ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Fonctions logarithmiques et exponentielles

9.4 Exemples importants

Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Prof Hans-Jörg Ruppen

Video

EPFL

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

Ich heiße Sie herzlich zu dem Kurs über trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen willkommen. Wir werden diesen Kurs heute mit der Erklärung von einigen Rechenbeispielen abschließen, die von Bedeutung sind und deren Ergebnisse man sich merken sollte. Das erste interessante Beispiel, das ich Ihnen empfehle, sich zu merken, ist erneut der Ausdruck 1+*x* mit *x* = eine beliebige Zahl aus R dividiert durch *n* und Sie stellen diese Summe zur Potenz N, wenn N zu + unendlich tendiert, werden Sie *e* hoch *x* erhalten. Ich habe hier schon einen besonderen Fall erwähnt, wenn Sie hier *x* = 1, sprich 1 + *x* durch *n* hoch *n* nehmen, bekommen Sie die Eulersche Zahl *e*. Ich habe außerdem erwähnt, dass diese Art von Grenzwert nicht auf zwei Mal berechnet wird, man kann daher nicht zuerst den Grenzwert der Klammer, der hier 1 ist, mit 1 hoch *n* berechnen, was 1 ergeben würde, sondern man muss gleichzeitig *n* vergrößern. Man muss *n* in der Summe 1+*x* durch *n* und gleichzeitig die Potenz *n* vergrößern. Wie berechnet man diesen Grenzwert? Wir werden hier auf den Trick zurückgreifen, den ich schon erwähnt habe.

Notes

Summary

0m 03s

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x\in\mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

car l'exponentielle est continue. Montrons alors que l'exposant vaut x.

Das heißt, wenn wir einen Ausdruck dieser Art haben, ersetzen wir diesen Ausdruck durch *e* hoch log von diesem Ausdruck und wir wenden die Eigenschaften des Logarithmus an. Im vorliegenden Fall nehme ich diesen Ausdruck 1 + *x* hoch *n* hoch *n* und sage, dass es *e* ist und nehme den log von diesem Ausdruck. Der log von diesem Ausdruck ist also *n* mal log der Summe. Ich habe die Potenz *n* als Faktor vor den log gestellt. Ich habe nun noch diesen Grenzwert, der vor der Exponentiellen steht. Die Exponentialfunktion ist eine kontinuierliche Funktion, das heißt, dass ich den Grenzwert vor der Exponentiellen ins Innere verschieben kann, sodass ich nur noch den Grenzwert dieser Potenz berechnen muss *n* mal log von 1 + *x* durch *n*. Wir müssen dabei beachten, dass es ein besonderer Grenzwert ist, das sieht man hier ganz eindeutig, da der erste Faktor unendlich groß wird und der zweite, 1 + diesen Ausdruck, der zu 0 tendiert. Wir werden uns daher ln 1 annähern, das 0 ergibt. Wir sind also in einer Unbestimmtheit, die man des Typs unendlich mal 0 nennt. Wir werden den Grenzwert hier im Exponent *ox* zeigen.

Notes

Summary

1m 39s

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x\in\mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

car l'exponentielle est continue. Montrons alors que l'exposant vaut x.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = x\ln'(1)$$

Hier haben Sie den Grenzwert *n* mal den log. Wir werden uns also den log aufheben und mit *x* durch *n* dividieren, um diesen Term wiederzufinden und Gleichheit beizubehalten. Sie sehen den Faktor *n*, der vom Typ 1 durch *n* ist. Wir haben das Problem dieses *x*, das ich hier neutralisiere, indem ich alles mit *x* multipliziere. So, nun haben wir Gleichheit. Der Faktor *x* beinhaltet kein *n*, ich kann diesen Faktor also vor den Grenzwert stellen und dann habe ich *ln* von 1+ und wenn *x* fix ist, dann wird *n* unendlich groß. Ich werde dieses *x* durch *n* mit *h* ersetzen, das nach 0 tendiert und hier das *x* durch *n* auch mit *h*. Was mir also bleibt, ist der log von 1+*h*dividiert durch *h*. Beachten Sie bitte, dass man hier den Zähler ergänzen kann, indem man *ln* (1+*h*) - 0 als *ln* von 1 schreibt. Man erkennt hier auch die Ableitung, den Grenzwert von wenn *h* nach 0 tendiert, wird die Ableitung von log bei 1 ergeben. Diese Ableitung ergibt 1 durch 1, also 1 und es bleibt mir *x*.

