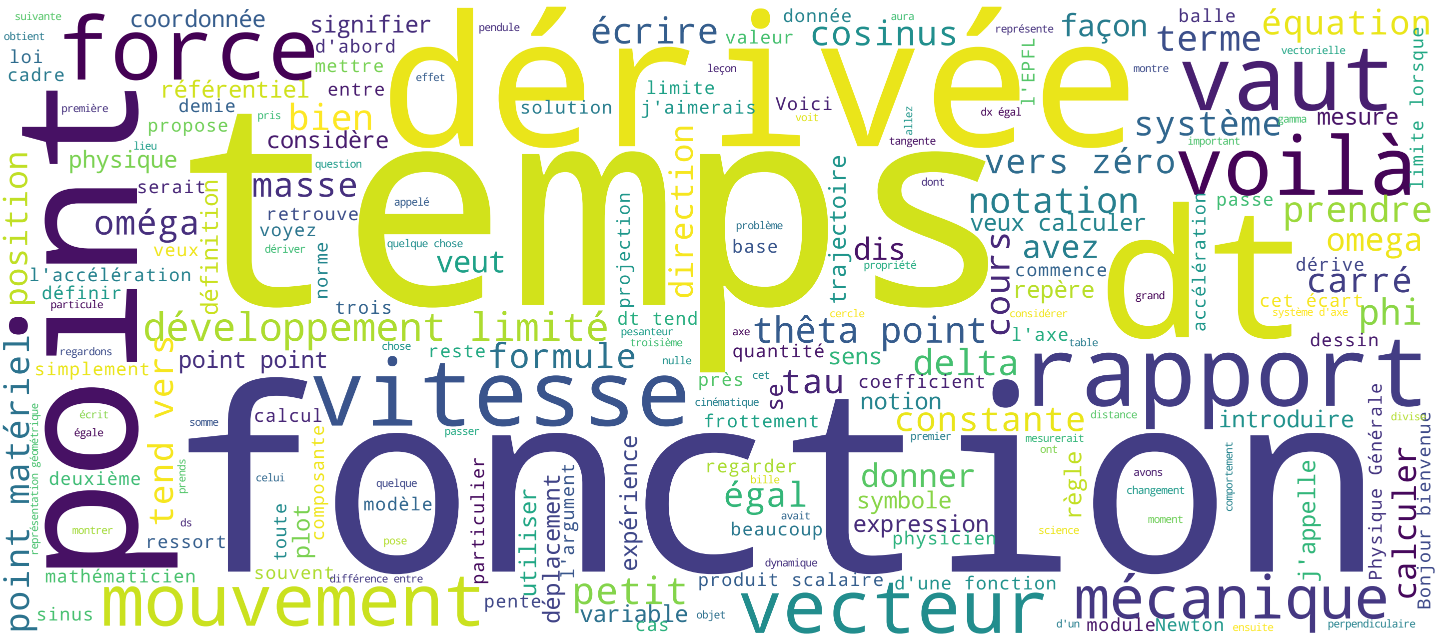
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dérivées

