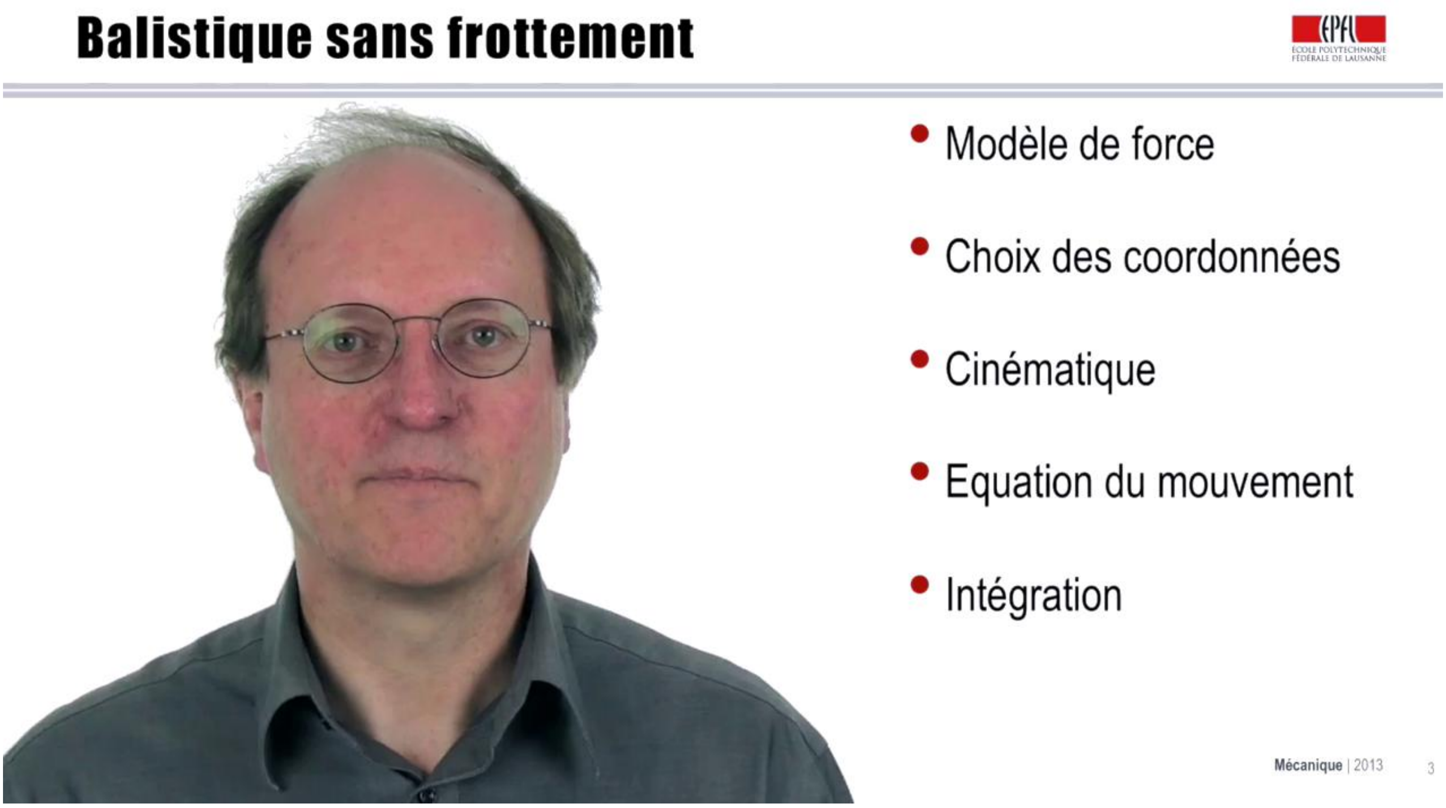
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-3