Notes

Summary

3m 15s

Quelques limites importantes

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x\in\mathbb{R})$. Par définition,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

car l'exponentielle est continue. Montrons alors que l'exposant vaut x.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = x\ln'(1) = x.$$

Finalement, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Ich werde schlussendlich also dieses bemerkenswerte Resultat bekommen, dass *e* hoch *x* mit Hilfe eines Grenzwertes ausgedrückt werden kann. Es ist wichtig, dieses Resultat zu erwähnen, da es uns ermöglicht, eine Definition von *e* hoch *x* zu geben, die nicht über die Umgekehrte der Logarithmusfuntkion gegeben ist. Wir können also hier eine direkte Definition der Potenz *exp* geben, ohne über die Logarithmusfuntkion zu gehen.

Notes

Summary

4m 36s

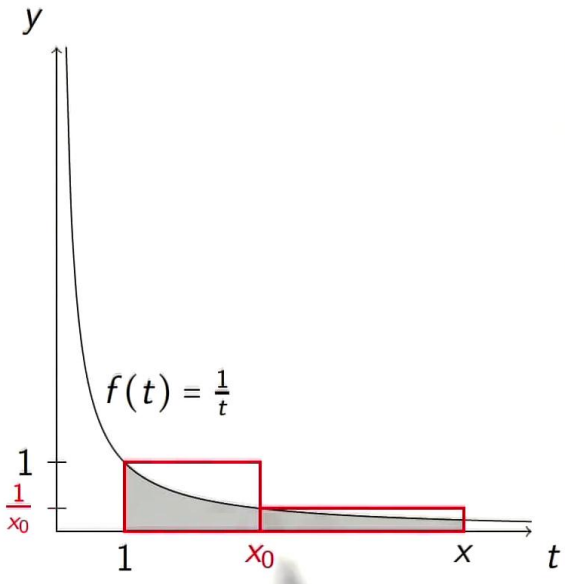
Quelques limites importantes

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\ln x$ est l'aire entre 1 et x $(x > 1)$.

Pour tout x_0 tel que $1 < x_0 < x$, cette aire est majorée par l'aire des deux rectangles :

$$0 < \ln x < (x_0 - 1)\cdot 1 + (x - x_0)\cdot \frac{1}{x_0}$$



Zweites Beispiel: Wir nehmen hier einen Grenzwert *x* zu ∞ an, als Quotient haebn wir den log von *x* durch *x*. Es ist wieder ein beschwerlicher Grenzwert. Wir wissen schon, dass wenn *x* sehr groß wird, also wenn *x* zu +∞ tendiert, der log von *x* zu ∞ tendiert. Wir haben schon erwähnt, dass das kein sehr steiler Anstieg ist. Der Zähler tendiert auch zu + ∞. Wir haben also hier eine Unbestimmtheit der Art unendlich durch unendlich. Wir werden also beweisen, dass der Quotient zu 0 tendieren wird, was heißt, dass der log von *x* nur einen sehr schwachen Anstieg hat, wenn man ihn mit der einfachen Potenz von *x* hoch 1 von *x* vergleicht. Um diesen Grenzwert zu berechnen, erinnern wir uns daran, dass *lnx* dieser grauen Fläche entspricht. Es wird eine positive Fläche sein, da *x* größer als 1 ist, weil *x* zu +∞ tendiert. Wir werden die Funktion nun eingrenzen. Der log von *x* kann von unten durch 0 begrenzt werden und für oben wählen wir einen Punkt *x* 0, größer als 1, beliebig. Wir werden die graue Fläche durch zwei Rechtecke begrenzen. Das erste beginnt bei Höhe 1 und geht bis *x* 0.

