Projections des grandeurs vectorielles

Mécanique, cours 2.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-2-2

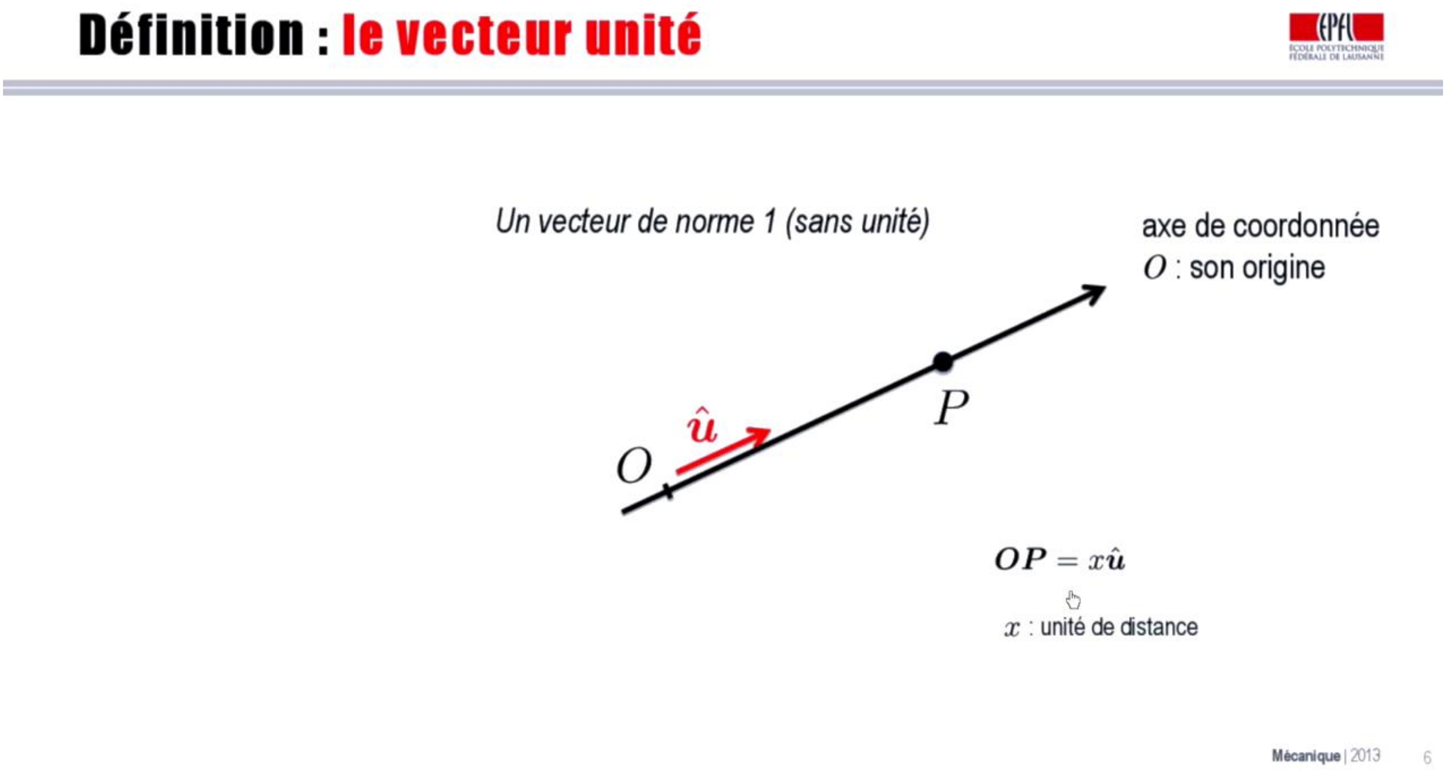
Video

Guten Tag. Willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion werde ich die Grundlage der Kinematik des Massepunktes einführen und in diesem Modul muss ich diesbezüglich ein paar technische Details erklären. Ich werde zuerst den Begriff eines Koordinatensystems einführen. Ein Koordinatensystem ist ein mathematisches Objekt wie ihr sehen werdet. Danach werde ich den Begriff eines Skalarproduktes zwischen zwei Vektoren einführen. Dies ist nötig um die Projektion eines Vektors auf eine Achse zu definieren. Dies braucht man überall in der Newton'schen Mechanik und da ich in diesem Modul die Vektor- Algebra erkläre werde ich eine Definition des Vektorproduktes mit einschliessen.

Notes

Summary

0m 04s



Ich beginne mit der Definition des Einheitsvektors. Das ist ein unabhängiger Vektor mit Norm 1. Stellt euch folgende Situation vor: Ihr habt eine orientierte Achse welche ich als Koordinatenachse benutzen werden, einen Punkt O auf der Achse, welcher den Ursprung meiner Koordinaten definieren wird und ich will einen Einheitsvektor auf diese Achse definieren. Hier eine Konvention zur Beschriftung. Ich habe einen fett-gedruckten Buchstaben für den Vektor auf welchen ich einen Hut mache um zu zeigen, dass es sich um eine Vektor mit Norm 1 handelt, einen Einheitsvektor. Wenn ich jetzt einen Punkt P hier auf der Achse habe und diese Distanz hier gleich x ist und x positiv ist wenn wir in der Richtung der Achse gehen und negativ wenn wir in umgekehrter Richtung gehen. In dem Fall ist der Vektor OP gleich x mal u. Ich definiere nun ein Koordinatensystem.

