Dérivées

Mécanique, cours 1.2

Jean-Philippe Ansermet

Video

Dérivées

- Fonction simple
- Développement limité
- Fonction de fonction

Mécanique | 2013 2

Guten Tag und willkommen zur Vorlesung "Allgemeine Physik" an der EPFL. Diese erste Lektion habe ich mit einer historischen Perspektive begonnen. Leider muss ich gestehen, dass wir diesen Anlauf von Enthusiasmus für die Tiefsinnigkeit der Natur, welche in einer Wissenschaft wie der Mechanik sichtbar wird, zu beenden haben. Nun müssen wir die Ärmel hochkrempeln und uns mit den Details der Praktik eines Physikers, im speziellen eines jenen, der Mechanik betreibt, beschäftigen. In der Mechanik existiert eine Art, eine Notation und ein Jargon in welches ich euch einführen muss. Als erstes werde ich auf die Ableitung einer einfachen Funktion zu sprechen Auf dieser Basis werde ich die Taylor- Entwicklung einführen. Gestützt auf der Notation der Taylor- Entwicklung werden wir zusammen betrachten wie die Ableitung einer Komposition zweier Funktionen berechnet wird.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : dérivée

Contexte mécanique :
Un point se déplace sur un axe cartésien. Sa coordonnée est x.

Notation : $x = x(t)$
Dérivée (une vitesse) : $v = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Ich starte mit dem Begriff der Ableitung. Da wir in einer Vorlesung zur Mechanik sind, werde ich die Ableitung im Kontext der Mechanik betrachten. Ich stelle mir vor, dass ich eine Position eines Punktes auf einer kartesischen Axe betrachte und ich definiere die Position durch die Koordinate x, welche eine zeitabhängige Funktion darstellt. Ich möchte jetzt die Geschwindigkeit dieses Punktes berechnen. Als erstes fällt euch sofort diese Schreibweise auf. Nicht alle, aber viele Physiker gebrauchen diese Schreibweise. Dies ist ein Weg die Zeitabhängigkeit der Koordinate x zu kennzeichnen. Dies ist alles, was diese Notation repräsentiert. Wie berechnet man oder wie misst man eine Geschwindigkeit? Man misst eine Strecke und die Zeit, welche gebraucht wird um diese Strecke zurückzulegen. Dividiert man die Strecke durch die Zeit erhält man die Geschwindigkeit. Wenn die Geschwindigkeit zeitabhängig ist, verfeinern wir unsere Messung, indem wir in dieser Notation ein delta t hinzufügen. Der Mathematiker wird euch sagen, dass das Limit, wenn delta t gegen null tendiert, genommen werden muss. Dies ist die Geschwindigkeit. Demnach ist die Geschwindigkeit die Ableitung der Position nach der Zeit.

Notes

Summary

1m 09s

Définition : dérivée

Contexte mécanique :
Un point se déplace sur un axe cartésien. Sa coordonnée est x.

Notation : $x = x(t)$
Dérivée (une vitesse) : $v = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

Notation : $v = \dot{x}$ Notation : $\dot{v} = \ddot{x}$

Notation : $dx = v\,dt$

Mécanique | 2013 12

In diesem Fall ist dies die Ableitung der Funktion x von t, welche sich als die Abweichung dividiert durch die benötigte Zeit um diese Abweichung hinter sich zu bringen schreiben lässt. Der Mathematiker verwendet diese Schreibweise. Dies repräsentiert für den Mathematiker ein Symbol. Ihr werdet sehen, dass ein Physiker dieses Symbol auf verschiedene Arten analysiert. Zuerst nehme ich meine Definition wieder auf und dann, um zu unterstreichen ,dass der Limit genommen werden muss, werde ich schreiben v gleich x von t plus dt. Ich werde hier den Term dt dem Term delta t vorziehen um zu unterstreichen, dass eine gewisse zeitliche Abweichung genommen wird, welche man gegen null konvergieren lässt. Also benütze ich dt in dieser Formel. Eine andere Notation. Ich schreibe die Geschwindigkeit als dx über dt, die zeitliche Ableitung x Punkt. Auf das Symbol der Variabel, welche von der Zeit abhängig ist, setzte ich einen Punkt um die Ableitung nach der Zeit hervorzuheben. Diese Schreibweise mit dem Punkt wird nur für die Ableitung nach der Zeit verwendet. Also eine andere Variante die Symbole der Mathematiker zu bearbeiten. Ich werde schreiben dx gleich v mal dt. Und wenn ich jetzt ein zweites Mal ableite, werde ich zwei Punkte auf die Variabel setzen. Wie hier, v Punkt ist eine Beschleunigung. Ich schreibe x Punkt Punkt.