Notes

Summary

5m 09s

Quelques limites importantes

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

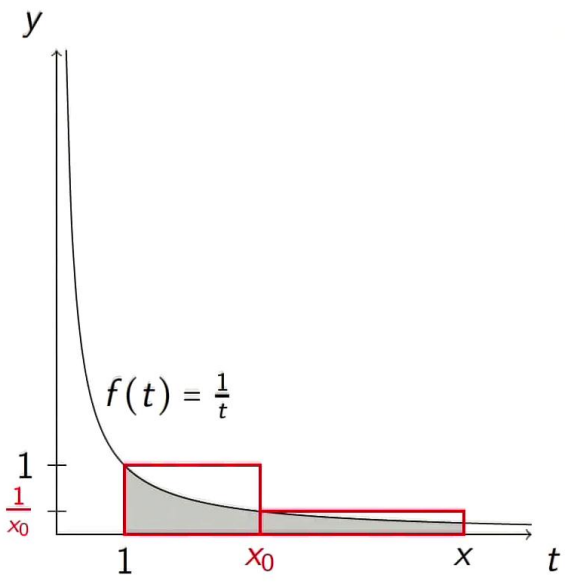
$\ln x$ est l'aire entre 1 et x $(x > 1)$.

Pour tout x_0 tel que $1 < x_0 < x$, cette aire est majorée par l'aire des deux rectangles :

$$0 < \ln x < (x_0 - 1)\cdot 1 + (x - x_0)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{x_0 - 1}{x} + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{x_0} \quad \text{(pour tout } x_0 > 1\text{)}.$$



Das zweite geht von *x* 0 bis *x* mit einer Höhe, die von 1 durch *x* 0 gegeben ist. Wenn ich also die Summe dieser zwei Flächen berechne, habe ich eine Höhe 1, die mit einer Breite *x* 0 - 1, diesem Term hier, multipliziert wird und für das zweite Rechteck ist die Höhe des Rechtecks *x* minus *x* 0, mal 1 durch *x* 0. Ich werde also diese Ungleichungen durch *x* dividieren, *x* tendiert zu +∞ also ist *x* positiv, ich erhalte 0 kleiner als *lnx* durch *x*, und ich dividiere... diesen Teil in rot durch *x*. Ich werde also durch *x* das erste Produkt (*x* 0 - 1 durch *x*) dividieren und das zweite auch. Um das zu machen, dividiere ich die Differenz durch *x*, das heißt *x* durch *x* gibt 1, *x* 0 durch *x* gibt *x* 0 durch *x*, hier, mal 1durch *x* 0. Zum jetzigen Zeitpunkt tendiert *x* zu unendlich, was bleibt mir also? Die 0 bleibt also, der Grenzwert wird zwischen den zwei Grenzwerten der unteren oberen Begrenzung liegen und wenn ich mir die obere Begränzung ansehe, wo *x* nach unendlich tendiert, wir erinnern uns, dass *x* 0 fix ist, dann tendiert dieser erste Term zu 0.

Notes

Summary

6m 25s

Quelques limites importantes

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\ln x$ est l'aire entre 1 et x $(x > 1)$.

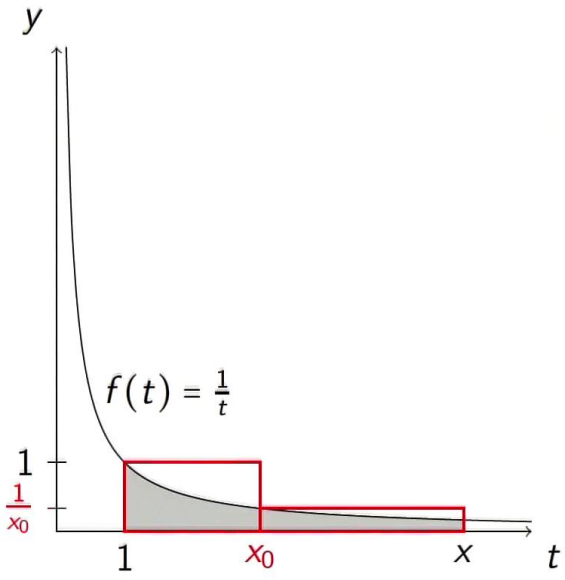
Pour tout x_0 tel que $1 < x_0 < x$, cette aire est majorée par l'aire des deux rectangles :

$$0 < \ln x < (x_0 - 1)\cdot 1 + (x - x_0)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{x_0 - 1}{x} + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)\cdot \frac{1}{x_0}$$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{x_0} \quad \text{(pour tout } x_0 > 1\text{)}.$$

On a donc, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.



