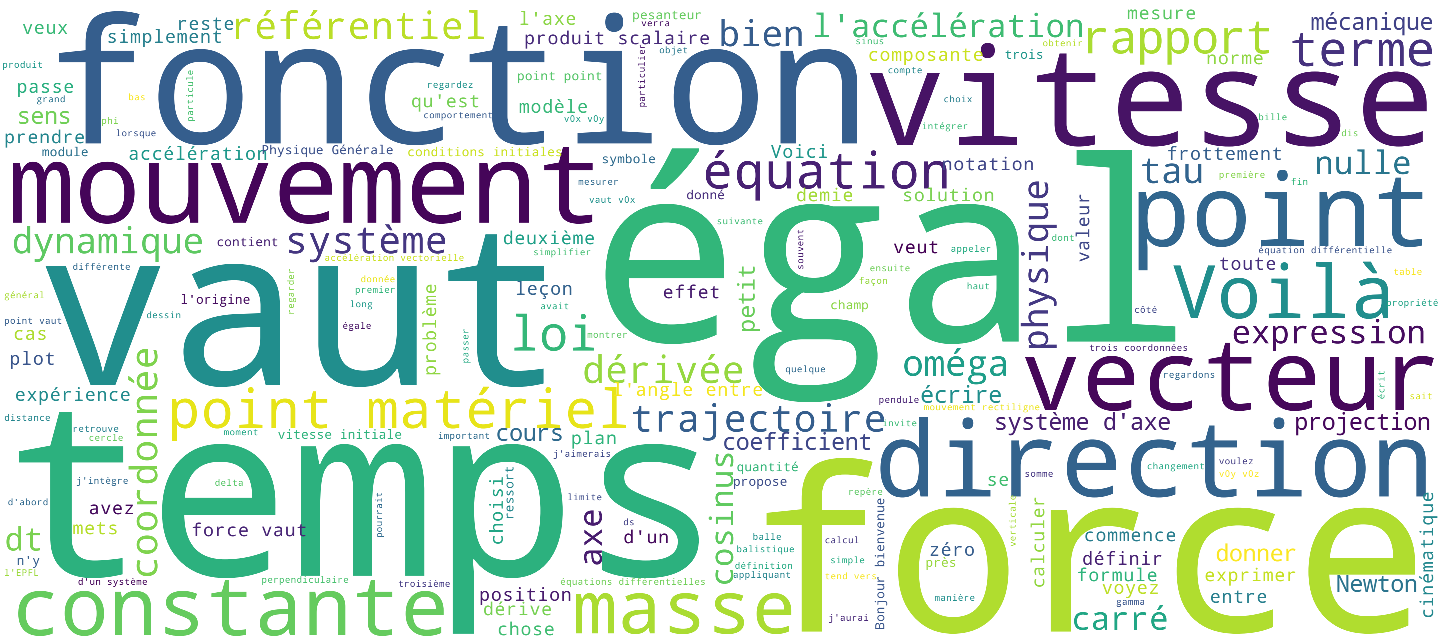
Balistique sans frottement

Mécanique, cours 3.2

Jean-Philippe Ansermet

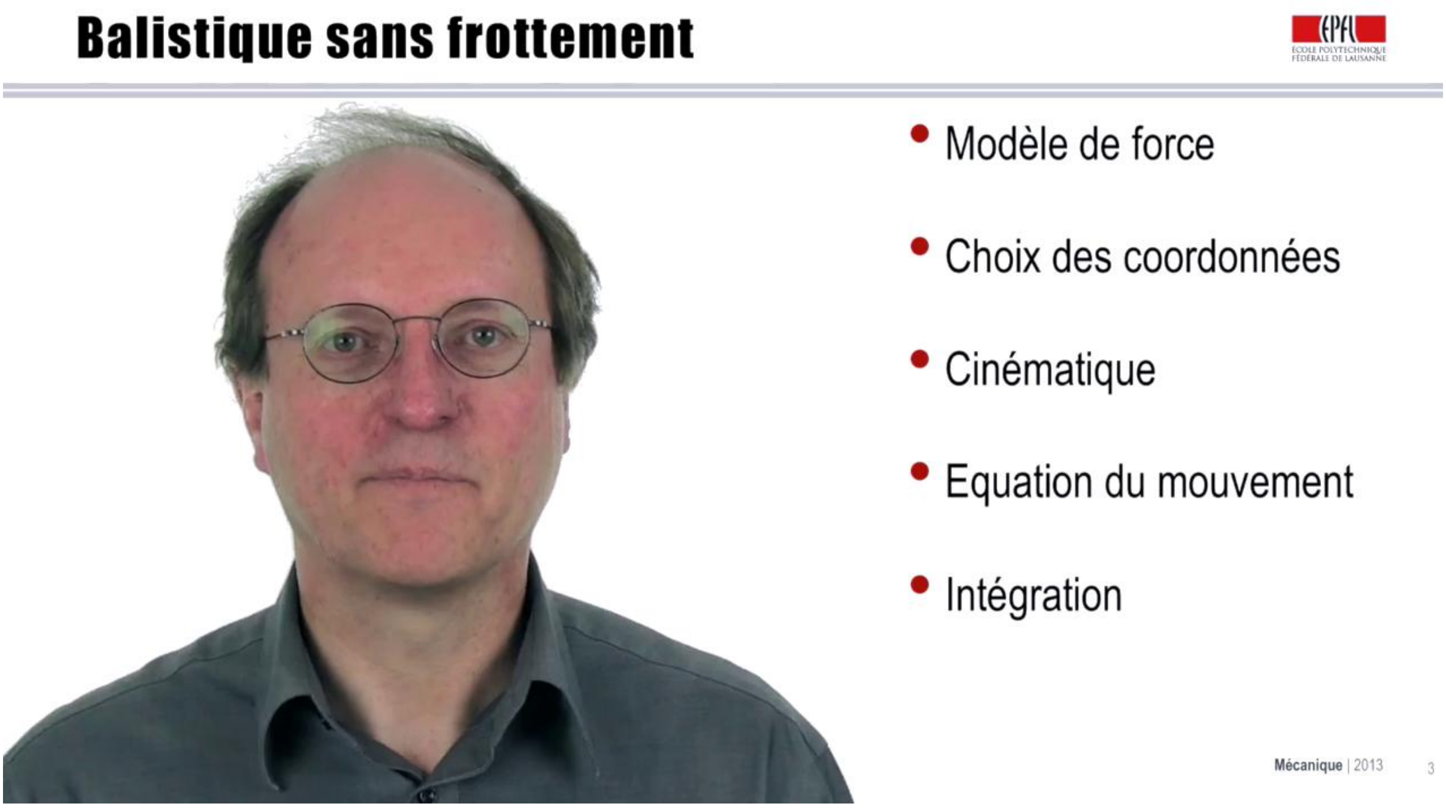
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-3



