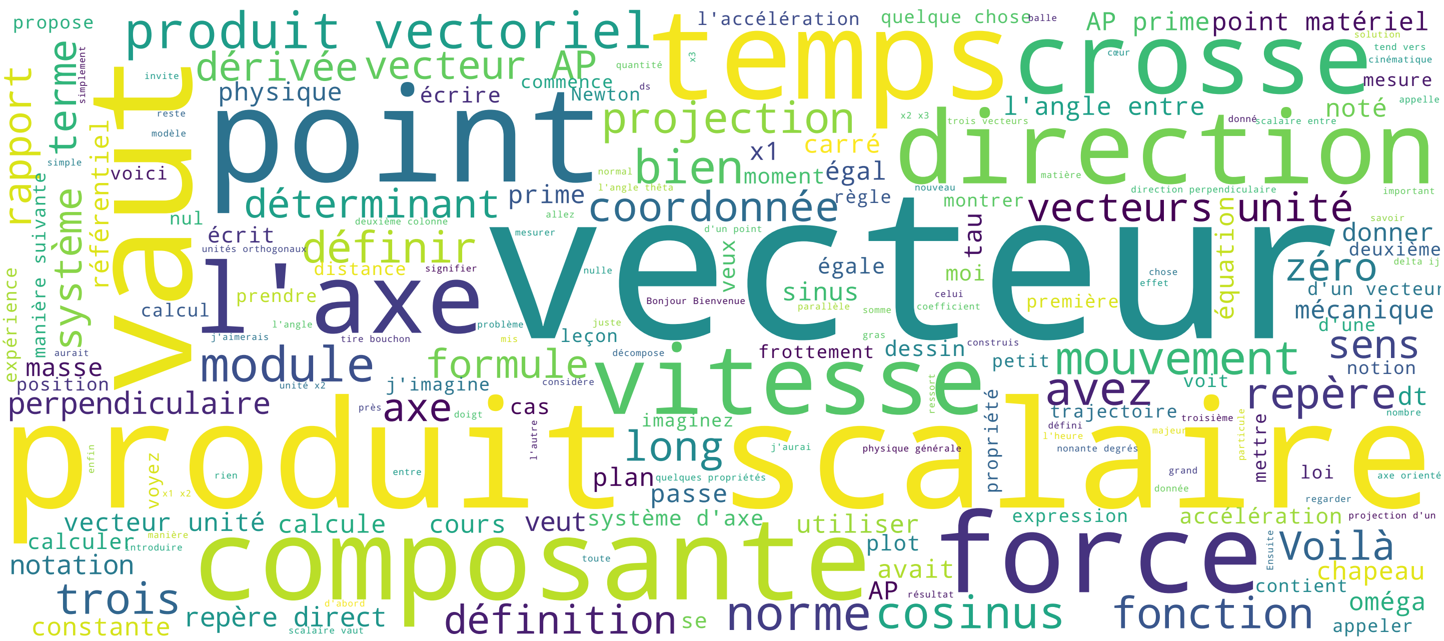
Projections des grandeurs vectorielles

Mécanique, cours 2.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-2-2

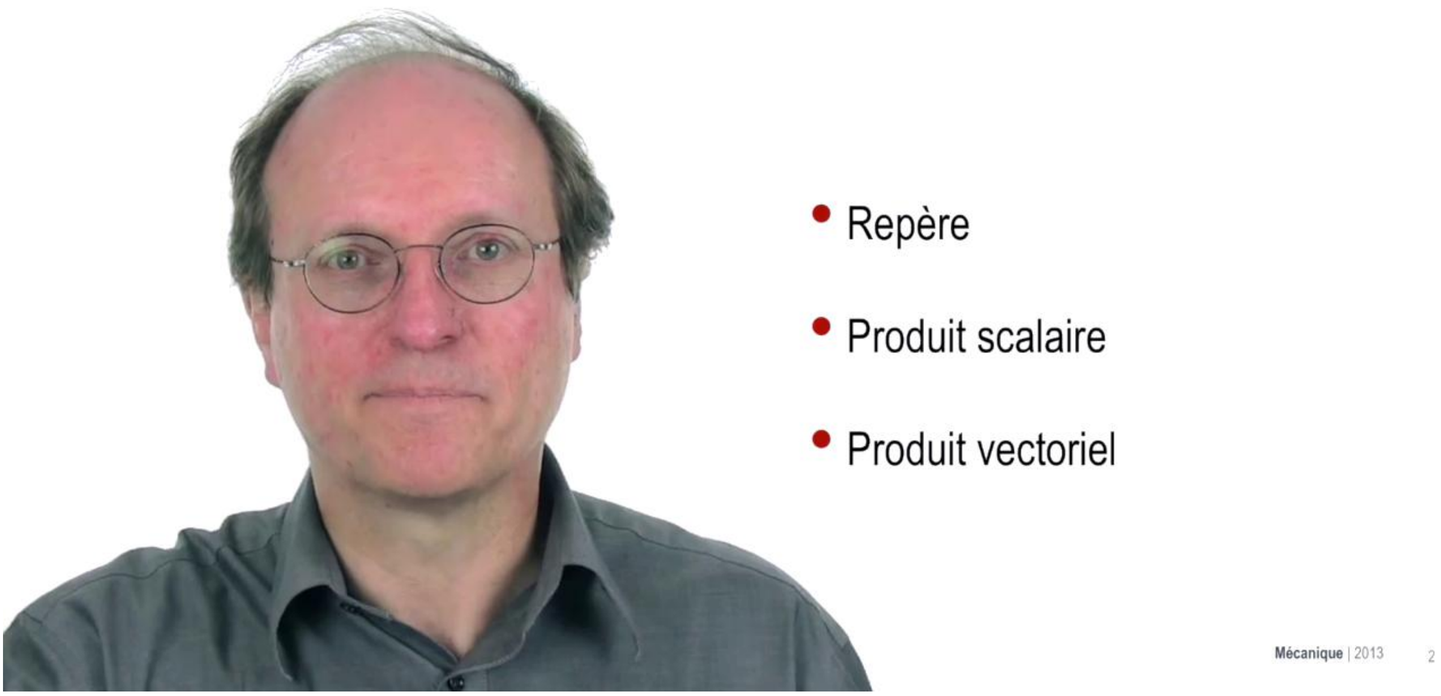


Search MOOC

Video

EPFL

Projections des grandeurs vectorielles



Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, je pose les bases de la cinématique du point matériel et dans ce module, je dois entrer en matière et introduire quelques technicalités. Je vais d'abord introduire la notion de repère qui est un objet mathématique, vous allez le voir. Ensuite, je vais introduire la notion de produit scalaire entre deux vecteurs. J'en aurai besoin pour définir la projection d'un vecteur sur un axe. Quelque chose qu'on utilise partout en mécanique newtonienne et puisque je traite d'algèbre vectorielle dans ce module, je vais y inclure la définition rapide du produit vectoriel. Je commence en définissant ce que je vais appeler un vecteur unité.

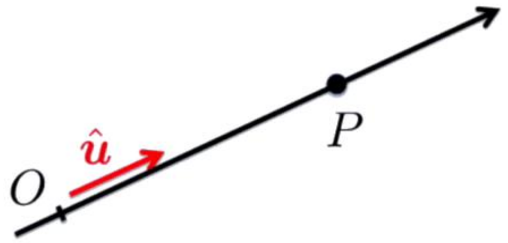
