *x* tend vers +∞, le log de *x* tend vers l'∞, nous avions mentionné que c'était une croissance pas très rapide. Le dénominateur lui aussi tend vers + ∞. Nous sommes donc en présence d'une indétermination du type infini sur infini. Alors nous allons montrer que le quotient va tendre vers 0, ce qui revient à dire que le log de *x* a une croissance très faible, si on la compare avec la puissance tout simplement de *x* puissance 1 de *x*. Pour calculer cette limite, nous rappelons que *lnx* est l'aire ici en gris. C'est une aire qui va être positive, parce que *x* est plus grand que 1, car *x* tend vers +∞. Alors nous allons majorer et minorer. Donc le log de *x* peut être minoré par 0, pour majorer, nous allons choisir un point *x* 0, plus grand que 1, fixe quelconque. Et nous allons majorer l'aire en gris par deux rectangles. Le premier est à la hauteur 1, et va jusqu'à *x* 0.

Notes

Summary

5m 09s

Quelques limites importantes

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

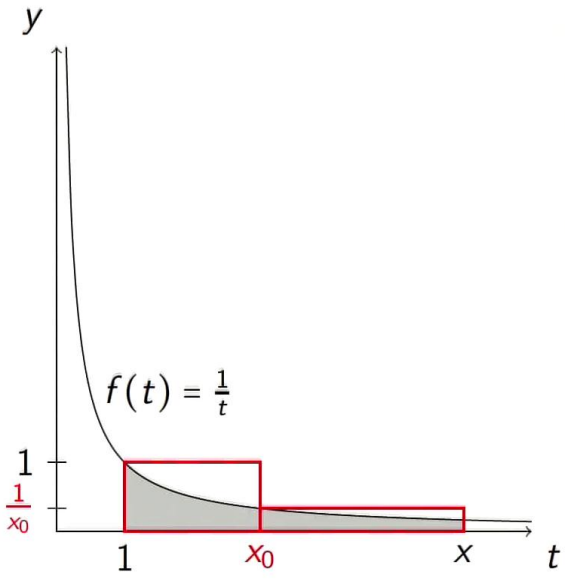
$\ln x$ est l'aire entre 1 et x $(x > 1)$.

Pour tout x_0 tel que $1 < x_0 < x$, cette aire est majorée par l'aire des deux rectangles :

$$0 < \ln x < (x_0 - 1)\cdot 1 + (x - x_0)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{x_0 - 1}{x} + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{x_0} \quad \text{(pour tout } x_0 > 1\text{)}.$$



Le deuxième va de *x* 0 jusqu'à *x*, avec une hauteur qui est donnée par 1 sur *x* 0. Donc si je fais la somme de ces deux aires, j'ai une hauteur 1 qui multiplie une largeur *x* 0 - 1, le terme qui est ici, et pour le deuxième rectangle, la hauteur du rectangle c'est *x* moins *x* 0, fois 1 sur *x* 0. Alors je vais à présent diviser ces inéquations par *x*, *x* tend vers +∞ donc *x* est positif, donc j'obtiens 0 plus petit que *lnx* sur *x*, et je divise... cette partie en rouge par *x*. Donc je vais diviser par *x* le premier produit (*x* 0 - 1 sur *x*), et le deuxième. Alors pour le faire, je divise la différence par *x*, donc le *x* par *x* donne 1, le *x* 0 par *x* donne *x* 0 sur *x*, le voici, fois le 1 sur *x* 0. A présent je fais tendre *x* vers l'infini, alors que me reste-t-il? Donc le 0 reste, la limite va être coincée entre les deux limites de la minoration de la majoration, et si je regarde la majoration, si *x* tend vers l'infini, je rappelle que le *x* 0 est fixe, alors ce premier terme ici tend vers 0, ici le second est un produit, si *x* tend vers l'infini, la parenthèse va tendre vers 1, il me reste un 1 sur *x* 0.

Notes

Summary

6m 25s

Quelques limites importantes

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\ln x$ est l'aire entre 1 et x $(x > 1)$.