Der zweite ist ein Produkt, wenn *x* zu unendlich tendiert, dann wird die Klammer zu 1 tendieren und mir bleibt 1 durch *x* 0. Nun werden Sie mir sagen: "Nun sind wir aber nicht viel weiter als vorher gekommen, ich weiß, dass der Grenzwert für *x* nach ∞ von *lnx* durch *x* sich zwischen dem von 0 und 1 durch *x* 0 befindet." Aber ich möchte sie daran erinnern, dass *x* 0 ein beliebiger Wert größer als eins war, ich kann daher behaupten, dass diese Enschätzung für alle *x* 0 gilt. Ich nehme nun immer größere *x* 0, was bedeutet, dass der Grenzwert zwischen 0 und dieser Zahl 1 durch *x* 0 liegen wird, der immer kleiner wird. Die einzige Möglichkeit ist daher, dass der Grenzwert für *x* gegen ∞ von *lnx* durch *x* tatsächlich 0 ergibt. Ich möchte Sie daran erinnern, dass das bedeutet, dass der log von *x*, das zu +∞ tendiert und *x*, das zu +∞ tendiert, also dass der log von *x* in gewisser Weise gegen *x* verliert. Der Nenner wird wesentlich schneller größer, daher tendiert dieser Quotient zu 0. Wenn man nun den entsprechenden Ausdruck, nicht für *lnx* sondern für *e* hoch *x* annimmt, wird das Ergebnis ein anderes sein.

Notes

Summary

7m 57s

Quelques limites importantes

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

En posant $z = e^x$, on a pour $x > 1$ $(z > e)$

$$\frac{e^x}{x} = \frac{z}{\ln z} > 0$$

et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{\ln z} = \infty,$$

par la limite précédente.

Der Grenzwert für *x* zu ∞ von *e* hoch *x* durch *x* ist +∞. Das vorige Resultat, ich zeige es nochmal, hier, und das jetzige Ergebnis, sind Resultate, die man sich merken sollte. Wir werden hier ganz einfach sagen, dass *e* hoch *x* steigend ist, ich habe schon einmal erwähnt, dass es eine sehr schnell steigende Funtkion ist, *e* hoch *x* ist ebenfalls steigend, aber der Quotient ist *e* hoch *x*, was wesentlich größer ist und somit wird der Quotient zu +∞ tendieren. In der Tat sind diese zwei Resultate eng miteinander verbunden. Wir werden folgendermaßen vorgehen: das *e* hoch *x* durch *x* ist hier, ich werde sagen, dass *e* hoch *x* ganz einfach ein *z* ist, das heoßt, dass *x* einfach gegeben ist, wenn ich daher das *x* haben will, ist das *lnz*. Ich kann dieses *e* hoch *x* durch *x* als *z* durch *lnz* schreiben. Denken wir daran, dass *e* hoch *x* positiv ist, *x* ist positiv, also ist dieser Bruch positiv. Wenn nun *x* zu ∞ tendiert, wenn *x* ins ∞ tendiert, dann tendiert *z* ebenfalls nach unendlich.

Notes

Summary

9m 26s

Quelques limites importantes

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

En posant $z = e^x$, on a pour $x > 1$ $(z > e)$

$$\frac{e^x}{x} = \frac{z}{\ln z} > 0$$

et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{\ln z} = \infty,$$

par la limite précédente.

Ich habe z durch *lnz*. In Linie 2 stand, dass wenn ich *lnz* durch *z* habe, es zu 0 tendiert, also z durch ln z tendiert zu ∞. Minus ∞ ist unmöglich, *lnz* ist immer positiv. Die einzig mögliche Antwort ist +∞. Wir können dieses Ergebnis noch verbessern, sagen, dass die Exponentielle tatsächlich einen starken Anstieg hat im Vergleich zu *x*. Machen wir diesen Nenner noch stärker, vergrößern wir ihn.