Notes

Summary

0m 04s

Définition : le vecteur unité

Un vecteur de norme 1 (sans unité)



$$\boldsymbol{OP} = x\hat{\mathbf{u}}$$

x : unité de distance

C'est un vecteur libre de norme 1. Imaginez la situation suivante : vous avez un axe orienté que je vais utiliser comme axe de coordonnée, un point O sur l'axe qui définira l'origine de mes coordonnées et je veux définir un vecteur unité porté par l'axe. Vous remarquerez une convention de notation. J'ai une lettre grasse pour signifier que c'est un vecteur et j'y mets un chapeau pour signifier qu'il s'agit d'un vecteur de norme 1, donc un vecteur unité. Si maintenant j'ai un point P ici et que cette distance vaut x et xa est positif, si on se déplace dans le sens de l'axe x négatif si on est, on va dans le sens opposé et bien le vecteur OP vaut x fois u. Je définis maintenant un repère.

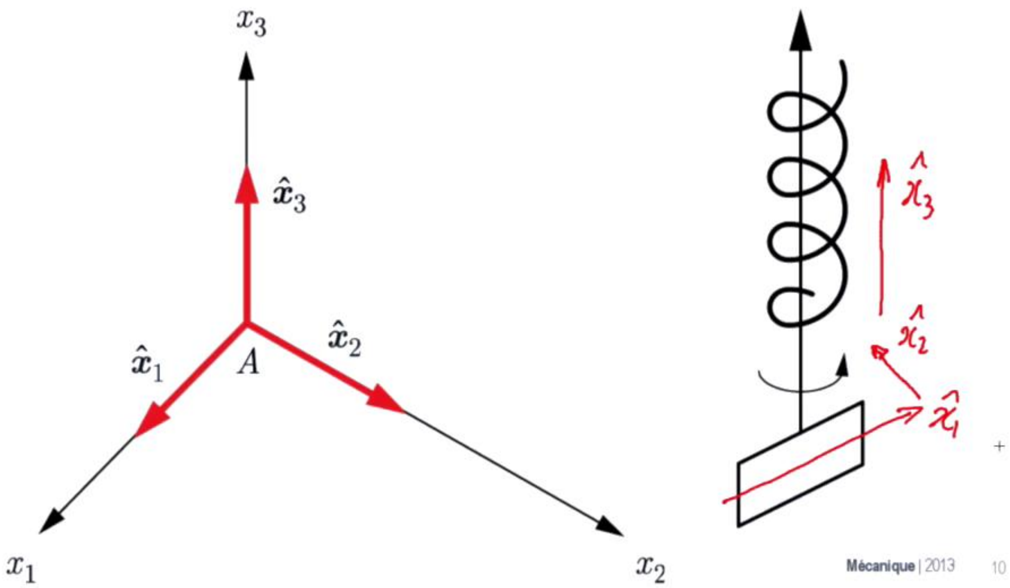
Notes

Summary

1m 05s

Définition : le repère

Un point et trois vecteurs unités, orthogonaux, « direct »