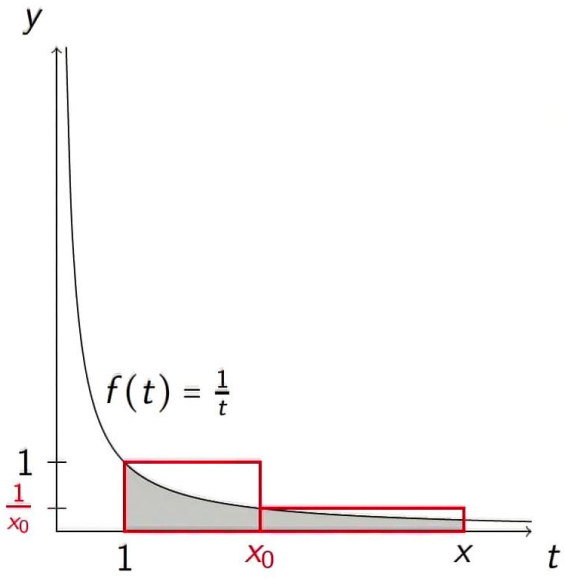
Pour tout x_0 tel que $1 < x_0 < x$, cette aire est majorée par l'aire des deux rectangles :

$$0 < \ln x < (x_0 - 1)\cdot 1 + (x - x_0)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{x_0 - 1}{x} + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{x_0} \quad \text{(pour tout } x_0 > 1\text{)}.$$

On a donc, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.



Alors vous allez me dire : "Bon, là nous ne sommes pas beaucoup plus avancés qu'avant, je sais que la limite pour *x* vers l'∞ de *lnx* sur *x* va être située entre ce 0 et un 1 sur *x* 0." Mais je vous rappelle que le *x* 0 était une valeur quelconque, plus grande que un, donc je peux à présent dire cet estimateur est vrai pour tous les *x* 0. Je prends des *x* 0 de plus en plus grands ce qui signifie que la limite va être située entre 0 et ce nombre 1 sur *x* 0, qui devient de plus en plus petit. L'unique possibilité, c'est effectivement que la limite pour *x* vers l'∞ de *lnx* sur *x* donne bel et bien 0. Alors je vous rappelle que cela signifie que le log de *x*, qui tend vers +∞ et *x* qui tend vers +∞, donc que le log de *x* perd en quelque sorte contre le *x*. Le dénominateur devient nettement plus vite grand, si bien que ce quotient tend vers 0. Si on considère l'expression correspondante, non pas pour *lnx*, mais pour *e* puissance *x*, alors là le résultat change.

Notes

Summary

8m 07s

Quelques limites importantes

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

En posant $z = e^x$, on a pour $x > 1$ $(z > e)$

$$\frac{e^x}{x} = \frac{z}{\ln z} > 0$$

et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{\ln z} = \infty,$$

par la limite précédente.

La limite pour *x* vers l'∞ de *e* puissance *x*sur *x*, elle, vaut +∞. Le résultat précédent, je vous le remontre, le voici là, et le résultat présent, sont des résultats qui méritent d'être mémorisés. Ici nous allons simplement dire que *e* puissance *x* est croissant, j'avais déjà mentionné que c'était une fonction à croissance rapide, *e* puissance *x* est également croissant, mais le quotient est *e* puissance *x* qui le remporte largement, donc le quotient va tendre vers +∞. En fait, les deux résultats, le résultat 2 et celui-ci sont fortement liés. On va procéder comme suit : le *e* puissance *x* sur *x* le voici, je vais dire que *e* puissance *x*, c'est simplement un de *z*, ça signifie que le *x* est simplement donné, donc si je veux avoir le *x*, c'est *lnz*. Donc je peux écrire ce *e* puissance *x* sur *x* comme *z* sur *lnz*. Notons bien que *e* puissance *x* est positif, *x* est positif, donc cette fraction est positive. Maintenant, si je fais tendre *x* vers l'∞, si *x* tend vers l'∞, le *z* tend également vers l'infini.

Notes

Summary

9m 26s

Quelques limites importantes

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

En posant $z = e^x$, on a pour $x > 1$ $(z > e)$

$$\frac{e^x}{x} = \frac{z}{\ln z} > 0$$

et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{\ln z} = \infty,$$

par la limite précédente.

J'ai *z* sur *lnz*. La ligne 2 disait que, si je prends *lnz* sur *z*, je tends vers 0, donc z sur ln z va tendre vers l'∞. Moins l'∞ est impossible, *lnz* est toujours positif. L'unique réponse possible est +∞. On peut encore améliorer ce résultat, dire que l'exponentielle a effectivement une croissance forte comparée à *x*, Renforçons ce dénominateur, rendons-le encore plus grand.