Balistique sans frottement

Mécanique, cours 3.2

Jean-Philippe Ansermet

EPFL



Hallo und wilkommen zur Vorlesung "Allgemeine Physik" der EPFL. In dieser Lektion haben wir gerade die Newtonsche Gesetze für ein Massepunkt präsentiert, unter anderen das Gesetz F gleich ma. Nun möchte ich diesen Formalismus sofort anwenden um ein sehr einfaches Problem zu lösen. Es handelt sich um Ballistik in einem Schwerkraftfeld und wir werden von Anfang an eine systematische Vorgehensweise benutzen die man bei allen Problemen der Mechanik anwenden kann. Zuerst, modelliere ich die Kraft die uns beschäftigt. Dann wähle ich ein Koordinatensystem. Mit diesem Koordinatensystem werde ich die Kinematik beschreiben, bzw. die vektorielle Geschwindigkeit und die Beschleunigung. Dann werde ich das Gesetz "F gleich ma" einsetzen und damit die Differentialgleichungen schreiben, die ich dann integriren muss.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : la pesanteur

Observation :

- Force proportionnelle à la masse
- Toujours dans la même direction, « verticale »
- g : caractéristique de la force
- Loi « phénoménologique »

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$$

$$|\boldsymbol{g}| = g = 9.8ms^{-2}$$

Mécanique | 2013 11

Ich beginne mit dem Modell der Kraft. Mit unserem Dynamometer können wir Kräfte messen. Dabei hat man beobachtet, dass auf der Erde eine Kraft wirkt, die ziemlich genau immer dieselbe Richtung hat und die dazu zur Masse proportional ist. Diese Richtung werde wir als senkrecht bezeichnen und der Proportionalitätskoeffizient nennen wir g. Dieser charakterisiert die Kraft. Ich kann ein phänomenologisches Gesetz schreiben um meine Beobachtungen zu beschreiben. Dies heisst, eine Gesetz das analytisch simpel ist. Ich schreibe F gleich mg. Die Kraft gleich mg, wo g ein Vektor ist, mit einer Norm die den Wert des Koeffizientes hat. Der Vektor ist senkrecht und zeigt nach unten. Und hier ist ein ungefährer Wert von g.

Notes

Summary

1m 05s

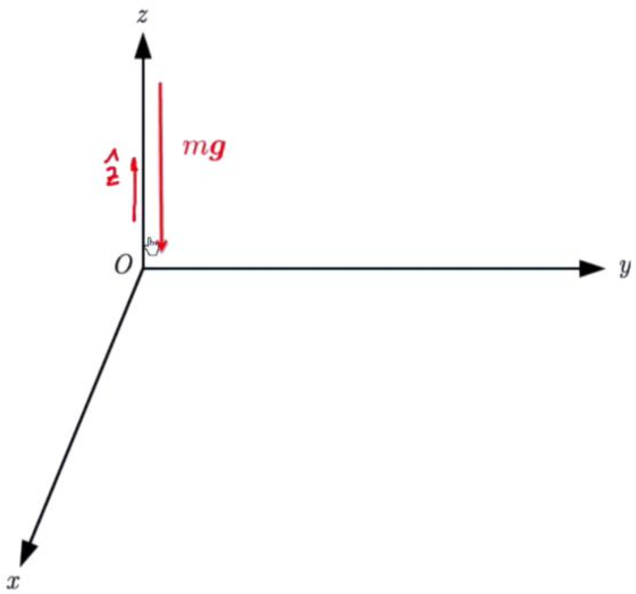
Nun komme ich zur ersten Beschreibung der Dynamik. Ich werde hier noch keine Projektionen benutzen. Wir werden dies später sehen, denn normalerweise arbeitet man mit diesen Projektionen. Auf dieser Seite haben wir eine vektorielle Beschleunigung welche meine kinematische Grösse ist. Anderseits haben wir das dynamische Gesetz das ausdrückt, dass "Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" ist. Ich habe gerade festgestellt, dass unter bestimmten Bedingungen die Kraft ein Wert von Masse mal diesen Vektor g ist. Also komme ich zu dieser Gleichung: a gleich g. Ich habe diese Gleichung besonders gerne weil sie als Symbol einer wiederkehrenden Schwierigkeit in der Physik dienen könnte. In der Physik, stehen eingesetzte Symbole für Grössen die in der experimentalen Welt existieren. Und hier ist a gleich g nicht eine triviale Gleichung und ich werde alles tun um die erdische Beschleunigung nicht "g" zu nennen, denn dies würde nur zur Verwirrung führen. Was Sie sehen müssen wenn Sie "a gleich g" lesen, ist, dass einerseits ein Kraftmodell und anderseits das newtonsche dynamische Gesetz welches lautet "Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" dahinter stecken. Beide stehen hinter diese Gleichung "a gleich g" welche keine Identifizierung ist.