Notes

Summary

2m 38s

Définition : développement limité

$$v = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

$$v\,dt = x(t+dt) - x(t) \implies x(t+dt) = x(t) + v\,dt$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t$$

Mit meiner Definition der Geschwindigkeit kann ich ein neues Werkzeug einführen, auf welches ich sehr häufig in Rahmen dieser Vorlesung zurückgreifen werde. Es ist der Begriff der Taylor-Entwicklung. Hier, mein Ausdruck der Geschwindigkeit, für welche ich dt verwendet habe um zu unterstreichen, dass das Limit, wenn dt gegen 0 tendiert, genommen werden muss. Wenn ich jetzt eine algebraische Umformung, ich multipliziere mit dt auf beiden Seiten, dieser Gleichung mache, habe ich ein v dt hier. Jetzt kann ich schreiben x von t plus dt in dieser Schreibweise. Was ich in dieser Gleichung lese ist, dass wenn ich x zu einer bestimmten Zeit t plus ein kleines delta t berechnen möchte, kann ich x zur Zeit t nehmen und v dt hinzufügen. Also v multipliziert mit einer kleinen Zeitzunahme. Dieser Formel kann als exakt betrachtet werden, da wir mit darunter verstanden haben, dass dt gegen 0 tendiert. Wenn ich jetzt ein delta t von endlichem Wert nehme, erhalte ich eine Annäherung, welche uns sagt, dass wenn ich x zur Zeit t plus delta t berechnen möchte, nehme ich x zur Zeit t plus die Ableitung nach der Zeit der Funktion zur Zeit t multipliziert mit delta t. Dieses delta t kann ich hier wiederfinden. Wir sind von den Ableitungen bezüglich einer Bewegung ausgegangen. Diese Berechnungen sind jedoch für jede beliebige Funktion x von t korrekt. Un dieses Hier nenne ich eine Taylor- Entwicklung.

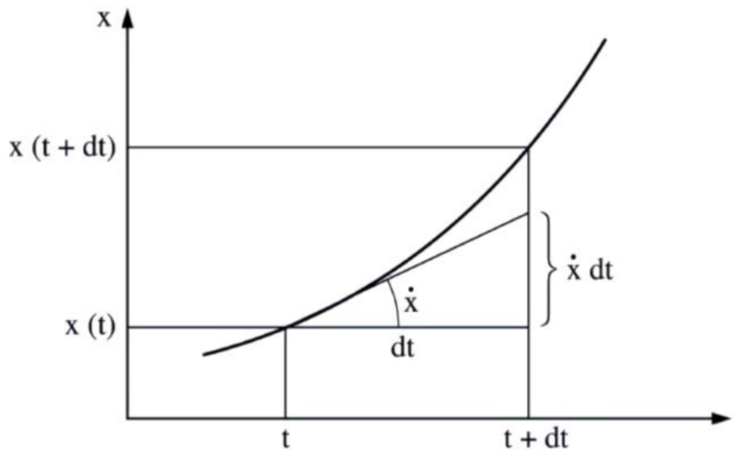
Notes

Summary

4m 29s

Propriété : interprétation géométrique

$$\dot{x} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$



Ich finde es nützlich eine geometrische Representation der Taylor-Entwicklung zu besitzen. Also betrachte ich den Graphen der Funktion x von t. Hier die Funktion x in Abhängigkeit von t. Wir betrachten die Punkte zur Zeit t und zur Zeit t plus dt. Hier x von t. Hier x von t plus dt. Und was ich jetzt sage ist, dass meine Taylor-Entwicklung entspricht der Differenz zwischen x von t und x von t plus dt. Dies ist ungefähr die Ableitung, welche ich hier notiert habe, hier mit dt multipliziert. Also, ich sage dies ist ungefähr gleich das. Wieso? Weil man in der Zeichnung erkennen kann, dass, wenn ich dt gehen 0 tendieren lasse, sich die Kurve bis zu dem Punkt der Tangenten annähert, in welchem die beiden identisch sind. In der Tat ist dieser Fehler hier weniger als zweiter Ordnung.