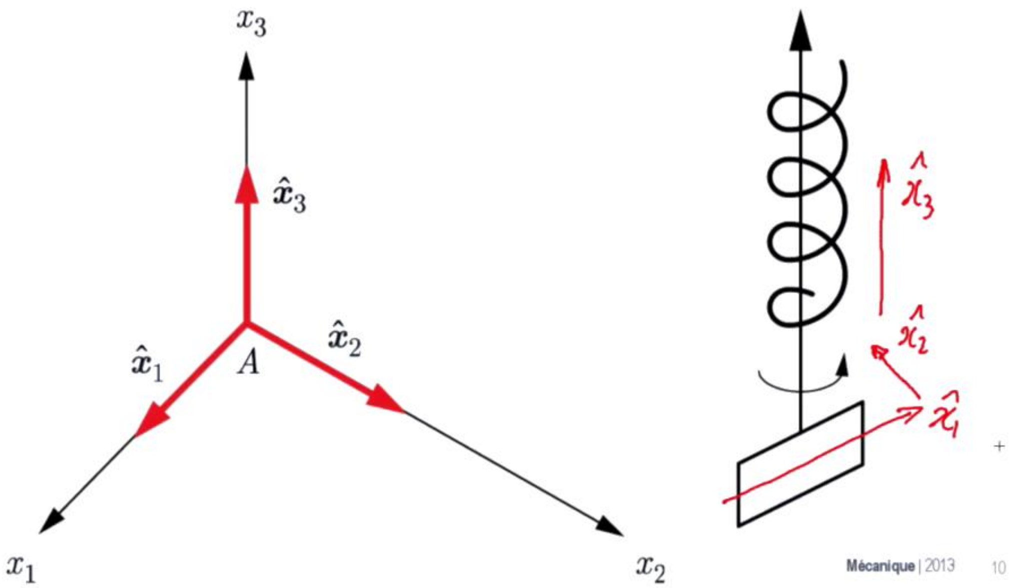
Notes

Summary

1m 00s

Définition : le repère

Un point et trois vecteurs unités, orthogonaux, « direct »



Mécanique | 2013 10

Für mich besteht ein Koordinatensystem aus einem Punkt und drei senkrechten Einheitsvektoren welche ein so genanntes rechtshändiges Koordinatensystem ergeben. Ich werde nur rechtshändige Koordinatensysteme brauchen. Ich werde diesen Ausdruck in einen Augenblick erklären. Stellt euch nun ein kartesisches Achsensystem A, x1, x2, x3 und die Einheitsvektoren auf den Achsen vor. x1 mit Hut um zu zeigen, dass es ein Einheitsvektor ist, x2 und x3. Wenn ich sage, dass dieses Koordinatensystem rechtshändig ist, heisst das folgendes: es gibt mehrere Arten ein rechts- händiges Koordinatensystem zu erklären, ich werde alle davon kurz erklären. Ich beginne mit meine Lieblingsmethode, die Regel des Korkenziehers. Um festzustellen ob x1, x2 und x3 ein rechtshändiges Koordinatensystem sind lege ich x1 entlang des Griffes. Ich hänge x2 am ende von x1 an und ich stelle mir vor, dass x2, der Einheitsvektor x2, an x1 zieht. Jetzt übertrage ich diese Rotation auf den Griff, der Korkenzieher muss sich nun in diese Richtung hier bewegen und diese Richtung muss in Richtung x3 sein. So, dies ist eine Möglicheit ein rechtshändiges Koordinatensystem zu definieren.

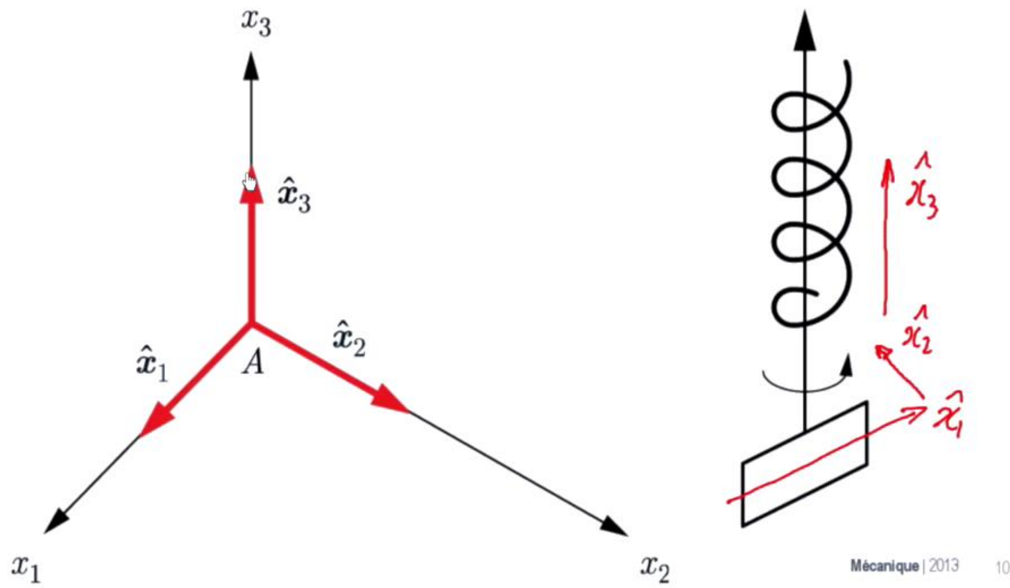
Notes

Summary

2m 17s

Définition : le repère

Un point et trois vecteurs unités, orthogonaux, « direct »