Notes

Summary

2m 18s

Equation du mouvement pour la pesanteur



Cinématique

$$a_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \ddot{z}$$

Dynamique

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = -mg$$

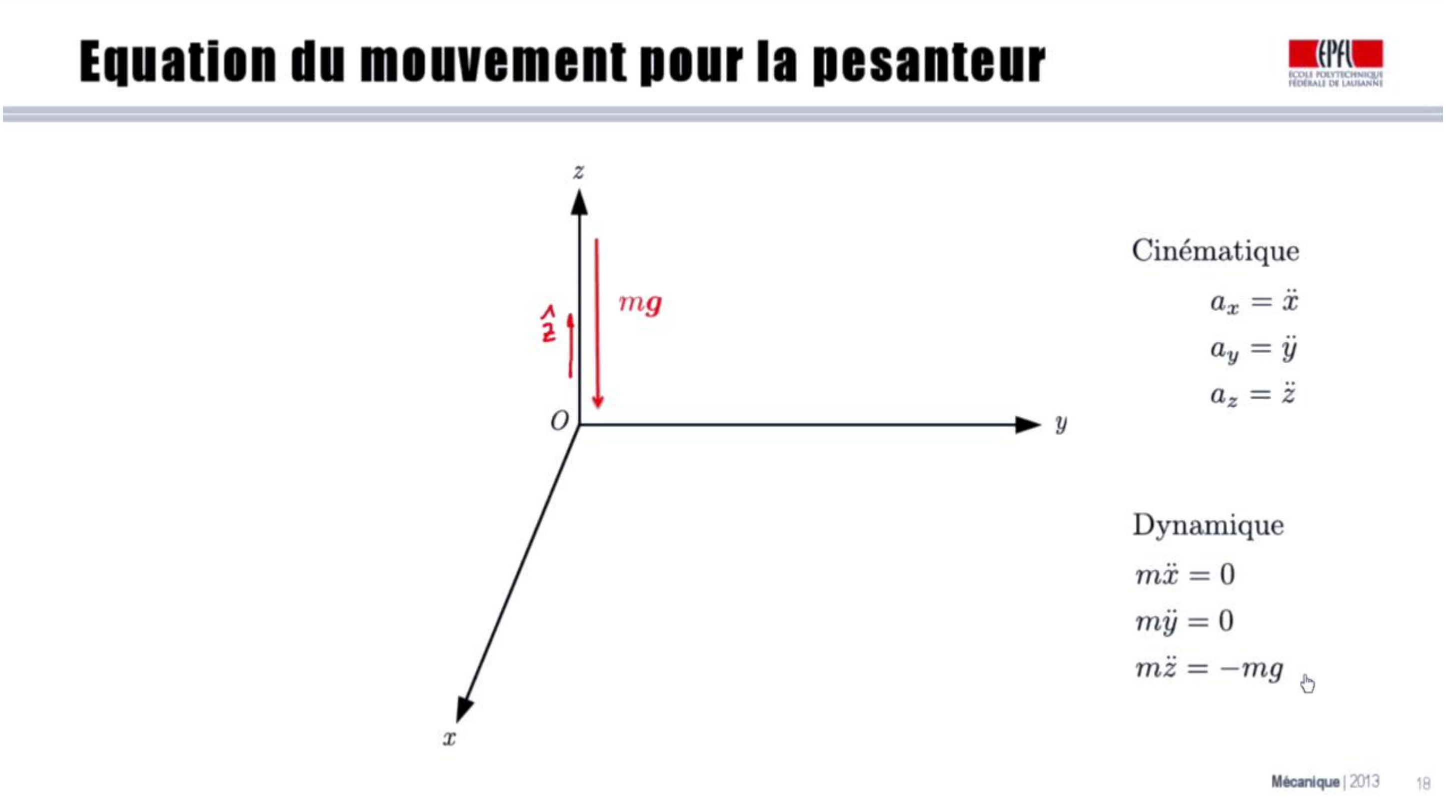
Mécanique | 2013 18

Schauen wir jetzt an, wie man mithilfe von Projektionen ein physikalisches System analysiert. Ich gehe davon also aus, dass ich ein Bezugssystem definiert habe, das durch ein kartesisches Koordinatensystem verkörpert wird. Ich wähle die z-Achse senkrecht und nach oben zu definieren. Meine mg-Kraft zeigt also in der z-Richtung nach unten. Wenn ich ein kartesisches Koordinatensystem benutze das Teil des Bezugssystems ist, ist meine Beschleunigung, meine Kinematik, sehr einfach auszudrücken. Dafür nimmt man die zweite zeitliche Ableitung von den drei Koordinaten. Also sehen meine Bewegungsgleichungen