Mécanique | 2013 10

Pour moi, un repère est un ensemble comprenant un point et trois vecteurs unités orthogonaux et formant ce qu'on appelle un repère direct. Je ne traiterai que de repères directs. Je vais définir le terme dans un moment. Alors, imaginez un système d'axes cartésiens A, x1, x2, x3 et les vecteurs unités portés par les axes. x1 avec le chapeau pour indiquer que c'est un vecteur unité, x2 et x3. Quand je dis que ce repère est direct, je veux dire la chose suivante : il y a plusieurs façons d'expliquer le repère direct, je vais passer à travers chacune d'elles. Je commence par celle que je préfère, la règle dite du tire-bouchon. Pour savoir si x1, x2 et x3 forment un repère direct je mets x1 le long de la poignée. J'accroche x2 au bout du x1 et j'imagine que x2, le vecteur unité x2, tire sur x1. Et bien si j'applique cette rotation à la poignée, le tire-bouchon doit se déplacer dans ce sens-là et ce sens-là doit être la direction de x3.

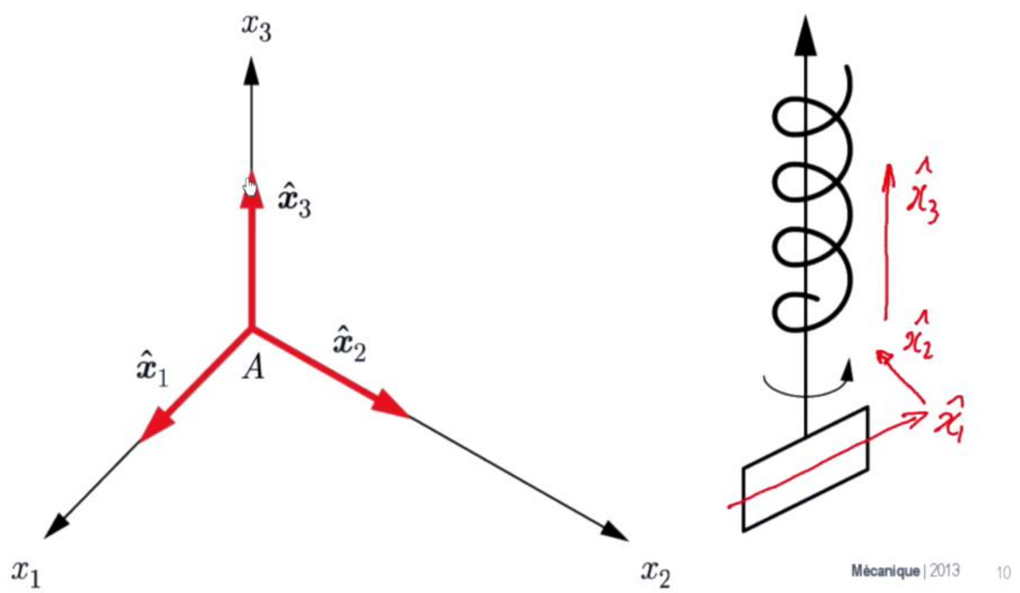
Notes

Summary

2m 17s

Définition : le repère

Un point et trois vecteurs unités, orthogonaux, « direct »



Mécanique | 2013 10

Voilà, ça c'est une façon de définir un repère direct. Une autre manière de définir un repère direct est d'utiliser la règle des trois doigts. Cette règle va comme ceci : on prend le vecteur x1 le long du pouce, x2 l'index, x1 et x2 définissent un plan, le plan formé par les deux doigts et le majeur doit être normal au plan défini par x1 et x2 et le majeur doit pointer dans la direction du x3 comme ceci. Une troisième manière de définir un repère direct c'est la règle du tournevis. Dans ce cas-là vous imaginez que le vecteur x1 est le long de la paume, x2 le long des doigts et le x3 doit être dans le sens du pouce en utilisant toujours la main droite. Donc un repère est constitué d'un point et de trois vecteurs unités orthogonaux formant un repère direct. Vous noterez que mon dessin ressemble à un dessin. Ce dessin-là, avec ses axes de coordonnées, suggère quelque chose qui fait penser à un référentiel. Alors par commodité on a représenté souvent un référentiel par des axes de coordonnées, mais il ne faut pas confondre. Ici, je parle de vecteurs unités. Je vais les utiliser comme outils mathématiques mais je n'ai pas dit que cet objet-là était ce par rapport à quoi nous allons mesurer les vitesses.