Notes

Summary

10m 44s

Quelques limites importantes

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbb{N})$

Comme $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$, il suffit de montrer que $\lim_{x\to\infty} \ln \frac{e^x}{x^n} = \infty$. En effet,

$$\ln \frac{e^x}{x^n} = \ln e^x - \ln x^n = x - n \ln x = x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right).$$

Hier das Ergebnis: wenn Sie *e* hoch *x* durch *x* hoch *n* annehmen, ein *n* von 10 000 zum Beispiel, einen großen Nenner also, dennoch gewinnt die Exponentielle. Das Ergebnis ändert sich nicht. Dies bedeutet also, dass die Exponentialfuntkion wirklich eine steil ansteigende Funktion ist. Auch hier muss man sich die Ergebnisse merken. Um diesen Grenzwert zu demonstrieren, werden wir uns nicht für *e* hoch *x* durch *x* hoch *n*interessieren, sondern für den Logarithmus dieses Ausdrucks. Wir werden beweisen, dass der Logarithmus unendlich groß wird, und von daher, da die Exponentielle einer Größe, die unendlich groß wird, unendlich ist, von daher werden wir das Ergebnis bekommen. Wir werden uns für den Grenzwert von *x* Richtung unendlich des log von e hoch *x* durch *x* hoch *n* interessieren. Das ist deshalb interessant, weil der log eines Quotienten auch als Differenz der Logaithmen geschrieben werden kann. Der log von *e* hoch *x* neutralisiert die Exponentielle, es bleibt *x*. Hier verwende ich eine Eigenschaft des Logarithmus, die besagt, dass die Potenz *n* vor den log *x* als Faktor gesetzt werden kann.

Notes

Summary

11m 22s

Quelques limites importantes

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbb{N})$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$. En effet,

$$\ln \frac{e^x}{x^n} = \ln e^x - \ln x^n = x - n \ln x = x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right).$$

Alors, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(1 - n\dfrac{\ln x}{x}\right) = \infty$

et donc $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbb{N})$.

L'exponentielle de x croît plus vite que toute puissance de x.

Es wird mir also *x* - *n* mal log von *x* bleiben und ich werde das *x* herausheben, dann bleibt mir hier 1 und da *n* mal *lnx* durch *x*. Aktuell wenn *x* unendlich groß wird, wie hier, dann muss ich den Grenzwert nehmen, den ich hier rechts errechnet habe. Was passiert hier? Ich erinnere Sie, dass wenn *x* zu ∞ tendiert, *lnx* durch *x*, im Gegensatz zur Exponentialfunktion nur leicht ansteigt, da haben wir gesagt, dass der Quotient zu 0 tendiert, das *n* ist fix, also bekomme ich hier n mal 0, die Klammer wird zu 1 tendieren, der Faktor davor wird zu +∞ tendieren, also bekomme ich +∞, was mir erlaubt, dieses 4te Resultat zu formulieren. Die Exponentielle von *x* steigt schneller als jede Potenz von *x*.

Notes

Summary

12m 42s

Quelques limites importantes

5. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

En posant $z = \frac{1}{x}$,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{z \to \infty} \frac{-\ln z}{z} = 0.$$