Mécanique | 2013 10

Eine andere Art ein rechtshändiges Koordinatensystem zu definieren ist die Drei-Finger-Regel. Diese Regel geht wie folgt: Man nehme den Vektor x1 entlang des Daumens, x2 der Zeigefinger, x1 und x2 definieren eine Ebene, die Ebene zwischen den zwei Fingern. Und der Mittelfinger muss senkrecht zur Ebene zwischen x1 und x2 sein und der Mittelfinger muss in die Richtung von x3 Zeigen, so hier. Eine dritte Möglichkeit ein rechtshändiges Koordinatensystem zu definieren ist die Schraubendreher-Regel. Stellt euch dazu vor, dass der Vektor x1 entlang der Handfläche ist, x2 entlang der Finger und x3 muss in Richtung des Daumens liegen wenn man immer die rechte Hand braucht. Ein Koordinatensystem besteht also aus einem Punkt und drei rechtwinkligen Einheitsvektoren welche ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden. Wie ihr sieht ähnelt meine Zeichnung einer Zeichnung. Diese Zeichnung hier, mit ihren Koodinatenachsen, lässt an etwas wie ein Bezugssystem denken. Wir werden, aus praktischen Gründen, ein Bezugssystem häufig durch Koordinatenachsen darstellen, aber man sollte die nicht verwechseln. Hier spreche ich von Einheitsvektoren.

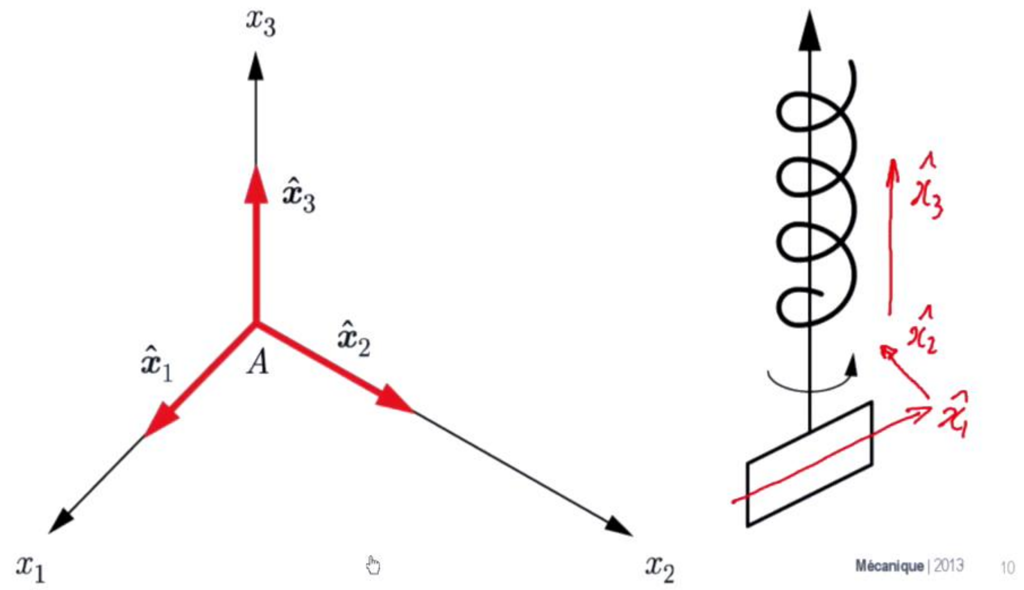
Notes

Summary

3m 55s

Définition : le repère

Un point et trois vecteurs unités, orthogonaux, « direct »



Ich werde sie als mathematisches Hilfsmittel brauchen aber ich habe nicht gesagt, dass dieses Objekt hier jenes ist im Bezug zu welchem wir die Geschwindigkeiten messen werden. Dies is sehr wichtig und später in dem Kurs werden wir ein solches Koordinatensystem in Zylinder- und Kugel-Koordinaten definieren. Dieses Koordinatensystem wird an den Punkt geheftet sein. Es ist Ausgeschlossen die Geschwindigkeit eines Punktes im Bezug zu etwas zu messen welches sich mit dem Punkt bewegt. Man hätte immer eine Null-Geschwindigkeit, was uns nicht viel bringt. Man muss also gut zwischen dem Bezugssystem, das Objekt im Bezug zu welchem die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen gemessen werden, und dem Koordinatensystem welches aus drei Einheitsvektoren Besteht, unterscheiden.