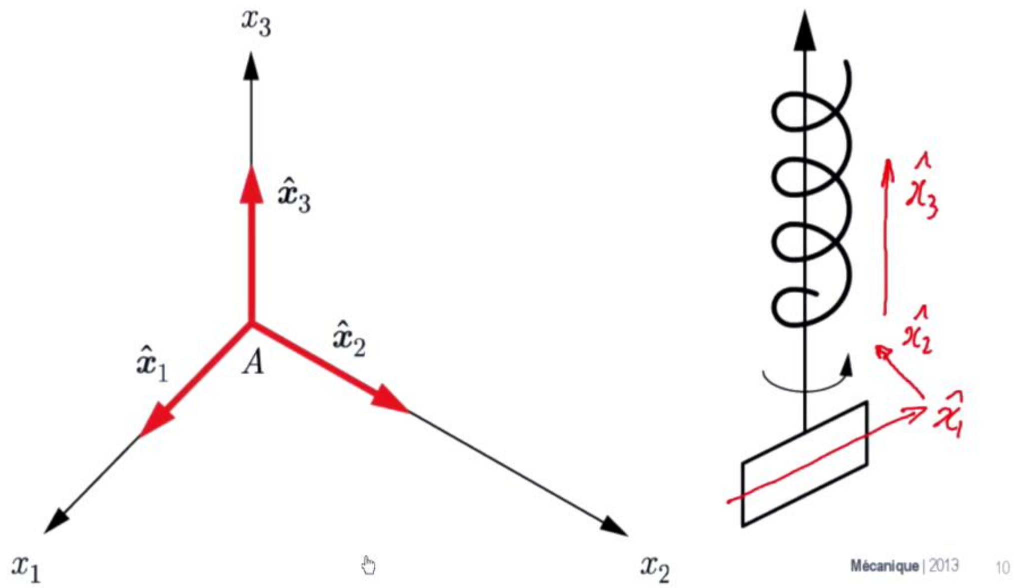
Notes

Summary

3m 50s

Définition : le repère

Un point et trois vecteurs unités, orthogonaux, « direct »



C'est tellement vrai que plus tard, dans le cours, on va définir un tel repère associé à des coordonnées cylindriques et sphériques. Ce repère sera lié au point. Il est exclu de mesurer la vitesse d'un point par rapport à quelque chose qui va avec le point. On aurait une vitesse qui est toujours nulle, ça ne nous servirait à rien. Donc il faut bien faire la différence entre le référentiel, l'objet par rapport auquel on mesure les vitesses et les accélérations et le repère qui est formé de trois vecteurs unités.

Notes

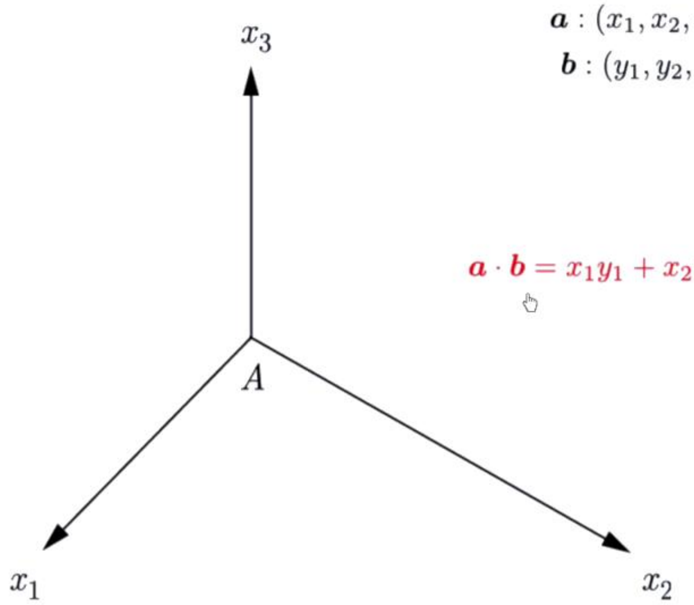
Summary

5m 45s

Définition : le produit scalaire

$\boldsymbol{a} : (x_1, x_2, x_3)$

$\boldsymbol{b} : (y_1, y_2, y_3)$



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

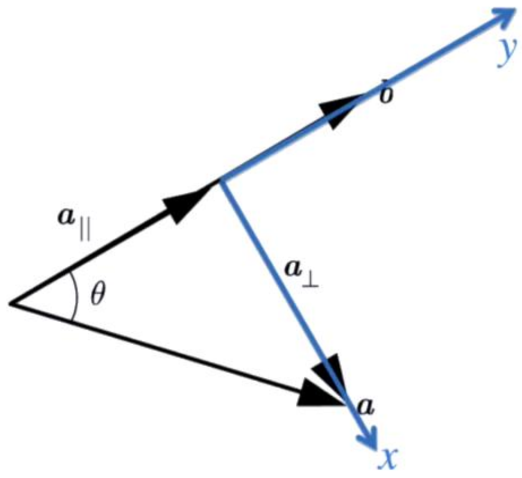
Je passe maintenant à la définition du produit scalaire. Vous imaginez qu'on ait un système d'axes de coordonnées et deux vecteurs ici notés a et b et vous avez les coordonnées du vecteur que j'ai inscrites ici : x1, x2, x 3 et y1, y2, y3. Pour nous, il suffit de dire que la définition du produit scalaire des vecteurs a et b c'est ceci. Le produit scalaire de a et b, noté a, un point au milieu de la ligne, b, c'est le produit des coordonnées une à une sommées : x1y1, x2y2, x3y3 sommées.