Hier noch ein Grenzwert, es wir der letzte sein, den ich präsentiere. Wir werden sehen, was mit *x* mal *lnx* passiert, wenn *x* nach 0 von rechts her tendiert. Auch hier handelt es sich um einen beschwerlichen Grenzwert, da der erste Faktor zu 0 tendiert, der zweite, *lnx*, tendiert zu -∞. Wir werden zeigen, dass das Produkt auch zu 0 tendiert, das heißt, dass der log von *x* zu minus unendlich tendiert, aber eben nicht sehr schnell, da er durch einen einfachen Faktor *x*, der zu null tendiert, neutralisiert wird. Um diesen Grenzwert zu bestimmen, muss man nur *z* = 1 durch *x* stellen oder *x* = 1 durch *z*. Ich werde also dieses *x* als 1 durch *z* schreiben, der log von *x* ist dann minus der log von *z* und wenn *x* zu 0 von rechts her tendiert, wird *z* zu +∞ tendieren und ich bekomme hier den Grenzwert für *z* Richtung ∞ minus *lnz* durch *z*. Das hier ist ein bekannter Grenzwert, der log von *z*, der ohne dem Minus +∞ ist und mit dem Minus -∞, dividiert durch *z*, +∞, aber wir wissen, dass der log als schwach steigende Funktion gegen die Potenz 1 von *z* verliert und der Grenzwert liegt somit bei 0.

Notes

Summary

13m 47s

Fonction puissance généralisée

Si u et v sont deux fonctions réelles, $u(x) > 0$ sur un domaine $A \subset \mathbb{R}$, on définit la fonction u^v par

$$\begin{aligned} u^v : A &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln u(x)} . \end{aligned}$$

Gehen wir nun zu einer These, die noch etwas allgemein formuliert ist. Es kann vorkommen, dass wir auf Ausdrücke des Typs $u + u$ abhängig von x hoch v abhängig von x stoßen. Natürlich muss, damit das Ganze Sinn ergibt, die Funktion u positiv sein über eine Domäne A hinweg innerhalb von R. Wenn also u positiv ist, dann können wir von der Funktion u hoch v sprechen, bei der v ihrerseits von x abhängt und bei der wir das x als Teil von A transformieren werden in ein u von x hoch v von x und hier wählen wir die Definition, die daraus entrinnt, dass wir diesen Trick verwenden. Ich werde e hoch den log dieses Ausdrucks nehmen, das macht e hoch und der log dieses Ausdrucks ist v mal den log von u von x. Ich sehe also sofort, dass u von x, da positiv, mir erlaubt, den log zu rechnen, mal v von x, was positiv oder negativ sein, das spielt überhaupt keine Rolle, ist der Ausdruck sehr wohl definiert. Als Beispiel für solche Ausdrücke, also Ausdrücke wo man gleichzeitig sozusagen die Basis und die Potenz hat, die von x abhängen, werden wir zur Darstellung die Funktion x hoch x hernehmen.

Notes

Summary

15m 17s

Exemple : la fonction x^x

La fonction x^x est définie par

$$\begin{aligned}(\cdot)^{(\cdot)} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto x^x = e^{x \cdot \ln x}\,.\end{aligned}$$

Comportement au bord du domaine :

- comme $\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln x = \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln x} = \infty$$

Sie können das, wenn Sie wollen, folgendermaße abkürzen. Wir nehmen eine positive Zahl und transformieren sie in eine positive Zahl. Also für *x* hoch *x* nehmen ich *e* hoch und den log dieses Ausdrucks, was *x* mal *lnx* gibt. Ich sehe sofort, dass ich ein positives *x* wählen muss, um *lnx* berechnen zu können und ich werde *e* hoch irgendetwas bekommen, das wiederum eine positive Zahl gibt. Beginnen wir also zu analysieren, was an den Enden der Definitionsmenge passieren wird, also beginnen wir damit, was passiert, wenn *x* zu +∞ tendiert: Wenn das der Fall ist, dann werde ich nur den Exponenten *x* mal *lnx* nehmen, mit *x* wird unendlich groß, demnach sein log auch, also haben wir zwei Faktoren, die unendlich groß sind, von daher wird das Produkt +∞ geben, wenn *x* zu unendlich tendiert.