Notes

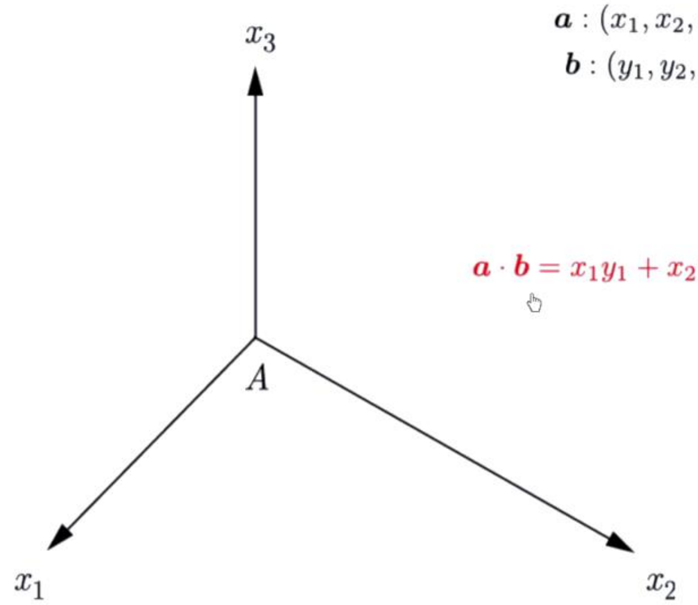
Summary

5m 34s

Définition : le produit scalaire

$\boldsymbol{a} : (x_1, x_2, x_3)$

$\boldsymbol{b} : (y_1, y_2, y_3)$



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

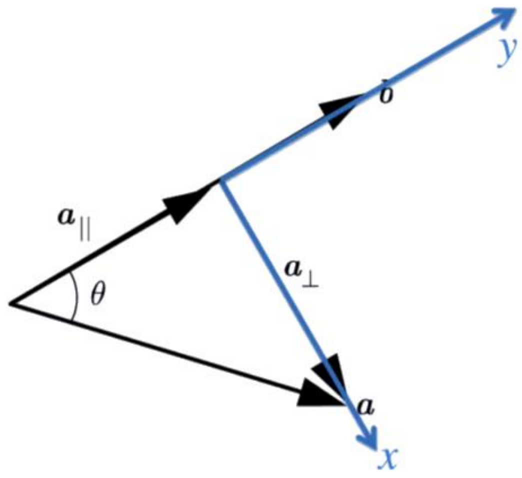
Nun zur Definition des Skalarproduktes: Stellt euch vor, dass wir ein Koordinatensystem und zwei Vektoren habe. Hier nenne ich sie a und b und ihr seht die Koordinaten des Vektors, welche ich hier beschriftet habe: x1, x2, x3 und y1, y2, y3. Für uns genügt es zu sagen, dass die Definition des Skalarprodukts der Vektoren a und b folgendes ist: Das Skalarprodukt von a und b, geschrieben a, ein Punkt in der Mitte der Linie, b, ist die Summe des Produkts der einzelnen Koordinaten: x1y1, x2y2, x3y3 addiert.

Notes

Summary

6m 23s

Propriétés du produit scalaire



$\boldsymbol{a} : (|\boldsymbol{a}|\sin\theta, |\boldsymbol{a}|\cos\theta, 0)$

$\boldsymbol{b} : (0, |\boldsymbol{b}|, 0)$

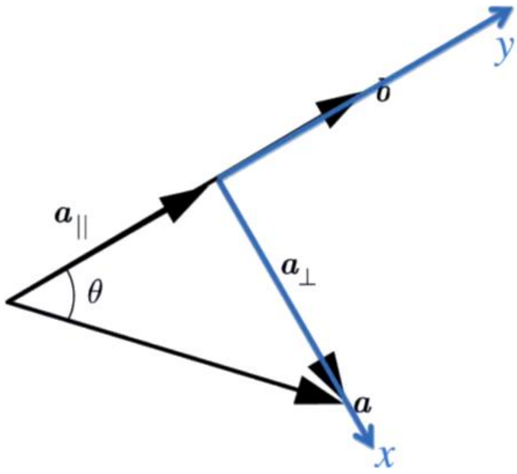
Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar wie man in der Physik sagt, also eine Zahl. Schauen wir uns die Eigenschaften des Skalarpordukts an: Ich stelle mir zwei Vektoren a und b mit einem Winkel Theta dazwischen vor. Ich zerlege den Vektor a in eine Summe zweier Vektoren, der eine davon parallel zu b, der andre senkrecht zu b und jetzt bilde ich ein Koordinatensystem. Vielleicht provoziere ich ein Bisschen hier. Ihr seid euch diese Sachen nicht gewohnt. Ich habe gegebene Vektoren und ich kann ein Koordinatensystem um diese Vektoren bilden. Ich habe x, die kartesische Achse x, entlang von a senkrecht und y entlang von b gemacht. Jetzt berechne ich die Komponenten von jedem Vektor. Die x-Komponente von a ist genau diese Distanz hier, welche gleich dem Betrag von a mal dem Sinus von Theta ist. Dies habe ich hier aufgeschrieben. Dies ist die x-Komponente des Vektors a. Die y-Komponente von a, dies hier ist die y-Richtung, ist in dem Fall diese Distanz hier und ist gleich dem Betrag von a mal den Cosinus des Winkels Theta, was ich hier aufgeschrieben habe. Der Vektor b ist ganz einfach der Betrag von b in Richtung b, wo ich die Richtung von b der Richtung von y gleichgestellt habe.