Notes

Summary

6m 23s

Propriétés du produit scalaire



$\boldsymbol{a} : (|\boldsymbol{a}| \sin\theta, |\boldsymbol{a}| \cos\theta, 0)$

Mécanique | 2013 19

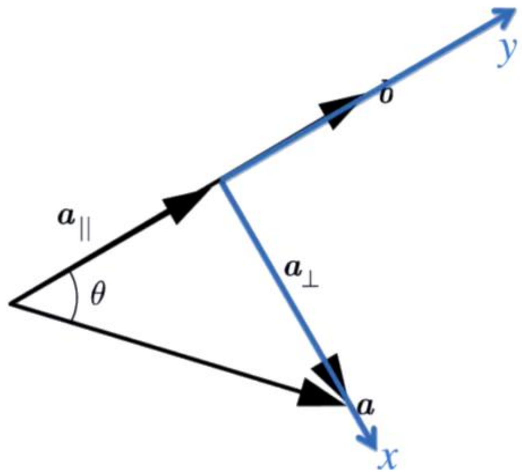
Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire comme on dit en physique, c'est un nombre. Examinons quelques propriétés du produit scalaire : alors j'imagine ici deux vecteurs a et b et un angle thêta entre les deux vecteurs. Je décompose le vecteur a en une somme de deux vecteurs, un parallèle à b, l'autre perpendiculaire à b et maintenant je construis un système de coordonnées. Je provoque un petit peu ici, peut-être. Vous n'avez pas l'habitude de voir les choses comme ça. J'ai des vecteurs qui me sont donnés et c'est moi qui construis un système de coordonnées autour de ces vecteurs. J'ai mis x, l'axe cartésien x, le long de a perpendiculaire et y le long de b. Maintenant, je calcule les composantes de chaque vecteur. Alors la composante x de a c'est cette distance-là qui vaut le module de a fois le sinus de l'angle thêta. C'est ce que j'ai écrit ici. Ça c'est la composante x du vecteur a. La composante y du vecteur a, ça c'est la direction y, c'est donc cette distance-là qui vaut le module de a fois le cosinus de l'angle thêta ce que j'ai noté ici.

Notes

Summary

7m 12s

Propriétés du produit scalaire



$\boldsymbol{a} : (|\boldsymbol{a}|\sin\theta, |\boldsymbol{a}|\cos\theta, 0)$

$\boldsymbol{b} : (0, |\boldsymbol{b}|, 0)$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

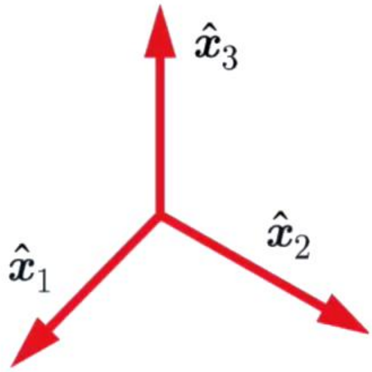
Le vecteur b, trivialement b dans la direction b, où j'ai respecté le sens de b le y avait été mis dans le sens de b, donc là on a plus b et lorsqu'on applique la définition du produit scalaire à ces composantes-là, on voit que le produit scalaire de a et b vaut le module de a fois le module de b fois le cosinus de l'angle entre les deux. J'ai écrit cette formule en rouge pour vous signaler qu'il faut l'apprendre par cœur. Ça vous en aurez tout le temps besoin.

Notes

Summary

8m 47s

Orthogonalité des vecteurs unités d'un repère



$$\hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1(i = j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$$

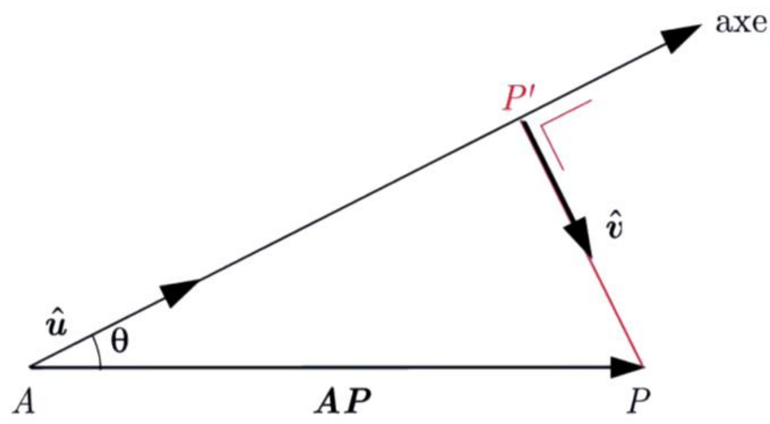
Alors maintenant qu'on a le produit scalaire, on peut exprimer l'orthogonalité des vecteurs d'un repère avec le produit scalaire. Voilà mon repère et je veux dire maintenant que ces deux vecteurs sont orthogonaux donc leur produit scalaire est nul parce que le produit scalaire vaut le module de l'un, un, fois le module de l'autre, un, fois le cosinus de l'angle entre les deux, nonante degrés, le cosinus de nonante degrés c'est zéro. Donc quand deux vecteurs sont orthogonaux leur produit scalaire est nul. Alors le produit scalaire de x1 et x2, est nul, x1 x3 est nul, x2 x3 est nul. J'écris ça de la manière suivante: pour tout i et j, avec i et j qui valent un, deux ou trois j'ai xi, produit scalaire avec xj, qui vaut ce que l'on appelle symbole de Kronecker delta ij qui vaut un si i égale j et zéro si non. C'est juste une notation. Quand i égale j, on a produit scalaire d'un vecteur avec lui-même. Alors, vous savez déjà que c'est la norme au carré et comme ce sont des vecteurs unités cela vaut un ou bien vous appliquez la formule du produit scalaire qui vous dit que le produit scalaire vaut le module des vecteurs un fois un fois le cosinus de l'angle entre les deux. Alors comme on a le même vecteur, thêta dans ce cas-là vaut zéro, cosinus de zéro vaut un, le résultat c'est un. C'est ce qu'on a écrit ici delta ij, quand i égale j on a un.