Notes

Summary

16m 40s

Exemple : la fonction x^x

La fonction x^x est définie par

$$\begin{aligned}(\cdot)^{(\cdot)} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto x^x = e^{x \cdot \ln x}\,.\end{aligned}$$

Comportement au bord du domaine :

- comme $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln x = \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln x} = \infty$$

- comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} = 1\,.$$

Wenn ich nun *x* hoch *x* nehme, dann werde ich *e* hoch haben und das, was in der Potenz steht, tendiert zu +∞, also nehme ich den Grenzwert von *e* hoch *x* mal *lnx*, ich kann den Grenzwert der Potenz nehmen, da die Exponentialfunktion kontinuierlich ist, demnach habe ich *e* hoch den Grenzwert von *x* mal *lnx* und dieser Grenzwert tendiert zu +∞, also bekomme ich in der Tat hier den Wert, den dieser Grenzwert annimmt, sprich +∞, also muss *x* hoch *x* unendlich steigen, wenn *x* unendlich größer wird. Wenn ich mich dem anderen Ende der Definitionsmenge nähere, wenn ich mich der 0 von rechts nähere, mit *x* mal *lnx* haben wir den ersten Faktor, der zu 0 tendiert, der log tendiert zu -∞, aber das ist ein bekannter Grenzwert, ich habe ihn gerade hergeleitet. Wir wissen, dass der log in gewisser Hinsicht gegen das *x* verlieren wird, somit wird dieser Grenzwert 0 sein, diesmal wird *x* hoch *x* zu *e* hoch 0, was 1 ist, tendieren.

Notes

Summary

17m 40s

Exemple : la fonction x^x

Dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x}\\ &= e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x + x\,\tfrac{1}{x}\right)\\ &= x^x(1+\ln x)\,.\end{aligned}$$

Leiten wir diese Funktion ab: Um das zu tun, muss man sie als Exponentialfuntkion ohne log schreiben, man muss also diese Definition nehmen - *e* hoch *x* mal *lnx*. Hier kann man ableiten, wir haben *e* hoch irgendetwas also ist die Ableitung *e* hoch irgendetwas mal irgendetwas Strich. Irgendetwas Strich ist die Ableitung eines Produkts, es ist also die Ableitung von *x*, die uns einen Faktor 1 mal *lnx* gibt, plus *x* mal die Ableitung von *lnx*, welche 1 durch *x* ist. Man sieht also hier *x* mal 1 durch *x* ergibt 1. Es bleibt (1 + *lnx*) und davor das *e* hoch *x* mal *lnx*, was eigentlich *x* hoch *x* entspricht. Man kann sich auch für die Bereiche interessieren, in denen eine Steigung bzw. ein Gefälle ist: Wenn man *x* hoch *x* als *e* hoch *x* mal *lnx* schreibt, dann sieht man, dass es eine Exponentialfunktion ist, also ist dieser Faktor immer positiv, das Vorzeichen der Ableitung wird daher durch das Vorzeichen der Klammer (1 + *lnx*) gegeben.

Notes

Summary

18m 41s

Exemple : la fonction x^x

Dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x}\\ &= e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x + x\,\tfrac{1}{x}\right)\\ &= x^x(1+\ln x)\,.\end{aligned}$$

Le signe de la dérivée est celui de $1+\ln x$:

x		e^{-1}	
$(x^x)'$	$-$	0	$+$
x^x	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$

Es reicht dafür zu wissen bei welchem Wert, log von *x* -1 geben wird, sprich wann minus log den Wert 1 annimmt und das gibt mir für *x*, *e* hoch -1. Wenn ich also den log von *e* hoch -1 nehme, ergibt das -1 + eine 0. Hier wird sich die Ableitung annulieren und nur hier, wenn *x* kleiner ist als dieser Wert, also *e* hoch -1, immer positiv, wir werden also ein *x* sehr nahe bei 0 nehmen, gerade etwas positiv, wird der log dann sehr klein, -1000, -10 000, das +1 wird an diesem Vorzeichen nichts ändern, von daher ist die Ableitung negativ und die Funktion fallend. Im Gegensatz dazu wenn ich ein *x* größer als *e* hoch -1 nehme, sprich ein sehr großes *x*: 10, 100, 1000, dann ist der log von *x* positiv und +1 ist auch positiv somit ist die Ableitung positiv und die Funktion steigend. Man könnte sich hier auch noch für den kleinsten Wert interssieren. Ich werde also *x* = *e* hoch -1 nehmen und den Wert der Funktion ausrechnen, das kann ich hier machen, es bleibt *x*, mal *ln* von *e* hoch -1 und das Ergebnis ist hier, es ist *e* hoch -1 durch *e*, was einem lokalen Minimum entspricht.