Notes

Summary

7m 12s

Propriétés du produit scalaire



$\boldsymbol{a} : (|\boldsymbol{a}|\sin\theta, |\boldsymbol{a}|\cos\theta, 0)$

$\boldsymbol{b} : (0, |\boldsymbol{b}|, 0)$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

Mécanique | 2013 21

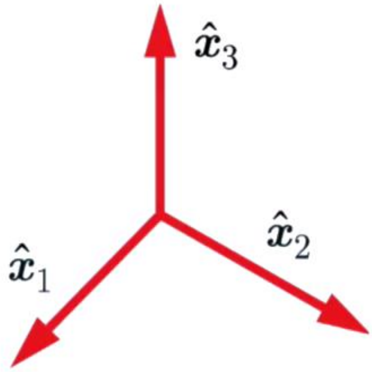
Hier haben wir also plus b und wenn man nun die Definition des Skalarprodukts hier anwendet sieht man, dass das Skalarprodukt von a und b gleich dem Betrag von a mal dem Betrag von b mal dem Cosinus des Winkel zwischen den beiden ist. Ich habe diese Formel in rot geschrieben um zu Zeigen dass man diese auswendig lernen muss. Ihr werdet alle Zeit dazu haben.

Notes

Summary

8m 56s

Orthogonalité des vecteurs unités d'un repère



$$\hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1(i = j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$$

Mécanique | 2013 25

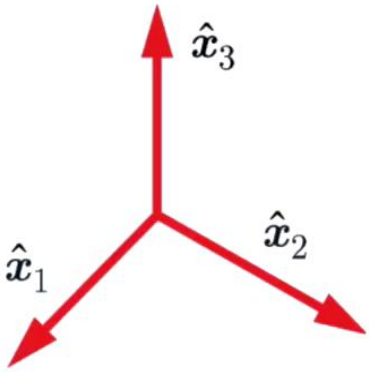
Jetzt, da wir das Skalarprodukt, kennen, können wir die Orthogonalität der Vektoren eines Koordinatensystems mit dem Skalarprodukt ausdrücken. Hier ist mein Koordinaten- system und ich will nun sagen, dass diese zwei Vektoren orthogonal sind, ihr Skalar- produkt muss also Null sein, da das Skalarprodukt gleich dem Betrag des Einen mal dem Betrag des Anderen mal dem Cosinus des Winkels zwischen den Beiden, neunzig Grad, ist. Der Cosinus von neunzig Grad ist Null. Wenn also zwei Vektoren orthogonal sind ist ihr Skalarprodukt gleich Null. Das Skalarprodukt von x1 und x2 ist gleich Null, x1 x3 ist Null, x2 x3 ist Null. Ich schreibe das folgendermassen: Für alle i un j, wo i und j gleich eins, zwei oder drei sind, ist das Skalarporduktt von xi und xj gleich dem sogenannten Kronecker-Delta ij ist. Das Kronecker- Delta ist gleich eins wenn i gleich j ist und Null wenn nicht. Das ist nur eine Schreibweise. Wenn i gleich j ist haben wir das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selber. Ihr wisst nun schon, dass dies das Quadrat des Betrags ist und da es hier Einheitsvektoren sind ist dies wirklich gleich eins.

Notes

Summary

9m 23s

Orthogonalité des vecteurs unités d'un repère



$$\hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1(i = j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$$

Ihr könnt auch die Formel des Skalarprodukts anwenden welche euch sagt, dass das Skalarprodukt gleich dem Betrag der Vektoren mal dem Cosinus des Winkel zwischen ihnen ist. Da wir hier zweimal den selben Vektor haben, ist Theta hier gleich Null und der Cosinus von Null ist gleich eins. Das Resultat wird also wieder eins sein. Dies haben wir hier mit Delta ij geschrieben. Wenn i gleich j ist haben wir eins.