Notes

Summary

9m 25s

$$\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{AP}| cos\theta$$



Maintenant je peux définir la projection d'un vecteur sur un axe. C'est très important dans le cours de mécanique. On va projeter des vitesses, des accélérations et des forces, tout le temps, tout le temps, tout le temps. Imaginez que vous avez un axe orienté comme ceci. Vous avez un vecteur AP comme cela. Notez AP écrit en gras pour dire que ici on a le vecteur AP. En géométrie on définirait la projection de P sur l'axe en dessinant la perpendiculaire à l'axe et en marquant ce point P prime comme ceci. On va appeler un p prime la projection de ap sur l'axe, en respectant le... l'orientation de l'axe. Donc si maintenant je donne un vecteur u dans la direction de l'axe, tout à l'heure on va utiliser le vecteur v pour la direction perpendiculaire, mais pour le moment on s'occupe du vecteur u le long de l'axe. Vous remarquez, j'appelle têta l'angle entre AP et l'axe, vous remarquez que AP, pardon, AP prime, vaut le module de AP fois le cosinus de l'angle. Et ça, ça doit valoir le produit scalaire de AP et du vecteur unité u par définition, enfin, à cause de la propriété du produit scalaire, le produit scalaire de AP fois u vaut la norme de AP fois la norme de u, qui vaut un, fois le cosinus de l'angle entre les deux.

Notes

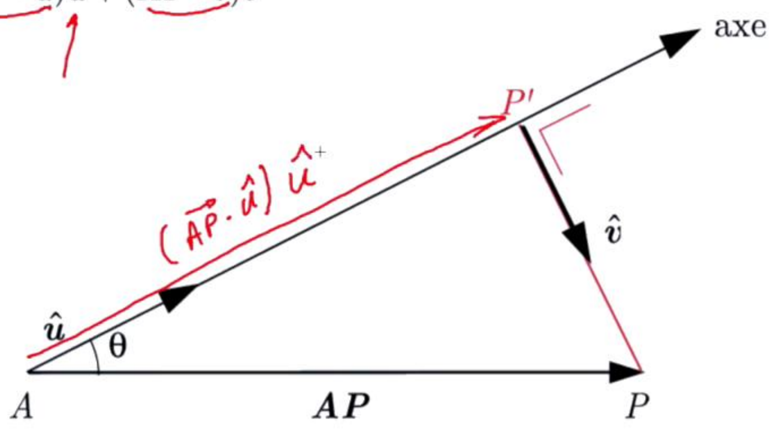
Summary

11m 14s

Définition : projection d'un vecteur sur un axe

$$\boldsymbol{AP}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{AP}|cos\theta$$

$$\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{AP}\cdot\hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{AP}\cdot\hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}$$



Mécanique | 2013 31

Maintenant, on peut s'amuser à écrire le vecteur AP, comme sa projection, AP prime, fois le vecteur u plus la projection P prime P du vecteur AP dans la direction perpendiculaire, fois le vecteur v. Ça veut dire ceci. Vous voyez la structure de cette équation, vous avez ici AP u qui donne la projection de AP sur l'axe. AP v, l'autre terme, le terme perpendiculaire. J'ai pris AP u et j'ai multiplié par u, donc ici j'ai un scalaire, et c'est la projection de AP sur l'axe, fois le vecteur u porté par l'axe, ça nous donne un vecteur, ça nous donnerait ce vecteur là. Ça, c'est le vecteur AP (alors moi je ne peux pas faire des gras, je suis obligé de mettre une flèche) fois u produit scalaire avec u, encore une fois avec u.