Mécanique, cours 1.2

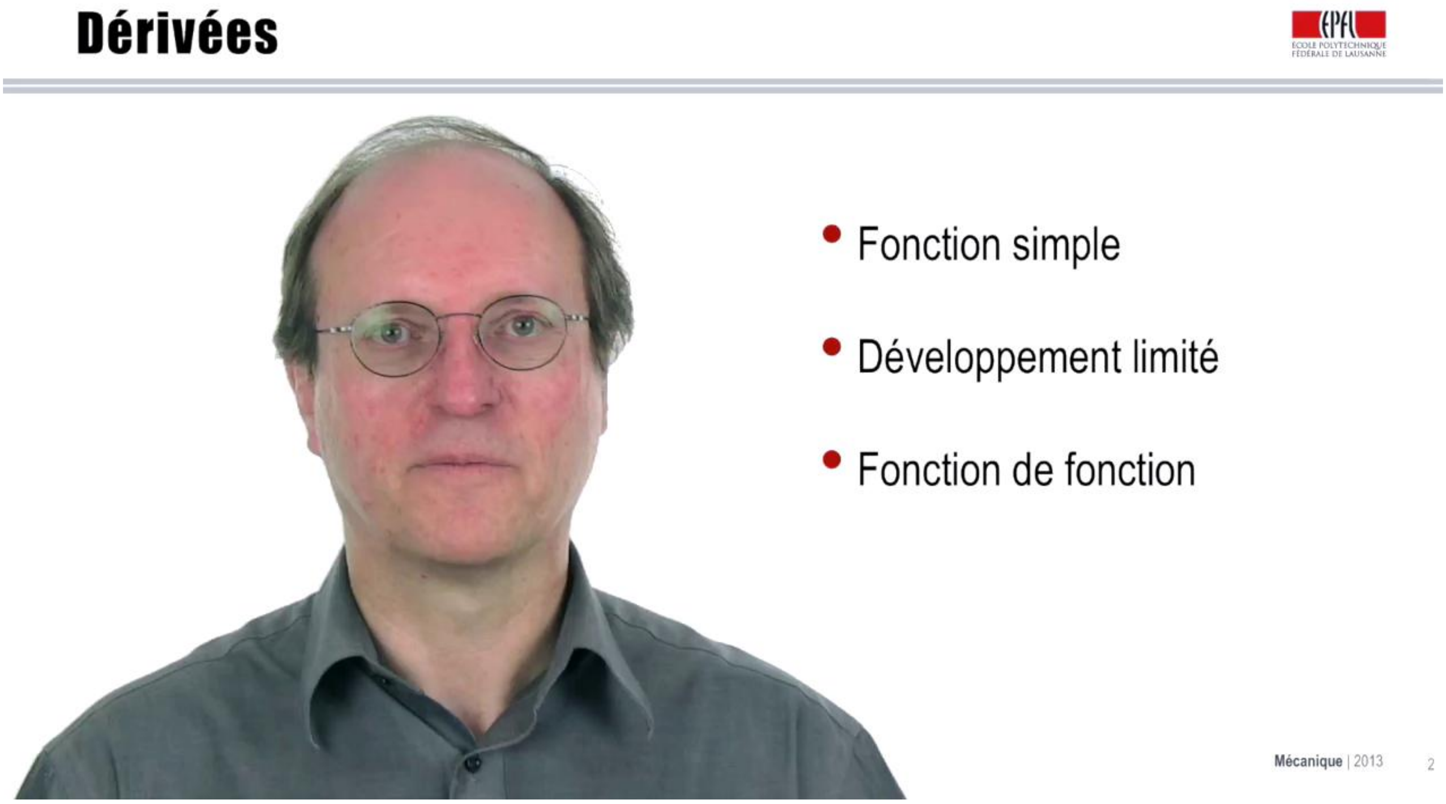
Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL



Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Pour cette première leçon j'ai commencé par une perspective historique et je dois malheureusement maintenant vous avouer qu'on doit quitter ces élans d'enthousiasme sur la nature profonde ce que peut être une science comme la mécanique et nous devons retrousser les manches et regarder un petit peu le détail de la pratique du physicien et en particulier de celui qui fait de la mécanique. Nous avons en mécanique, une façon, une notation, un jargon que je dois vous introduire maintenant. Je vais commencer par parler de la dérivation d'une fonction simple. Sur cette base-là je vais introduire ce que j'appelle un développement limité et sur la base de la notion de développement limité nous regarderons ensemble comment calculer la dérivée d'une fonction de fonction.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : dérivée

Contexte mécanique :
Un point se déplace sur un axe cartésien. Sa coordonnée est x.

Notation : $x = x(t)$
Dérivée (une vitesse) : $v = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

Mécanique | 2013 6

Je commence avec la notion de dérivée. Comme on est dans un cours de mécanique je vais me donner un contexte propre à la mécanique. J'imagine que je considère la position d'un point sur un axe cartésien et je repère la position par la coordonnée x et je dis que x est une fonction du temps. J'aimerais maintenant calculer la vitesse de ce point. Alors d'abord vous repèrerez tout de suite cette façon d'écrire. Tout le monde ne le fait pas mais beaucoup de physiciens le font. C'est une façon pour nous de dire x est une fonction du temps. C'est tout ce que cette notation veut dire. La dérivée Et bien, comment est-ce qu'on calculerait une vitesse ou comment est ce qu'on mesurerait une vitesse ? On mesurerait un déplacement, le temps qu'il faut faire pour le déplacement, on divise le déplacement par le temps, on obtient la vitesse. Si la vitesse change en fonction du temps on va affiner notre mesure en prenant dans cette notation-là un delta t de plus en plus petit et le mathématicien vous dira il faut prendre la limite lorsque delta t tend vers zéro.