Notes

Summary

19m 51s

Exemple : la fonction x^x

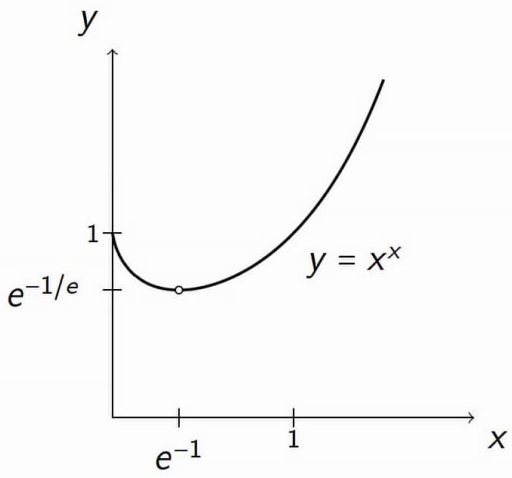
Dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x}\\ &= e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x + x\,\tfrac{1}{x}\right)\\ &= x^x(1+\ln x)\,.\end{aligned}$$

Le signe de la dérivée est celui de $1+\ln x$:

x		e^{-1}	
$(x^x)'$	$-$	0	$+$
x^x	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$

et $\lim_{x\to 0^+}(x^x)' = \lim_{x\to 0^+} x^x(1+\ln x) = -\infty\,.$



Fonctions trigonométriques, logarithmiques et exponentielles

Es ist ziemlich überraschend, dass diese Funktion nicht monoton wächst, normaler Weise glauben die Schüler, dass 1*x* hoch *x* monoton wachsend ist, das stimmt aber nicht, man sieht hier, dass die Funktion zuerst fällt, ein Minimum erreicht und danach steigt. Bedenken Sie, dass wir auch noch überlegen könnten, was mit dieser Ableitung passiert, wenn *x* zu 0 tendiert, von der Geraden aus. Wir wissen bereits, dass sich *x* hoch *x* bei 1 stabilisieren wird, (1 + *lnx*) stabilisiert sich bei minus ∞, also wird die Ableitung, als Grenzwert wenn *x* zu 0+ tendiert, minus ∞ haben. Wir haben es also mit einer Ableitung mit der Steigung -∞ zu tun, wenn man die Fälle Steigungen von Grenzwerten betrachtet. Hier also die Kurve, die daraus entsteht. Sie haben eine Funktion, die sich bei 1 stabilisiert, wenn *x* zu 0 tendiert, dann haben wir vertikale Tangenten, bei -1 haben wir ein Minimum, wenn *x* gleich 1 durch *e* ist, der Wert dieses Minimums ist *e* hoch -1 durch *e*, danach ist die Funktion wieder steigend.

Notes

Summary

21m 24s

Fonctions logarithmiques et exponentielles

Un grand merci d'avoir suivi ce neuvième et dernier chapitre.
BRAVO à vous tous !

Un grand merci à mes collaborateurs qui soutiennent ce projet :

- Guido Burmeister,
- Roger Sauser et
- Olivier Woringer.

Nun haben wir also diesen Kurs innerhalb der letzten zwei Einheiten abgeschlossen, indem wir die Exponentialfunktionen vorgestellt haben, die die letzten in dem Programm waren. Wir haben beliebige Basen bei Exponentialfunktionen eingeführt, sowie auch beliebige Basen bei der logarithmischen Funktion. Ich möchte mich daher ganz herzlich für Ihre Aufmerksamkeit bedanken, die Sie für diesen Kurs und vor allem für dieses Kapitel aufgebracht haben. Ich möchte Ihnen dafür gratulieren, bravo. Meine Dankbarkeit geht ebenfalls an meine Partner, die dieses Projekt regelmäßig unterstützt haben und ein großes Danke an Guido Burmeister, ein großes Danke an Roger Sauser und ein großes Danke an Olivier Woringer. Auf Wiedersehen.

Notes

Summary

22m 48s