Notes

Summary

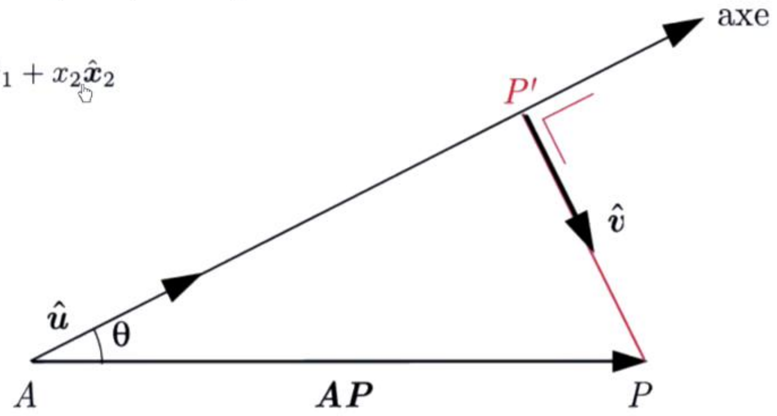
13m 06s

Définition : projection d'un vecteur sur un axe

$$\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = |\boldsymbol{AP}| cos\theta$$

$$\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{u}})\hat{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{AP} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{AP} = x_1 \hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2 \hat{\boldsymbol{x}}_2$$



Mécanique | 2013 32

Je répète, ici vous avez un produit scalaire, c'est un nombre, et maintenant le nombre multiplie le vecteur u pour nous donner ce vecteur AP prime. Je peux l'écrire: égale le vecteur AP prime. Et tout ça, je vais peut être effacer, tout ça, ça donne le vecteur AP prime, AP prime, et maintenant, ici, j'ai le vecteur P prime P, le vecteur P prime P. La notation peut paraître lourde, mais elle ne dit rien de nouveau. Si on avait un système d'axe cartésien, avec un axe dans cette direction ici, un axe dans la direction perpendiculaire, des vecteurs unité qu'on aurait appelé x un chapeau et x deux chapeau, on aurait que le vecteur AP, on aurait pu l'écrire comme x un, sa composante dans la direction un, fois le vecteur x un, plus la composante de AP dans la direction x deux, fois le vecteur x deux chapeau.

Notes

Summary

14m 18s

Définition : Produit Vectoriel

$$\boldsymbol{a} : (a_1, a_2, a_3)$$
$$\boldsymbol{b} : (b_1, b_2, b_3)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{\boldsymbol{x}}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{\boldsymbol{x}}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Mécanique | 2013 35

Maintenant je passe à la définition du produit vectoriel. Alors pour nous il suffira de définir un produit vectoriel de la manière suivante. J'imagine que j'ai deux vecteurs dont les composantes sont a un, a deux, a trois, et pour l'autre vecteur b un, b deux, b trois. J'appelle produit vectoriel de a et b et je vais souvent appeler cette expression là, a crosse b. On appelle a crosse b le déterminant qu'on obtient quand on met les vecteurs unité de notre repère dans la première colonne, les composantes du premier vecteur dans la deuxième colonne, les composantes du deuxième vecteur dans la deuxième colonne. Et on calcule le produit, le déterminant, en disant que ce déterminant vaut x un fois ce mineur ici, qui vaut a deux b trois moins a trois b deux, a deux b trois moins a trois b deux. Si maintenant je veux regarder la composante x deux, je dois calculer a trois b un moins a un b trois, c'est ici. Et la troisième composante a un b deux, moins a deux b un, a un b deux moins a deux b un. Cette notation là, avec des parenthèses est souvent malheureuse en physique parce que on ne voit pas le fait que on a des termes qui sont en fait projetés sur un repère et ce repère peut évoluer dans le temps, comme nous allons l'apprendre.

Notes

Summary

15m 42s

Définition : Produit Vectoriel

$$\boldsymbol{a} : (a_1, a_2, a_3)$$
$$\boldsymbol{b} : (b_1, b_2, b_3)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{\boldsymbol{x}}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{\boldsymbol{x}}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Alors on peut préférer cette notation là, a crosse b vaut une composante dans la direction x un, une composante dans la direction x deux, et la troisième dans la direction x trois.

Notes

Summary

17m 31s

Propriétés du produit vectoriel

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

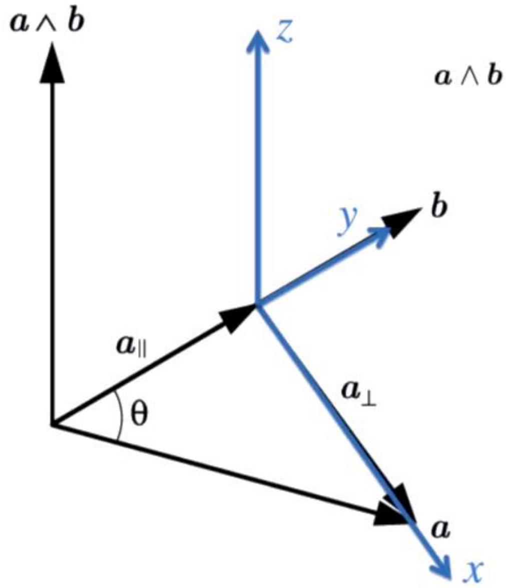
Pratiquement, on n'apprend pas cette formule par cœur, on calcule ce déterminant. Je passe maintenant à quelques propriétés du produit vectoriel. La première c'est, la voici, si je fais le produit vectoriel de a et de b, a crosse b, a crosse b est un vecteur. Et maintenant je me propose de calculer le produit scalaire entre le vecteur a crosse b et un vecteur c. Et bien, si vous réfléchissez un moment, vous allez voir que vous pouvez très bien faire ce calcul en remplaçant ici x un, x deux, x trois que j'avais, par les composantes du vecteur c. Cette petite... ce petit truc de calcul va nous rendre service pour une propriété essentielle du produit vectoriel. Si je fais le produit scalaire de a crosse b avec a, je vais avoir a ici, b ici, et a à nouveau. Et vous avez un déterminant avec deux colonnes identiques. Et on peut montrer dans ce cas là, le déterminant est toujours nul. Donc, ici on a zéro. Ceci veut dire que a crosse b est perpendiculaire à a. Bien entendu, si maintenant je fais a crosse b produit scalaire avec b, j'aurai aussi zéro. Donc le produit vectoriel a crosse b est un vecteur qui est perpendiculaire à a et à b.