die ich mit Hilfe des Gesetzes f gleich ma finde, so aus : man sieht m mal die Beschleunigung in der x- Richtung die null ist, gleich die Kraft in dieser Richtung welche null ist weil g in der z-Richtung ist. Also ist die Kraft in der Richtung x null, sowie für y. In der Richtung z haben wir minus mg. Wenn man mit Projketionen arbeiten will kann man ein Vektor Zirkumflex-z definieren in derselben Richtung wie die Achse. z mal g ist also ein Skalarprodukt z mal g welcher den Kosinus des Winkels zwischen den beiden Richtungen mitbringt. Dieser Winkel hat ein Wert von Pi. Der Kosinus ist also minus 1.

Notes

Summary

4m 04s



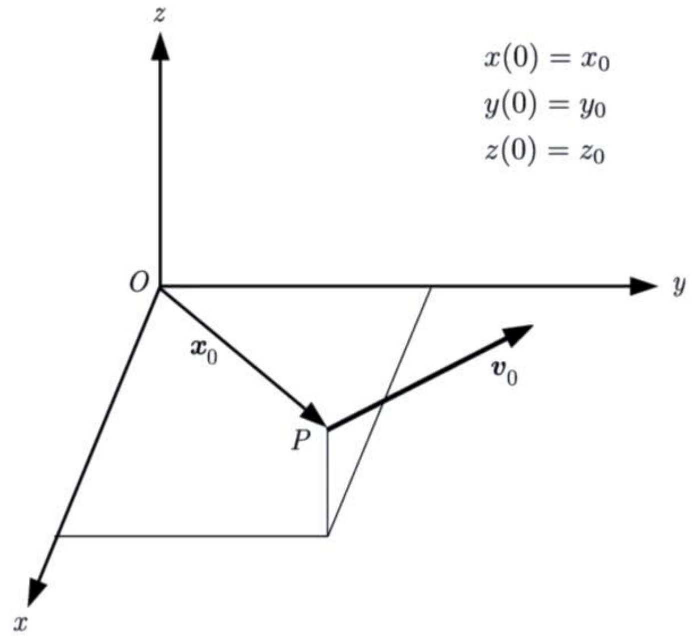
Dieses minus 1 sehen wir hier. Okay, nun habe mich meine Bewegungsgleichungen, meine diferentielle Gleichungen die die Bewegung meiner Masse im Schwerkraft Feld beschreiben. Wir probieren jetzt sie zu interieren.