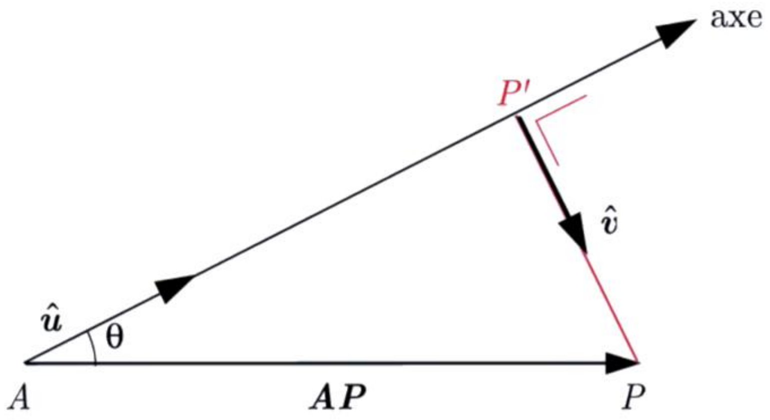
Notes

Summary

10m 52s

Définition : projection d'un vecteur sur un axe

$$\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{AP}| cos\theta$$



Ich kann nun die Projektion eines Vektors auf eine Achse definieren. Dies ist sehr wichtig in dem Kurs über die Mechanik. Wir werden Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte projektieren, die ganze Zeit, immer, immer, immer. Stellt euch eine ausgerichtete Achse wie hier. Ihr habt einen Vektor AP, so hier. AP ist fett-gedruckt um zu zeigen, dass es der Vektor AP ist. Geometrisch würde die Projektion von P auf die Achse so definiert, dass man die Senkrechte zur Achse zeichnet und diesen Punkt P Strich nennt, wie hier. Wir nennen die Projektion von AP auf die Achse ein P Strich wenn wir die Ausrichtung der Achse beibehalten. Wenn ich nun einen Vektor u in der Richtung der Achse gebe, wir werden gleich den Vektor v für die Richtung senkrecht zur Achse brauchen aber im Moment brauchen wir nur den Vektor u entlang der Achse. Ihr seht hier, ich nenne den Winkel, zwischen AP und der Achse, Theta. Hier sieht man, dass AP, sorry, AP Strich gleich dem Betrag von AP mal dem Cosinus vom Winkel ist. Dies muss gleich dem Skalarprodukt von AP und dem Einheitsvektor u sein, per Definition. Das heisst, wegen der Eigenschaft des Skalarprodukts, dass das Skalarprodukt von AP mal u gleich dem Betrag von AP mal dem Betrag von u, eins, mal dem Cosinus des Winkels zwischen den Beiden ist.

Notes

Summary

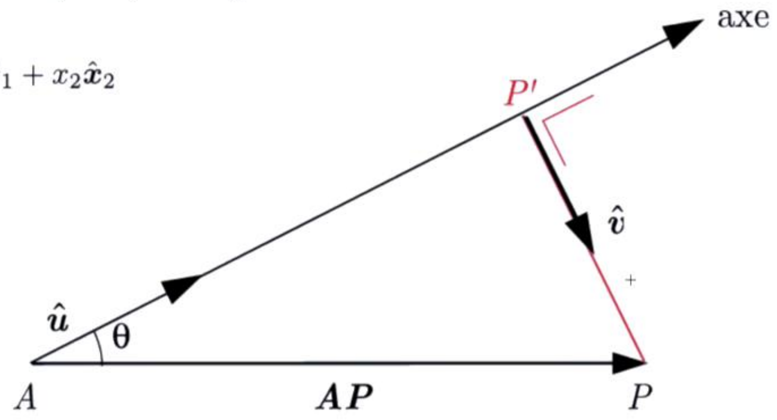
11m 15s

Définition : projection d'un vecteur sur un axe

$$\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{AP}| cos\theta$$

$$\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{AP} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2$$



Jetzt kann man sich amüsieren, den Vektor AP als seine Projektion AP Strich mal den Vektor u plus die Projektion P Strich P des Vektors AP in der senkrechten Richtung mal den Vektor v zu schreiben. Dies hiesst folgendes. Ihr seht die Struktur dieser Gleichung, hier habt ihr AP mal u, welches die Projektion von AP auf die Achse ergibt. AP mal v, der andere Ausdruck, steht für den rechtwinkligen Term. Ich habe AP u genommen und habe es mit u multipliziert, nun habe ich eine Skalar, und dies ist die Projektion von AP auf die Achse. Mal u, dem Vektoren auf der Achse, ergibt es wieder ein Vektor, es ergibt diesen Vektor hier. Dies ist der Vektor AP (ich kann leider kein Fett-gedrucktes schreiben und werde einen Pfeil machen) mal u Skalar- produkt mit u, noch einmal mit u. Ich wiederhole, hier habt ihr ein Skalarprodukt, das ist eine Zahl, und jetzt multipliziert man die Zahl mit dem Vektor u, was diesen Vektor AP Strich ergibt. Ich kann es aufschreiben: gleich der Vektor AP Strich. All das, ich wische es schnell aus, all das gibt den Vektor AP Strich. Und jetzt, hier habe ich den Vektor P Strich P, den Vektor P Strich P. Die Schreibweise kann etwas schwerfällig wirken, aber sie sagt uns nichts neues.

Notes

Summary

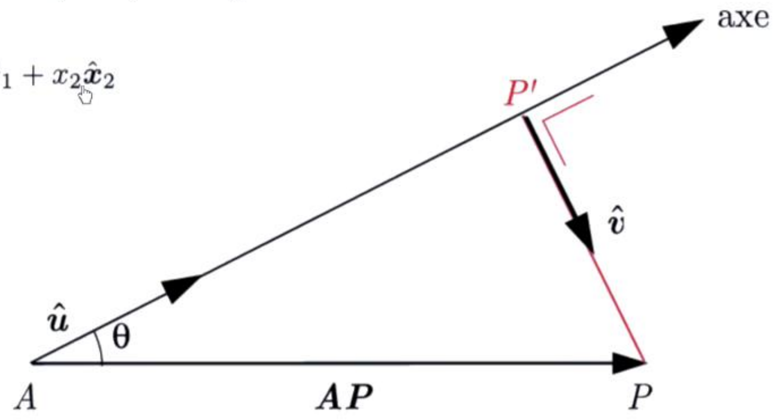
13m 06s

Définition : projection d'un vecteur sur un axe

$$\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{AP}| cos\theta$$

$$\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{AP} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2$$