Notes

Summary

10m 44s

Quelques limites importantes

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbb{N})$

Comme $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$, il suffit de montrer que $\lim_{x\to\infty} \ln \frac{e^x}{x^n} = \infty$. En effet,

$$\ln \frac{e^x}{x^n} = \ln e^x - \ln x^n = x - n \ln x = x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right).$$

Voici le résultat : si vous prenez *e* puissance *x* sur *x* puissance *n*, *n* par exemple 10 000, un grand dénominateur donc, l'exponentielle gagne toujours. Le résultat ne change pas. Cela signifie donc que l'exponentielle est vraiment une fonction à croissance très puissante. Là aussi, il faut mémoriser ces résultats. Pour démontrer cette limite, nous allons nous intéresser, non pas à *e* puissance *x* sur *x* puissance *n*, mais au logarithme de cette expression. Nous allons montrer que le logarithme devient infiniment grand, et de ce fait, puisque l'exponentielle d'une grandeur qui devient infiniment grande est infinie, de ce fait nous aurons le résultat. Nous allons nous intéresser à la limite pour *x* vers l'infini du log de e puissance *x* sur *x* puissance *n*. C'est intéressant parce que le log d'un quotient peut être écrit comme la différence des logarithmes, le log de *e* puissance *x* neutralise l'exponentielle, il reste *x*, ici j'utilise une propriété du logarithme, qui dit que la puissance *n* peut être placée devant le log *x* comme facteur, il va me reste *x* - *n* fois log de *x*, et je vais mettre ce *x* en évidence, il me restera ici 1, et là le *n* fois *lnx* sur *x*.

Notes

Summary

11m 22s

Quelques limites importantes

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbb{N})$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$. En effet,

$$\ln \frac{e^x}{x^n} = \ln e^x - \ln x^n = x - n \ln x = x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right).$$

Alors, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(1 - n\dfrac{\ln x}{x}\right) = \infty$

et donc $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbb{N})$.

L'exponentielle de x croît plus vite que toute puissance de x.

A présent, si *x* devient infiniment grand, comme ici, je dois prendre la limite de ce que j'ai trouvé ici sur la droite. Que s'y passe-t-il? Je rappelle que si *x* tend vers l'∞, *lnx* sur *x*, contrairement à l'exponentielle, a une croissance très faible, là on avait dit que ce quotient allait tendre vers 0, le *n* est fixe, donc ici, j'obtiens n fois 0, la parenthèse va tendre vers 1, le facteur de devant va tendre vers +∞, donc j'obtiens +∞, ce qui me permet de formuler ce résultat n°4. L'exponentielle de *x* croît donc plus vite que toute puissance de *x*.

Notes

Summary

12m 53s

Quelques limites importantes

5. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

En posant $z = \frac{1}{x}$,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{z \to \infty} \frac{-\ln z}{z} = 0 .$$

Voilà encore une limite, ce sera la dernière que je présente, nous allons voir ce qu'il arrive avec *x* fois *lnx*, si *x* tend vers 0 depuis la droite. Là encore, c'est une limite pénible, parce que le premier facteur tend vers 0, le deuxième, *lnx*, tend vers -∞. Nous allons montrer que le produit va tendre vers 0, cela signifie que le log de *x* tend vers moins l'infini, mais pas très rapidement puisqu'il peut être neutralisé par un simple facteur *x* qui tend vers 0. Pour déterminer cette limite, en fait il suffit de poser *z* = 1 sur *x* ou *x* = 1 sur *z*, donc je vais écrire ce *x* comme 1 sur *z*, le log de *x* est moins le log de *z*, et si *x* tend vers 0 depuis la droite, le *z* va tendre vers +∞, et j'obtiens ici la limite pour *z* vers l'∞ de moins *lnz* sur *z*. Alors ça c'est une limite connue, le log de *z* qui sans le moins devient +∞, avec le moins, -∞, divisé par *z*, +∞, mais nous savons que le log était à croissance faible, donc là il va perdre contre la puissance 1 de *z*, et la limite est bel et bien 0.

Notes

Summary

13m 47s

Fonction puissance généralisée

Si u et v sont deux fonctions réelles, $u(x) > 0$ sur un domaine $A \subset \mathbb{R}$, on définit la fonction u^v par

$$\begin{aligned} u^v : A &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln u(x)} . \end{aligned}$$

Passons maintenant à une remarque encore quelque peu générale, il se peut qu'on se retrouve dans des expressions du type $u + u$ qui dépend de x à la puissance v qui dépend de x. Alors évidemment, pour que cela ait un sens, il faut que la fonction u soit positive sur un domaine A contenu dans R, et donc si u est positif, on va pouvoir parler de la fonction u puissance v, où v à son tour dépend de x, et on va transformer le x contenu dans A, en un u de x puissance v de x, et là nous choisissons la définition qui découle du fait qu'on utilise cette astuce, je vais prendre e puissance le log de l'expression, ça fait e puissance, et le log de l'expression c'est v fois le log de u de x. Alors je vois tout de suite que u de x, positif, permet de calculer log, fois le v de x qui peut être positif ou négatif, cela ne joue aucun rôle, l'expression est bien définie. Comme exemple de telles expressions, donc des expressions où à la fois, en quelque sorte la base et la puissance dépendent de x, pour illustrer nous allons considérer la fonction x puissance x.