Notes

Summary

5m 52s

Conditions initiales



$$x(0) = x_0 \qquad v_x(0) = v_{0x}$$
$$y(0) = y_0 \qquad v_y(0) = v_{0y}$$
$$z(0) = z_0 \qquad v_z(0) = v_{0z}$$

Mécanique | 2013 23

Wir haben es bei der geradelinigen, gleichförmigen Bewegung schon gesehen: in der Integration werden wir Konstanten finden. Diese werden normalerweise mit Hilfe von Anfangsbedingungen berechnet. Schreiben wir zuerst mal diese Anfangsbedingungen. Ich behaupte, dass wenn t null ist, mein Massepunkt irgendwo in meinem Koordinatensystem liegt und seine initiale Geschwindigkit ist bekannt und hat irgendeinen Wert. Ich sage also, dass x y z, wenn t 0 ist, diese Werte haben. Die nenne ich x(0), y(0), z(0). Dasselbe gilt für die Geschwindigkeit in den Richtungen x y z, mit t 0, sind v0x, v0y, v0z. Achten Sie gut auf die Notation: es sind hier zwei Indizien. Hier sind die Bewegungsgleichungen.

Notes

Summary

6m 09s

Intégration des équations du mouvement

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = -mg$$

$$\ddot{z} = -g$$
$$\dot{z} = -gt + C$$
$$t = 0 \qquad C = v_{0z}$$
$$\dot{z} = -gt + v_{0z}$$
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v$$