Notes

Summary

1m 09s

Définition : dérivée

Contexte mécanique :
Un point se déplace sur un axe cartésien. Sa coordonnée est x.

Notation : $x = x(t)$

Dérivée (une vitesse) : $v = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

Notation : $v = \dot{x}$ Notation : $\dot{v} = \ddot{x}$

Notation : $dx = v\, dt$

Mécanique | 2013 12

Voilà, ça ce serait la vitesse et donc c'est la dérivée de la position par rapport au temps, c'est donc la dérivée de la fonction x de t qui s'exprime comme la limite de l'écart en position divisée par le temps qu'il a fallu pour faire cet écart et le mathématicien utilise cette notation-là. Ceci représente pour le mathématicien un symbole. Vous allez voir que le physicien décortique le symbole de plusieurs manières. D'abord je vais reprendre ma définition et puis pour signifier qu'il faut prendre la limite je vais écrire v égal x de t plus dt, je vais utiliser le terme dt ici au lieu de delta t pour signifier qu'on va prendre un certain écart de temps et on va faire tendre ce temps vers zéro. Donc j'utilise le dt dans la formule. Autre notation, je dis que je vais écrire la vitesse dx sur dt, la dérivée par rapport au temps x point, le symbole de la variable qui dépend du temps, je lui mets un point en dessus pour signifier la dérivée par rapport au temps c'est seulement pour les dérivées par rapport au temps qu'on utilisera la notation avec le point. Alors voilà une autre façon de torturer le symbole des mathématiciens. Je vais écrire dx égal v fois dt. dx égal v fois dt. Et maintenant si je fais une dérivée deuxième, je vais mettre deux points sur la variable. Comme ici, v point qui serait une accélération, j'écris x point point.

Notes

Summary

2m 27s

Définition : développement limité

$$v = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

$$v\,dt = x(t+dt) - x(t) \implies x(t+dt) = x(t) + v\,dt$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t$$

Mécanique | 2013 17

Avec ma définition de la vitesse je peux introduire un outil auquel je vais me référer très souvent dans le cadre de ce cours. C'est la notion de développement limité. Alors, voilà mon expression de la vitesse où j'ai utilisé le dt. pour signifier que je dois prendre la limite lorsque dt tend vers zéro. Si maintenant je fais une transformation algébrique sur cette équation-là. Simplement je multiplie le dt par dt des deux cotés, j'ai donc un v dt ici, et maintenant je peux écrire x de t plus dt de cette manière-là. Ce que je lis dans cette équation, c'est que si je veux calculer x à un temps t plus un petit delta t, je peux prendre x au temps t et rajouter v dt. Donc v fois le petit accroissement de temps. Cette formule-là on peut la considérer comme exacte parce qu'on a sous-entendu que dt tend vers zéro. Si maintenant on prend un delta t de valeur finie, on a une approximation qui nous dit que si je veux calculer x au temps t plus delta t je prends x au temps t plus la dérivée de la fonction au temps t fois le delta t. Ce delta t là je le retrouve ici. On est parti d'une discussion des dérivées à propos d'un mouvement mais ceci est vrai quelle que soit la fonction x de t. Et ceci j'appelle un développement limité.