Notes

Summary

15m 17s

Exemple : la fonction x^x

La fonction x^x est définie par

$$\begin{aligned}(\cdot)^{(\cdot)} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto x^x = e^{x \cdot \ln x}\,.\end{aligned}$$

Comportement au bord du domaine :

- comme $\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln x = \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln x} = \infty$$

Vous pouvez l'abréger comme cela, si vous le voulez, qui prend un nombre positif, et le transforme en un nombre positif. Alors le *x* puissance *x*, je prends *e* puissance et le log de cette expression, qui fait *x* fois *lnx*. Je vois immédiatement que je dois choisir *x* positif, pour pouvoir calculer *lnx*, et je vais obtenir *e* puissance quelque chose, donc je reçois en retour un nombre positif. Alors commençons par analyser ce qui se passe sur le bord du domaine de définition, donc commençons par voir ce qui se passe si *x* tend vers +∞ : Si c'est le cas, je vais prendre seulement l'exposant, *x* fois *lnx*, le *x* devient infiniment grand, le log aussi, on a ici deux facteurs qui deviennent infiniment grands, alors le produit va donner +∞ lorsque *x* tend vers l'infini.

Notes

Summary

16m 40s

Exemple : la fonction x^x

La fonction x^x est définie par

$$\begin{aligned}(\cdot)^{(\cdot)} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto x^x = e^{x \cdot \ln x}\,.\end{aligned}$$

Comportement au bord du domaine :

- comme $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln x = \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln x} = \infty$$

- comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} = 1\,.$$

Si je prends maintenant *x* puissance *x*, je vais avoir *e* puissance, et ce qui est en puissance tend vers +∞, donc je prends la limite de *e* puissance *x* fois *lnx*, je peux passer la limite à la puissance, du fait que l'exponentielle est continue, donc j'ai *e* puissance la limite de *x* fois *lnx*, et cette limite tend vers +∞ donc j'obtiens effectivement que là, la valeur prise par cette limite sera +∞, donc *x* puissance *x* doit croître indéfiniment lorsque *x* devient infiniment grand. Si je m'approche de l'autre bord du domaine de définition, si je m'approche de 0 depuis la droite, avec *x* fois *lnx*, nous avons un premier facteur qui tend vers 0, le log tend vers -∞, mais c'est une limite connue, je viens de la développer, nous savons que le log va perdre en quelque sorte contre le *x*, donc cette limite vaut 0, cette fois-ci le *x* puissance *x* va tendre vers *e* puissance 0, qui vaut 1.

Notes

Summary

17m 40s

Exemple : la fonction x^x

Dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x} \\ &= e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x + x\,\tfrac{1}{x}\right) \\ &= x^x(1+\ln x)\,. \end{aligned}$$

Dérivons cette fonction : pour le faire il faut l'écrire comme l'exponentielle sans log, donc il faut prendre cette définition, *e* puissance *x* fois *lnx*. Là on peut dériver, on a *e* puissance bidule, donc la dérivée c'est *e* puissance bidule, fois bidule prime. Bidule prime, c'est la dérivée d'un produit, donc c'est la dérivée de *x*, qui donne un facteur 1 fois *lnx*, plus le *x* fois la dérivée de *lnx*, qui est 1 sur *x*, donc ici on voit apparaître *x* fois 1 sur *x* qui vaut 1. Il va rester (1 + *lnx*), et devant, le *e* puissance *x* fois *lnx* correspond en fait au *x* puissance *x*. Alors on peut s'intéresser au domaine de croissance et décroissance : *x* puissance *x* si vous l'écrivez sous la forme *e* puissance *x* fois *lnx*, vous voyez que c'est une exponentielle, donc ce facteur est toujours positif, donc le signe de la dérivée doit être déterminé par le signe de la parenthèse, (1 + *lnx*). Il suffit d'analyser où ce log de *x* va prendre la valeur -1, c'est-à-dire moins le log prend la valeur de 1, et cela me donne pour *x*, *e* puissance -1.