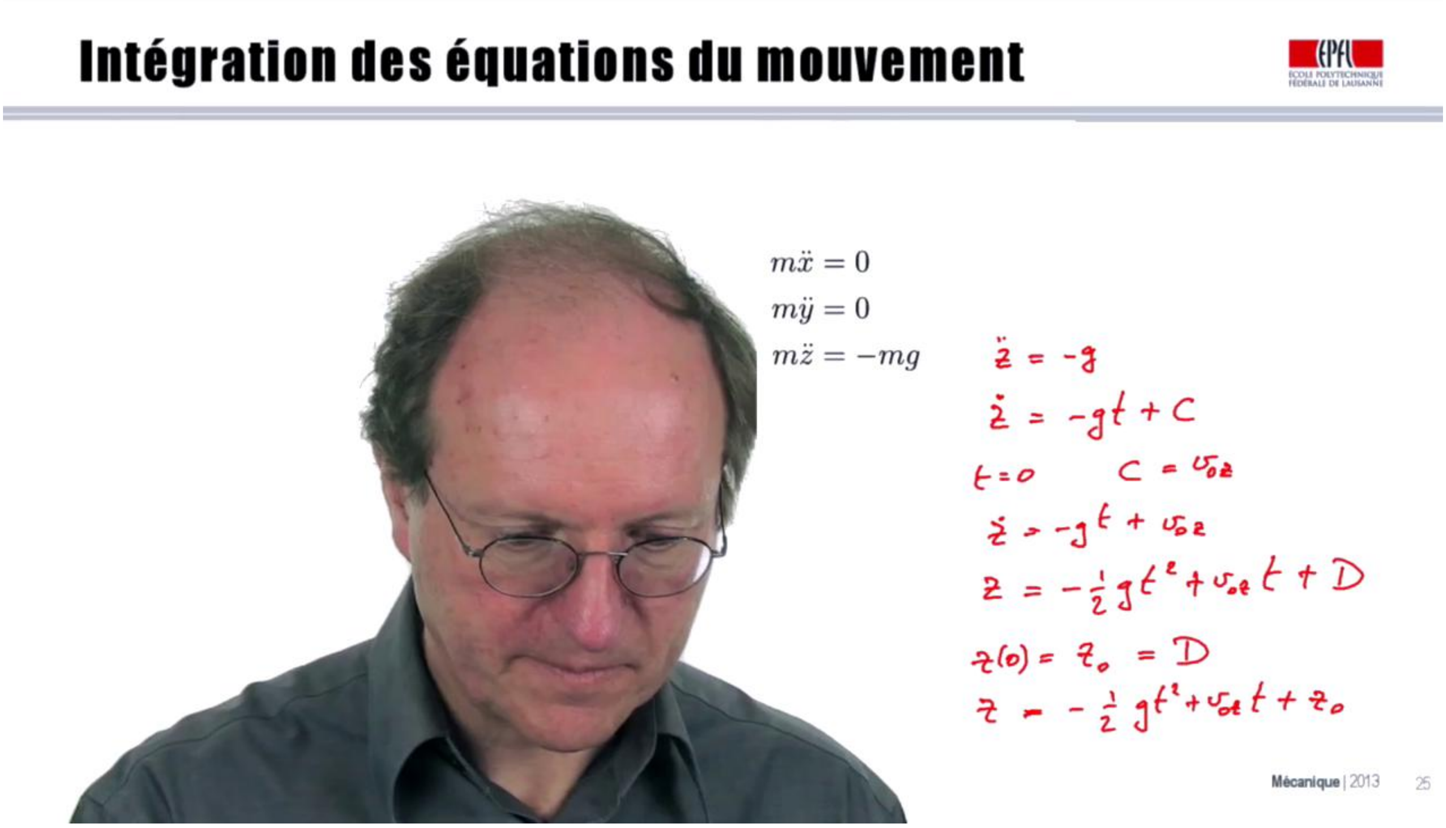
Mécanique | 2013 25

Ich schreibe sie wieder hier. Schauen wir sie eine nach der anderen. Diese bedeutet, dass die zeite Ableitung meiner Funktion null ist. Also muss die erste Ableitung eine Konstante sein. Welchen Wert hat sie? Diese Konstante muss den Wert der initialen Geschwindigkeit haben (v0x). Ich integriere nochmals. Hier kann ich mir keine Ungenauigkeit erlauben und muss deshalb die Indizien ganz klar anzeigen: v 0 x. Ich integriere also. Jetzt habe ich x Funktion von t, also der Zeit die v0x mal die Zeit plus eine Konstante ist. Diese nenne ich d. Wir wissen auch dass wenn t 0 ist, ist x x0. Also haben wir x 0 gleich d. Am Ende haben wir x gleich v0x mal t plus x 0. In der Richtung y ist die Arbeit genau dieselbe. In der Richtung z ist die Lage etwas anders. Da haben wir z Doppelpunkt gleich minus g. Ich integriere einmal: z Punkt gleich minus g t plus eine Konstante. Diese nenne ich C. Was wissen wir über z Punkt? Dass es den Wert von C hat wenn t 0 ist. Aber z-Punkt hat schon einen Wert von v 0 z. Ich habe also z-Punkt gleich minus g t plus v0z. Ich integriere nochmals : z gleich minus eins über zwei g t Quadrat. Tatsächlich, wenn ich z zeitlich ableite kriege ich minus g t. Dies sieht man hier.