Notes

Summary

17m 50s

Propriétés du produit vectoriel



$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & a\sin\theta & 0 \\ \hat{\boldsymbol{y}} & a\cos\theta & b \\ \hat{\boldsymbol{z}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\sin\theta \end{pmatrix}$$

Mécanique | 2013 41

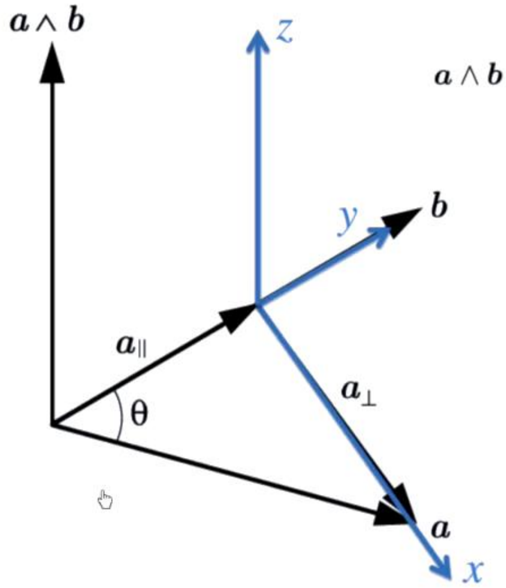
Faisons un dessin. Je reprends mes vecteurs a et b, avec l'angle têta entre les deux et je décompose a en un a parallèle, a perpendiculaire. Maintenant je sais que a crosse b est un vecteur qui est normal au plan qui contient a et b. Alors je peux définir des axes cartésiens, construits sur mes vecteurs, comme tout à l'heure, le vecteur x et le y, et le z, perpendiculaire au plan qui contient x et y, et qui contient aussi a et b. Je calcule maintenant les projections des vecteurs. Et je calcule le produit vectoriel. Donc maintenant si j'ai mes vecteurs unité x, y, z, notés ici, je dois mettre ici les projections du vecteur a. Alors la projection de a dans la direction x ça vaut le module de a fois le sinus de l'angle têta, ce que j'ai noté ici. Ici on a a cosinus têta, et là zéro, les plans, les vecteurs a et b sont dans le plan z égale zéro. Donc on a zéro ici. Pour b c'est tout simple, b est le long de y parce qu'on a défini y le long de b, donc j'ai juste un b ici. Quand je fais le produit vectoriel, ça veut dire quand je calcule ce déterminant, il y a un seul terme qui est non nul, c'est celui-ci, c'est le terme en z, qui vaut a b sinus têta.

Notes

Summary

19m 18s

Propriétés du produit vectoriel



$$a \wedge b = \begin{vmatrix} \hat{x} & a\sin\theta & 0 \\ \hat{y} & a\cos\theta & b \\ \hat{z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$|a \wedge b| = |a||b||\sin\theta|$$

Alors j'arrive à ce résultat essentiel, qu'on utilisera tout le temps, qui est que la norme, la norme du vecteur a crosse b, vaut la norme de a fois la norme de b fois la valeur absolue du sinus de l'angle entre les deux vecteurs. Pour le produit scalaire on avait, que le produit scalaire valait la norme de a fois la norme de b fois le cosinus de l'angle.

Notes

Summary

20m 56s

Propriétés du produit vectoriel

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 & a_1 & (b_2c_3 - b_3c_2) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 & a_2 & (b_3c_1 - b_1c_3) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_3 & a_3 & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix} = \cdots$$

Ici, on a le sinus de l'angle. Il y a une propriété du produit vectoriel qui est un peu bizarre, mais que je vais utiliser de temps en temps parce qu'elle est bien commode. Regardez. Ici, je considère le produit vectoriel de a, avec le produit vectoriel b crosse c. Et bien, on peut montrer que le vecteur résultant peut s'écrire a c b, donc vous faites le produit scalaire a c fois le vecteur b, moins a b c. Pour se souvenir de la formule avec le signe correct, il faut savoir que d'abord on fait a c b, et après a b c, dans le bon ordre, vient avec le signe moins. Enfin, c'est comme ça que moi je me souviens de la formule. Comment démontrer cette formule, je vous invite à le faire. Vous prenez la définition, le produit vectoriel ici. Vous le calculez explicitement en mettant les composantes de a et ici, les composantes de b crosse c. J'ai appliqué la définition de b crosse c ici. Vous calculez ce déterminant là, vous avez des expressions très longues et vous allez obtenir un résultat équivalant à cette formule.

Notes

Summary

21m 35s