Hätten wir ein kartesisches Achsensystem, mit einer Achse in dieser Richtung hier, einer Achse in der senkrechten Richtun, Einheitsvektoren, welche wir x1 Hut und x2 Hut genannt hätten, dann hätten wir den Vektoren AP, wir hätten es so schreiben können: x1, seine Komponente in Richtung x1 mal den Vektor x1 plus die Komponente von AP in Richtung x2 mal den Vektor x2 Hut.

Notes

Summary

15m 12s

Définition : Produit Vectoriel

$$\boldsymbol{a} : (a_1, a_2, a_3)$$
$$\boldsymbol{b} : (b_1, b_2, b_3)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{\boldsymbol{x}}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{\boldsymbol{x}}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Kommen wir nun zu Definition des Vektorprodukts. Für uns wird es genügen das Vektorprodukt wie folgt zu definieren. Ich stelle mir zwei Vektoren mit den Komponenten a1, a2, a3 und für den anderen Vektor b1, b2, b3 vor. Als Vektorprodukt von a und b bezeichne ich dies hier und ich werde diesen Ausdruck häufig a cross b nennen. a cross b ist gegeben dur die Determinante die man erhält indem man die Einheitsvektoren unseres Koordinaten- Systems in die erste Kolonne macht, die Komponenten des ersten Vektors in die zweite Kolonne, die Komponenten des zweiten Vektors in die dritte Kolonne. Man berechnet das Produkt, die Determinante indem man die x1-Komponente als x1 mal diese kleinere Determinante hier berechnet. Diese ist gleich a2 mal b3 minus a3 mal b2. a2 b3 moins a3 b2. Wenn ich jetzt die x2-Komponente ausrechnen will, dann muss ich a3 b1 minus a1 b3 rechnen, so wie hier. Die dritte Komponente: a1 b2 minus a2 b1, a1 b2 minus a2 b1. Diese Schreibweise hier, mit den Klammern, ist häufig etwas ungeschickt in der Physik weil man nicht sieht, dass man hier Elemente hat die auf ein Koordinatensystem projektiert sind und dass dieses Koordinatensystem mit der Zeit sich verändern kann, wie wir das noch lernen werden.

Notes

Summary

15m 42s

Définition : Produit Vectoriel

$$\boldsymbol{a} : (a_1, a_2, a_3)$$
$$\boldsymbol{b} : (b_1, b_2, b_3)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \hat{\boldsymbol{x}}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \hat{\boldsymbol{x}}_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Man kann also diese Schreibweise hier vorziehen. a cross b ist gleich einer Komponente in der Richtung x1, einer Komponente in der Richtung x2 und einer dritten in der Richtung x3. Praktischerweise lernt man diese Formel nicht auswendig, man berechnet einfach die Determinante.

Notes

Summary

17m 32s

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

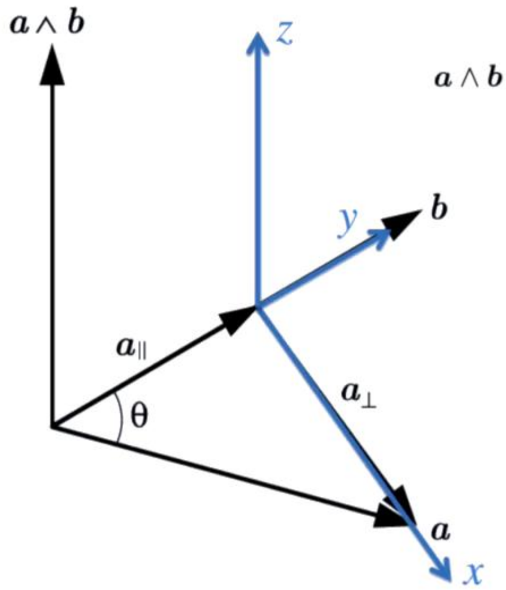
Ich komme jetzt zu einigen Eigenschaften des Vektor- produkts. Die erste ist hier: wenn ich das Vektorprodukt von a und b nehme, also a cross b, dann ist das ein Vektor. Jetzt werde ich das Skalarprodukt zwischen dem Vektor a cross b und einem Vektor c ausrechnen. Nun, wenn ihr einen Moment überlegt werdet ihr sehen, dass ihr diese Rechnung sehr gut so machen könnt: man ersetzt hier x1, x2, x3 mit den Komponenten des Vektors c. Dieser kleine Rechentrick wird uns bei einer essentiellen Eigenschaft des Vektorprodukts behilflich sein. Wenn ich das Skalarprodukt von a cross b mit a nehme, so habe ich a hier, b da und nochmals a. Und ihr habt eine Determinante mit zwei identischen Kolonnen. Es kann gezeigt werden, dass in diesem Fall die Determinante immer Null sein muss. Hier ergibt es also Null. Dies heisst, dass a cross b rechtwinklig zu a ist. Verständlicherweise gibt es auch Null wenn ich das Skalarprodukt von a cross b und b ausrechne. Das Vektorprodukt a cross b ist also ein Vektor, welcher rechtwinklig zu a und b steht.