Notes

Summary

7m 17s

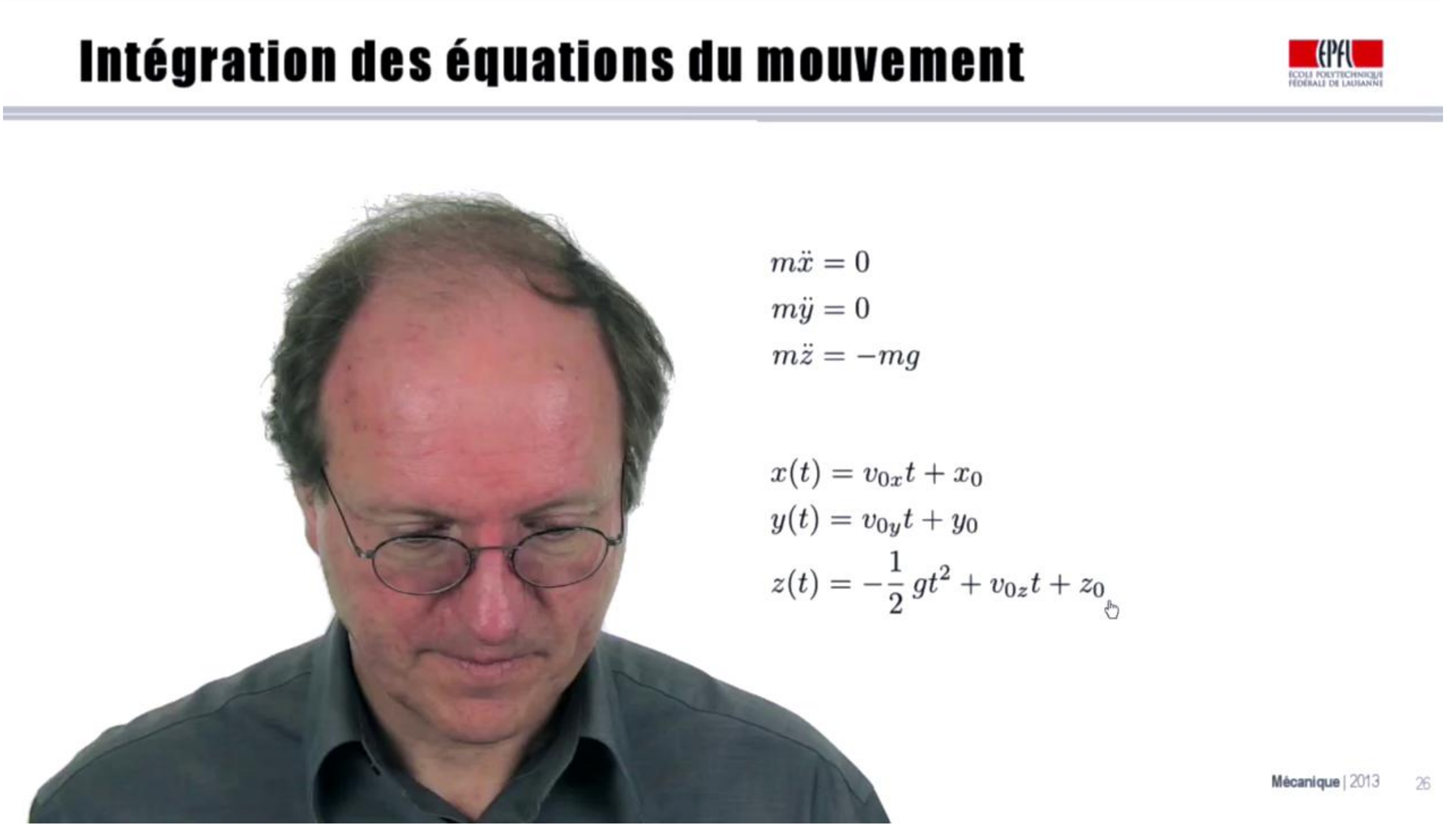


Dazu kommt noch v0z t plus eine Konstante. Wenn t null ist haben wir z 0. Wir haben zuvor gesagt, dass dies z 0 ist. Wenn ich t gleich null in dieser Gleichung einsetze bleibt mir nur noch das d. Am Ende habe ich z gleich minus eins über zwei g t Quadrat, plus v0z t plus z 0. Okay, ich kann jetzt das ganze löschen.