Notes

Summary

6m 20s

Propriété : dérivée d'une fonction de fonction

Exemples : $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ $\quad (\omega, \phi \text{ constantes})$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad (I \text{ constante})$$

$$x = f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\, dt = f\left(g(t+dt)\right) - f\left(g(t)\right)$$

Mécanique | 2013 24

Jetzt kann ich zur Ableitung einer Funktion einer Funktion wechseln. Was nenne ich eine Funktion einer Funktion? Betrachtet diesen Ausdruck. Hier ist die Variable t. Omega und phi werden als Konstanten betrachtet. Im Rahmen der Mechanik werden wir diese Funktion sehr schnell kennenlernen. Wir haben eine Funktion welche t an omega t plus phi zuordnet. Eine Lineare Funktion. Danach nehmen wir den Kosinus dieser Funktion. In diesem Sinne haben wir eine Funktion einer Funktion. Dieser fall ist vielleicht trivial. Also werde ich euch einen Anderen zeigen, einen anderen Ausdruck aus der Mechanik. Einerlei was diese Symbole bedeuten. Hier ist I als eine Konstante betrachtet. Theta Punkt suggeriert euch, dass theta eine zeitabhängige Funktion ist, da wir das Quadrat der Ableitung nehmen. Die Frage, welche ich euch stelle, ist, was entspricht der Ableitung von E nach der Zeit. Also generalisieren wir. Ich nehme an, dass x eine Funktion der Zeit ist, welche sich als f von g, wo g eine zeitabhängige Funktion, darstellen lässt. Ich möchte die Ableitung berechnen. Wie mache ich das? Wenn ich x Punkt berechnen möchte, muss ich f von g zur Zeit t plus dt minus f von g zur Zeit t berechnen.

Notes

Summary

7m 26s

Propriété : dérivée d'une fonction de fonction

Exemples : $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ $(\omega, \phi \text{ constantes})$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad (I \text{ constante})$$

$$x = f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t+dt)\right) - f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t) + \dot{g}\,dt\right) - f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t)\right) + \frac{df}{dg}\dot{g}\,dt - f\left(g(t)\right) \qquad \dot{x} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

Mécanique | 2013 27

Hier habe ich g zur Zeit t plus dt. Hier habe ich g zur Zeit t. Ich nehme die Differenz der beiden Werte von f und dies muss x Punkt multipliziert mit dt ergeben. In diesem Stadium der Berechnungen werde ich meine Regel der Taylor-Entwicklung benützen. Ihr seht, hier habe t und hier das dt, welches viel kleiner ist. Also kann ich schreiben, g zur Zeit t plus dt entspricht g zur Zeit t plus die Ableitung von G nach der Zeit multipliziert mit dt. Und jetzt im inneren Teil des Arguments von f erkenne ich ein g von t und einen Term g Punkt multipliziert mit dt. Ich werde noch einmal meine Regel der Taylor-Entwicklung verwenden. Also hier erkenne ich, dass das Argument von f g von t plus etwas kleines ist. Meine Regel der Taylor-Entwicklung sagt mir also, dass f durch f in g von t plus die Ableitung von f nach ihrem Argument angenähert werden kann. Ich werde schreiben d von f durch d von g multipliziert mit diesem Element. Nun diese zwei Terme annullieren sich. Es bleibt nur dieser Term übrig. Ich bringe ein bisschen Ordnung in die Gleichung. Also habe ich herausgefunden, dass die Ableitung von x nach der Zeit der Ableitung von f nach g multipliziert mit der Ableitung von g nach der Zeit entspricht.