Notes

Summary

17m 50s

Propriétés du produit vectoriel



$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & a\sin\theta & 0 \\ \hat{\boldsymbol{y}} & a\cos\theta & b \\ \hat{\boldsymbol{z}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\sin\theta \end{pmatrix}$$

Mécanique | 2013 41

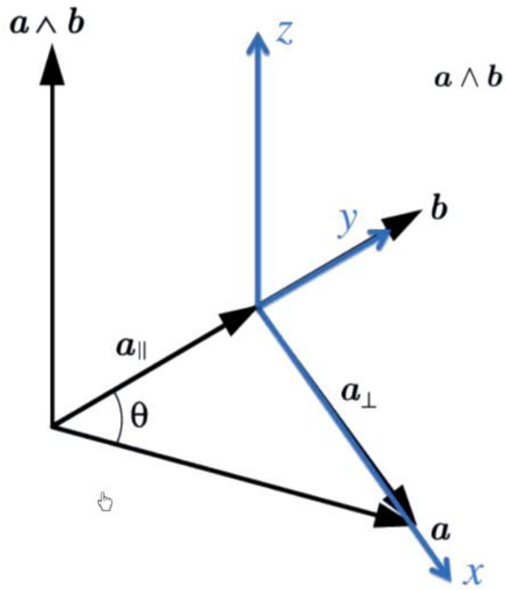
Lasst uns eine Zeichnung machen. Ich nehme wieder meine Vektoren a und b mit dem Winkel Theta dazwischen und ich zerlege a in ein a Parallel, a Senkrecht. Jetzt weiss ich, dass a cross b ein Vektor ist welcher senkrecht zur Ebene mit a und b steht. Ich kann also kartesische Achsen definieren, aufbauend auf meinen Vektoren, genau so wie eben, die Vektoren x, y und z. z steht senkrecht zur Ebene mit x und y welche auch a und b enthält. Ich berechne jetzt die Projektionen der Vektoren. Und ich berechne das Vektorprodukt. Jetzt, da ich meine Einheitsvektoren x, y, z schon habe, diese hier, muss ich die Projektionen des Vektors a berechnen. Die Projektion von a in Richtung x ist gleich dem Betrag von a mal Sinus des Winkels Theta, wie ich hier geschrieben habe. Hier haben wir Cosinus Theta und da Null. Die Vektoren a und b sind in der Ebene z gleich Null. Wir haben also Null hier. Für b ist es einfacher. b ist entlang von y weil wir y entlang von b definiert haben. Wir haben also einfach b hier. Wenn ich das Vektorprodukt berechnen will, das heiss ich berechne diese Determinante, so wird nur ein Element nicht-Null sein. Dieses hier. Es ist das Element in z welches b mal Sinus Theta ist.

Notes

Summary

19m 18s

Propriétés du produit vectoriel



$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & a\sin\theta & 0 \\ \hat{\boldsymbol{y}} & a\cos\theta & b \\ \hat{\boldsymbol{z}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\theta|$$

Mécanique | 2013 42

Ich komme zu diesem sehr wichtigen Resultat, welches wir die ganze Zeit benutzen werden: der Betrag vom Vektor a cross b ist gleich dem Betrag von a mal dem Betrag von b mal dem Betrag vom Sinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren. Beim Skalarprodukt hatten wir, dass das Skalarprodukt gleich dem Betrag von a mal dem Betrag von b mal dem Cosinus des Winkels ist. Hier haben wir den Sinus des Winkels.

Notes

Summary

20m 58s

Propriétés du produit vectoriel

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & (b_2c_3 - b_3c_2) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & (b_3c_1 - b_1c_3) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix} = \cdots$$

Mécanique | 2013 44

Eine der Eigenschaften des Vektorprodukts ist etwas seltsam. Ich werde sie aber die ganze Zeit benutzen weil sie sehr bequem ist. Schaut her. Hier haben wir das Vektorprodukt von a mit dem Vektorprodukt n cross c. Man kann nun zeigen, dass der resultierende Vektor als a c b geschrieben werden kann. Ihr macht also das Skalarprodukt a c mal den vektor b, minus a b c. Um sich an die Formel mit dem richtigen Vorzeichen zu erinnern muss man wissen, dass man zuerst a c b rechnet und dann a b c, in der Reihenfolge, dies gibt das richtige Vorzeichen. So erinnere ich mich zumindest an diese Formel. Wie beweisen wir diese Formel? Ich schlage vor, ihr macht das. Nehmt die Definition des Vektor- produkts hier. Rechnet es explizit aus indem ihr die Komponenten von a hier rein macht und da die Komponenten con b cross c. Ich habe die Definition von b cross c angewendet hier. Rechnet die Determinante hier aus und ihr werdet sehr lange Ausdrücke erhalten und ihr werdet ein Resultat erhalten welches gleich dieser Formel ist.

Notes

Summary

21m 35s