Notes

Summary

18m 41s

Exemple : la fonction x^x

Dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x}\\ &= e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x + x\,\tfrac{1}{x}\right)\\ &= x^x(1+\ln x)\,.\end{aligned}$$

Le signe de la dérivée est celui de $1+\ln x$:

x		e^{-1}	
$(x^x)'$	$-$	0	$+$
x^x	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$

Donc si je prends le log de *e* puissance -1, cela donne -1 + un 0. Là, la dérivée va s'annuler, et uniquement là, si *x* est plus petit que cette valeur, donc *e* puissance -1, toujours positif, donc on va prendre un *x* très proche de 0, juste positif, le log devient très petit, -1000, -10 000, le +1 ne changera rien à ce signe, donc la dérivée est négative, la fonction est décroissante. En revanche, si je prends *x* plus grand que *e* puissance -1, alors prenons un *x* très grand : 10, 100, 1000, le log de *x* devient positif, +1 donc le facteur est positif, la dérivée est positive, la fonction va croître. On peut encore s'intéresser à la valeur minimale, ici, donc je vais prendre $x = e$ puissance -1, et je calcule la valeur de la fonction, je peux le calculer ici, il reste le *x*, fois *ln* de *e* puissance -1, et le résultat le voici, c'est *e* puissance -1 sur *e*, qui correspond à un minimum local. C'est assez surprenant que cette fonction ne soit pas monotone-croissante, usuellement les étudiants pensent que 1*x* puissance *x* est monotone-croissant, alors non, ici on s'aperçoit que la fonction va être d'abord décroissante, atteindre un minimum, puis être croissante.

Notes

Summary

20m 07s

Exemple : la fonction x^x

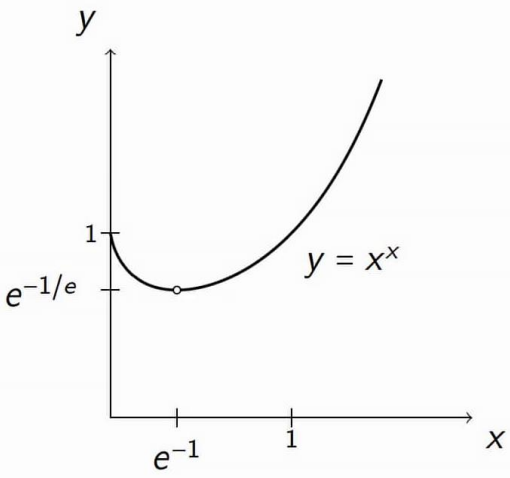
Dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x}\\ &= e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x + x\,\tfrac{1}{x}\right)\\ &= x^x(1+\ln x)\,.\end{aligned}$$

Le signe de la dérivée est celui de $1+\ln x$:

x		e^{-1}	
$(x^x)'$	$-$	0	$+$
x^x	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$

et $\lim_{x\to 0^+}(x^x)' = \lim_{x\to 0^+} x^x(1+\ln x) = -\infty$.



Notez bien qu'on peut encore s'intéresser à ce qui se passe avec cette dérivée, si *x* tend vers 0 depuis la droite. Nous savons déjà que le *x* puissance *x* va se stabiliser à 1, le (1 + *lnx*) se stabilisera à moins ∞, donc la dérivée va avoir pour limite, lorsque *x* tend vers 0+, moins ∞. Nous allons donc avoir affaire à une dérivée de pente -∞, lorsque l'on considère les situations limites de pentes. Alors voici le graphique qui en résulte. Vous avez une fonction qui se stabilise à 1 lorsque *x* tend vers 0, les tangentes partent à la verticale vers -1, nous avons le minimum lorsque *x* vaut 1 sur *e*, la valeur de ce minimum c'est *e* puissance -1 sur *e*, puis la fonction est à nouveau croissante.

Notes

Summary

21m 41s

Fonctions logarithmiques et exponentielles

Un grand merci d'avoir suivi ce neuvième et dernier chapitre.
BRAVO à vous tous !

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Voilà, alors nous avons terminé ce cours lors des deux dernières séances, en présentant les fonctions exponentielles qui étaient les dernières dans le pipeline, nous avons introduit des bases quelconques pour ces exponentielles, nous avons aussi introduit des bases quelconques pour le logarithme. Alors je tiens à vous remercier très profondément pour le suivi que vous avez eu pour ce cours, et notamment pour ce dernier chapitre. Je vous félicite, bravo à vous tous. Mes remerciements vont également vers mes collaborateurs, qui ont soutenu ce projet très régulièrement, un grand merci à Guido Burmeister, un grand merci à Roger Sauser et un grand merci à Olivier Woringer. Au revoir.

Notes

Summary

22m 48s