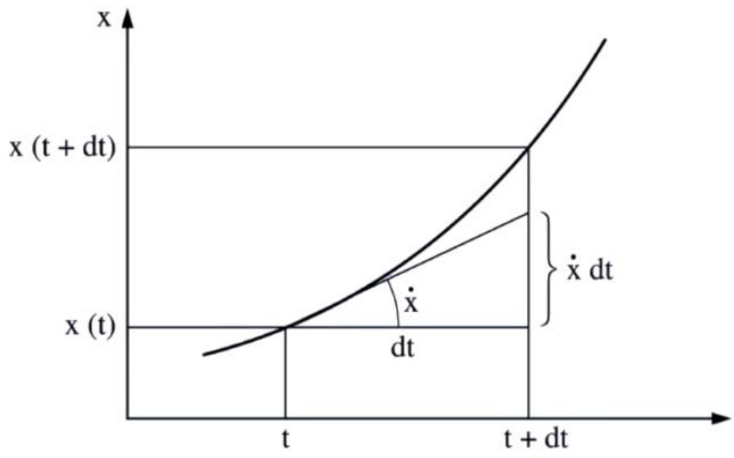
Notes

Summary

4m 29s

Propriété : interprétation géométrique

$$\dot{x} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$



Je trouve utile d'avoir une représentation géométrique du développement limité. Alors regardons un graphe de la fonction x de t, donc voilà la fonction x en fonction de t. On considère les points à t et à t plus dt, voilà x de t, voilà x de t plus dt, et maintenant ce que je dis avec mon développement limité c'est que la différence entre x de t et x de t plus dt, c'est à peu près la dérivée que j'ai notée x point ici fois le dt. Donc je dis que ça, c'est à peu près égal à ça. Pourquoi? Parce qu'on voit sur le dessin, si maintenant je prends dt tend vers zéro la courbe se rapproche de la tangente au point d'être pratiquement confondue, en effet l'erreur ici est au moins de deuxième ordre en dt.

Notes

Summary

6m 20s

Propriété : dérivée d'une fonction de fonction

Exemples : $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ $(\omega, \phi \text{ constantes})$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad (I \text{ constante})$$

$$x = f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\, dt = f\left(g(t + dt)\right) - f\left(g(t)\right)$$

Maintenant je peux passer à la dérivée de fonction de fonction. Qu'est ce que j'appelle une fonction de fonction? Regardez cette expression-là. Ici j'ai la variable t, omega et phi sont supposés être des constantes, on va très vite rencontrer cette fonction-là dans le cadre de la mécanique. On a une fonction qui envoie t sur omega t plus phi, une fonction linéaire, et après on prend le cosinus de cette fonction-là. En ce sens-là on a une fonction de fonction. Ce cas-là est peut être trivial alors je vous en montre un autre. Une autre expression issue de la mécanique. Peu importe ce que les symboles veulent dire. Ici I est pris pour une constante, thêta point vous suggère que thêta est une fonction du temps puisqu'on en prend la dérivée et elle est mise au carré et la question que je pose c'est maintenant que vaut la dérivée de E par rapport au temps? Alors, généralisons. Je suppose que j'ai une fonction x du temps qui peut s'exprimer comme f, fonction de g, fonction du temps. Je veux calculer la dérivée. Alors, comment je fais ? Si je veux calculer x point, je dois calculer f de g au temps t plus dt, moins f de g au temps t, ici j'ai g au temps t plus dt, ici j'ai g de t, je fais la différence des deux valeurs de f et cela doit me donner x point fois dt.

Notes

Summary

7m 26s

Propriété : dérivée d'une fonction de fonction

Exemples : $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ $(\omega, \phi \text{ constantes})$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad (I \text{ constante})$$

$$x = f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t+dt)\right) - f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t) + \dot{g}\,dt\right) - f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t)\right) + \frac{df}{dg}\dot{g}\,dt - f\left(g(t)\right) \qquad \dot{x} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

Alors à ce point-là du calcul, je vais utiliser ma règle du développement limité. Vous voyez ici j'ai t et ici le dt qui est beaucoup plus petit, qui est petit, donc je peux écrire que g au temps t plus dt, c'est g de t plus la dérivée de g par rapport au temps fois dt. Et maintenant à l'intérieur de l'argument de f, je repère un g de t et un terme petit, g point fois dt. Je vais utiliser encore une fois ma règle des développements limités donc ici je reconnais que l'argument de f, c'est g de t plus quelque chose de petit, alors ma règle du développement limité dit que f, je peux l'approximer comme f en g de t plus la dérivée de f par rapport à son argument et je vais l'écrire d de f sur d de g, fois cet élément-là. Maintenant, ces deux s'annulent, il ne reste plus que ce terme-là, je nettoie un petit peu l'expression, j'ai donc trouvé que la dérivée de x par rapport au temps c'est la dérivée de f par rapport à g, fois la dérivée de g par rapport au temps. Ça c'est une formule qu'on va très souvent utiliser parce qu'on aura très souvent des fonctions de fonctions. Appliquons cette règle aux fonctions qu'on s'était données ici. Commençons avec le cosinus.