Notes

Summary

8m 57s

Propriété : dérivée d'une fonction de fonction

Exemples : $x(t) = \cos(\omega t + \phi) \qquad (\omega, \phi \text{ constantes})$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad (I \text{ constante})$$

$$x = f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\, dt = f\left(g(t+dt)\right) - f\left(g(t)\right)$$
$$\dot{x}\, dt = f\left(g(t) + \dot{g}\, dt\right) - f\left(g(t)\right)$$
$$\dot{x}\, dt = f\left(g(t)\right) + \frac{df}{dg}\dot{g}\, dt - f\left(g(t)\right) \qquad \dot{x} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

Exemples : $\dot{x} = -\omega \sin(\omega t + \phi)$

$$\dot{E} = I \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

Mécanique | 2013 30

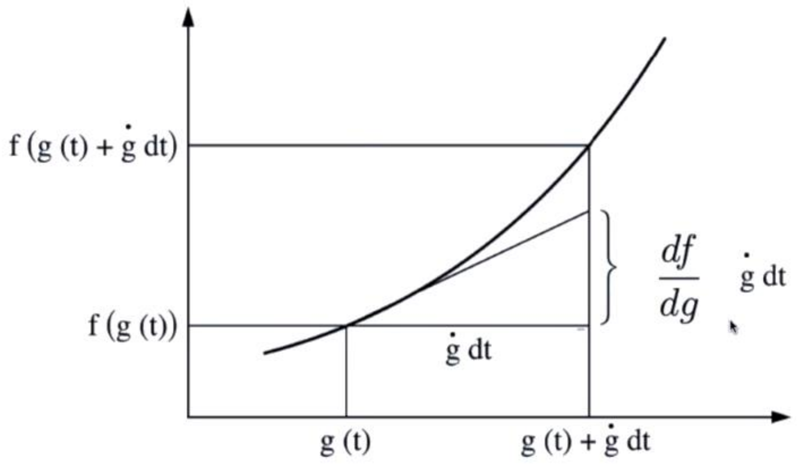
Diese Formel werden wir häufig verwenden, da wir häufig Funktionen von Funktionen behandeln werden. Benützen wir diese Regel für die uns vorhin gegeben Funktionen. Beginnen wir mit dem Kosinus. Hier haben wir ein Kosinus einer Funktion omega t plus phi. Was wir als g bezeichnet haben ist hier omega t plus phi. Also muss man omega t plus phi nach der Zeit ableiten, was omega ergibt, und mit der Ableitung von f nach ihrem Argument multiplizieren. Die Ableitung des Kosinus ist minus Sinus. Also im ersten Beispiel erhalten wir minus omega sinus omega t plus phi. Im zweiten Beispiel muss gesehen werden, dass theta Punkt g von t entspricht. Anschliessend haben wir ein Zweitel von I multipliziert mit dem Quadrat dieser Funktion. Also um diesen Ausdruck abzuleiten muss theta Punkt abgeleitet werden, was theta Punkt Punkt ergibt, und anschliessend muss ein Zweitel von I multipliziert mit einer Funktion im Quadrat abgeleitet werden, was I mal die Funktion ergibt, respektive in diesem Fall I mal theta Punkt. Also wir haben die Ableitung von E nach der Zeit, welche sich in dieser Notation als I mal theta Punkt mal theta Punk Punkt ausdrücken lässt.

Notes

Summary

10m 51s

Propriété : interprétation géométrique



Mécanique | 2013 31

Die Ableitung einer Funktion einer Funktion kann auch geometrisch anschaulich gemacht werden. Hier mache ich noch einmal eine Graphik der Funktion f von g. Ihr habt f in Funktion von g. Hier die Kurve f von g. Wir betrachten g zur Zeit t, g zur Zeit t plus eine kleine Zeitspanne, was als g von t plus g Punkt mal dt geschrieben werden kann. Die Differenz dieser beiden Terme ist logischerweise g Punkt mal dt. Für die Taylor-Entwicklung wird diese Distanz hier als ungefähr gleichwertig mit dieser Distanz hier angesehen, welche als das Produkt von der Steigung mit g Punkt mal dt geschrieben werden kann. Die Steigung ist gegen durch den Quotient von df und dg. Zum Schluss stellen wir fest, dass die Formel für x Punkt wieder- gefunden wurde.

Notes

Summary

12m 32s