Notes

Summary

9m 40s

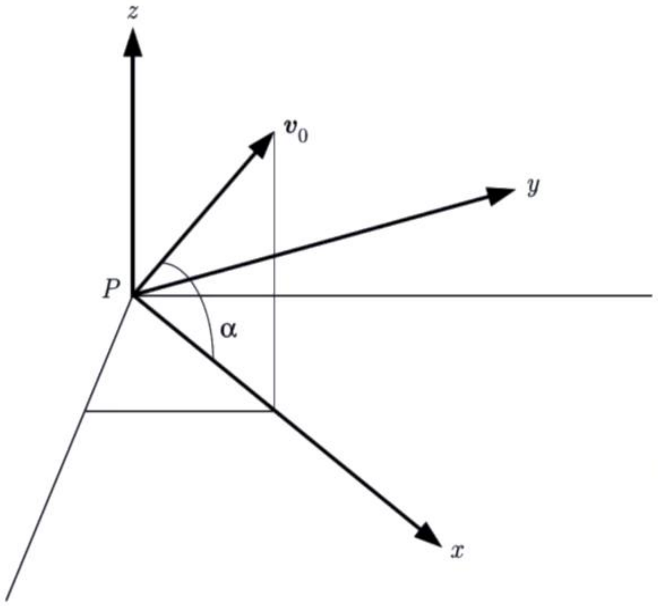


Und schreibe alle Lösungen erneut. So. Mit v0x v0y v0z die die Geschwindigkeit wenn t 0 ist sind; x0 y0 z0 die Position wenn t 0 ist.

Notes

Summary

10m 14s



$$x(0) = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$z(0) = 0$$

$$v_x(0) = v_{0x}$$
$$v_y(0) = 0$$
$$v_z(0) = v_{0z}$$

$$x(t) = v_{0x}t$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$$

Ich könnte mir nun die Frage stellen : wie sieht die Trajektorie aus ? Um diese zu berechnen antizipiere ich die Kalkulationen. Sollte ich diese machen würde ich merken, dass man die Notation ein bisschen vereinfachen kann. Ich definiere erneut mein Koordinatensystem. Warum mache ich das? Um Ihnen klar zu zeigen, dass Sie dies wirklich wählen können. Sie bestimmen welches Koordinatensystem gebraucht wird. Achten Sie jetzt wie ich diese Notationen vereinfache. Zuerst sage ich, dass wenn t 0 ist, meinen massepunkt beim Nullpunkt liegt. Wenn t 0 ist ist dieser beim Koordinatenursprung. Dann wähle ich meine Achsen. Hier x, y, z, sodass die initiale Geschwindigkeit v 0 sich in der Ebene die x und z enthält befindet. Das wähle ich einfach. Weil ich meinen Koordinatenursprung am Ort wo sich der p-Punkt am Anfang befindet definiert habe, sind die drei initiale Koordinaten 0 wenn t null ist. Für die Geschwindigkeit ist eine Koordinate null, denn ich habe v in der x-z Ebene gezwungen. Für x habe ich einen gewissen Wert, für die Richtung z auch, aber nicht in der y-Richtung. Meine Bewegungsgleichungen sehen dann so aus, mit vielen Konstanten die jetzt verschwunden sind. Um die Trajektorie zu berechnen, muss ich die Zeit eliminieren.

Notes

Summary

10m 39s

Trajectoire

$$x(t) = v_{0x}t \qquad t = \frac{x}{v_{0x}}$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$$

Mécanique | 2013 33

Wir haben Zeit-Weg- Gleichungen die Gleichungen genennt in den wir die Position des Massepunktes als eine Funktion der Zeit hatten. Die Trajektorie beschreibt nur das geometrische Ort. Da hängt nichts mehr von der Zeit ab. Damit kann ich schreiben, dass t gleich x über v 0 x, und dies setze ich hier ein, und hier, um z als Funktion von x zu kriegen. Okay, jetzt haben Sie z als Funktion von x.

Notes

Summary

12m 39s

Trajectoire

$$x(t) = v_{0x} t$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t$$

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0z} \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)$$

Da steckt keine Zeit dahinter. Dies beschreibt eine Kurve in der z-x Ebene. Anders gesagt ist es eine Funktion z x die eine Parabel definiert.

Notes

Summary

13m 18s