Notes

Summary

9m 11s

Propriété : dérivée d'une fonction de fonction

Exemples : $x(t) = \cos(\omega t + \phi) \qquad (\omega, \phi \text{ constantes})$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad (I \text{ constante})$$

$$x = f\left(g(t)\right)$$

$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t+dt)\right) - f\left(g(t)\right)$$
$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t) + \dot{g}\,dt\right) - f\left(g(t)\right)$$
$$\dot{x}\,dt = f\left(g(t)\right) + \frac{df}{dg}\dot{g}\,dt - f\left(g(t)\right) \qquad \dot{x} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

Exemples : $\dot{x} = -\omega \sin(\omega t + \phi)$

$$\dot{E} = I\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

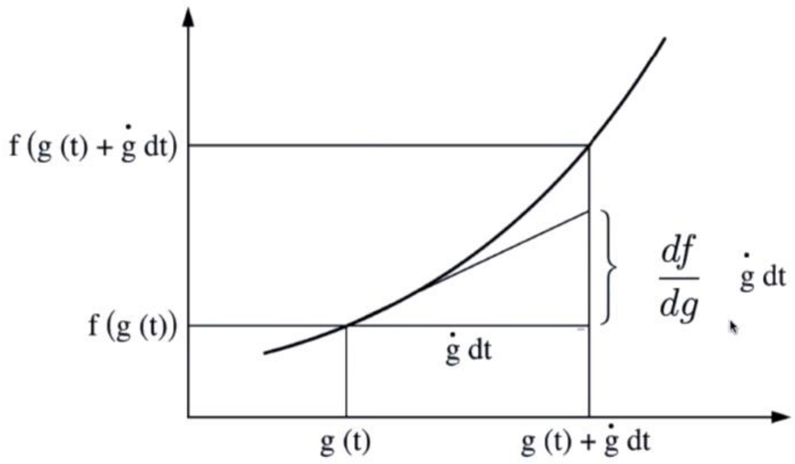
Ici on a un cosinus d'une fonction omega t plus phi donc ce qu'on a appelé g ici c'est omega t plus phi, il faut donc dériver omega t plus phi par rapport au temps, ça donne omega, et multiplier par la dérivée de f par rapport à son argument. Dérivée du cosinus moins sinus. Donc dans le premier exemple on a moins omega sin omega t plus phi. Dans le deuxième exemple, il faut voir qu'on a une fonction qui vaut thêta point si on veut le g de t, c'est le thêta point, et puis après on fait une demie de I fois cette fonction au carré. Alors quand on dérive, il faut dériver le thêta point, ça va nous donner thêta point point, et puis la dérivée de une demie de I fois une fonction au carré, ça fait I fois la fonction, donc I fois thêta point.

Notes

Summary

11m 09s

Propriété : interprétation géométrique



Mécanique | 2013 31

Voilà, on a la dérivée par rapport au temps de E qui vaut I fois thêta point et fois thêta point point dans cette notation. On peut se faire une représentation géométrique de ce calcul de la dérivée de fonction de fonction. Alors ici je refais un graphique de f fonction de g, vous avez f en fonction de g, voilà la courbe f de g, on considère g au temps t, g au temps t plus un petit bout, qui vaut g de t plus g point fois dt, la différence entre les deux c'est bien g point fois dt et maintenant ce qu'on dit du développement limité c'est que cet écart-là c'est à peu près celui ci qui vaut la pente et la pente c'est df sur dg fois cet écart g point fois dt, et on retrouve ici la formule pour x point.

Notes

Summary

12m 32s