Search MOOC

Video

EPFL



Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Dans cette leçon, nous venons de nous donner les lois de la dynamique pour un point matériel, en particulier, la loi F égal ma, Dans cette leçon, j'aimerais tout de suite appliquer le formalisme, pour un cas très simple, pour le cas de la balistique dans le champ de la pesanteur et on va tout de suite adopter une démarche systématique qu'on va retrouver dans tous les problèmes de mécanique. D'abord, je vais modéliser la force en présence, ensuite, je vais choisir un système de coordonnées. Avec ce système de coordonnées je vais exprimer la cinématique, donc vitesse et accélération vectorielle. En appliquant la loi de la dynamique, F égal ma, je vais pouvoir écrire des équations différentielles, qu'il me faudra intégrer.

Notes

Summary

0m 04s

Définition : la pesanteur

Observation :

- Force proportionnelle à la masse
- Toujours dans la même direction, « verticale »
- g : caractéristique de la force
- Loi « phénoménologique »

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$$

$$|\boldsymbol{g}| = g = 9.8ms^{-2}$$

Mécanique | 2013 11

Je commence avec le modèle de force. Et bien, avec notre dynamomètre, on peut mesurer des forces et qu'est-ce qu'on observe? C'est que grosso modo, dans une assez bonne précision, à la surface de la terre, les corps subissent une force, proportionnelle à la masse, toujours dans la même direction, qu'on va appeler la verticale, et on va noter le coefficient de proportionnalité g, on retiendra que g caractérise la force. Je peux écrire une loi phénoménologique pour rendre compte de mes observations, ça veut dire une loi d'une forme analytique simple, je vais écrire F égal mg, la force vaut mg, où g est un vecteur dont la norme vaut le coefficient g, le vecteur est vertical, dirigé vers le bas. Et voici une valeur approximative de g.

Notes

Summary

1m 05s

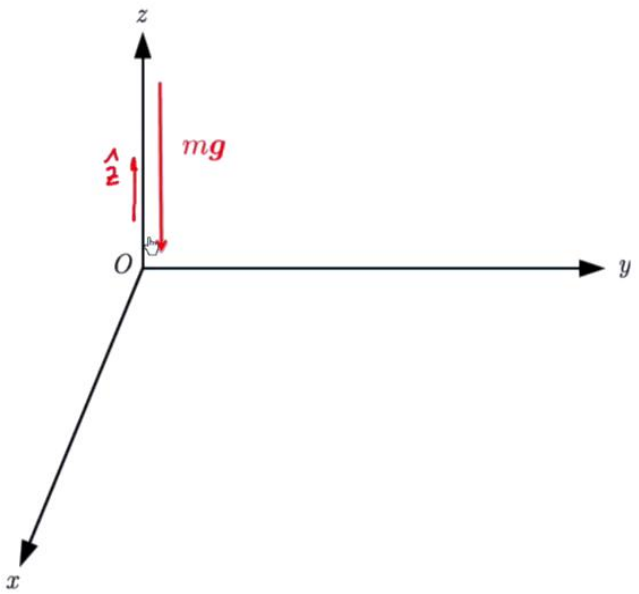
Je passe maintenant à une première description de la dynamique, où je vais me faire l'économie de ne pas projeter, on verra après comment on fait avec des projections parce que en général, c'est comme ça qu'on travaille. Alors, d'un côté j'ai une accélération vectorielle, c'est ma donnée cinématique, a, d'un autre côté, j'ai une loi de la dynamique qui me dit que la force vaut la masse fois l'accélération. J'ai maintenant observé, que pour certaines circonstances, la force vaut la masse fois ce vecteur g, donc je peux en conclure l'équation suivante : a égal g. Alors j'aime beaucoup, cette équation-là, parce que elle pourrait servir de symbole à une difficulté récurrente en physique. En physique, les symboles que nous utilisons ont un sens, dans la réalité expérimentale, et ici a égal g, n'est pas une simple identité et je vais tout faire pour me retenir d'appeler g l'accélération terrestre, parce que c'est le début de la confusion. Ce que vous voyez quand vous voyez a égal g, c'est l'expression de deux choses, d'une part un modèle de forces, et d'autre part, l'expression de la loi de la dynamique de Newton qui dit que la force c'est la masse fois l'accélération. Il y a les deux dans cette équation a égal g, c'est très très loin d'une identité.

Notes

Summary

2m 18s

Equation du mouvement pour la pesanteur



Cinématique

$$a_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \ddot{z}$$

Dynamique

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = -mg$$

Mécanique | 2013 18

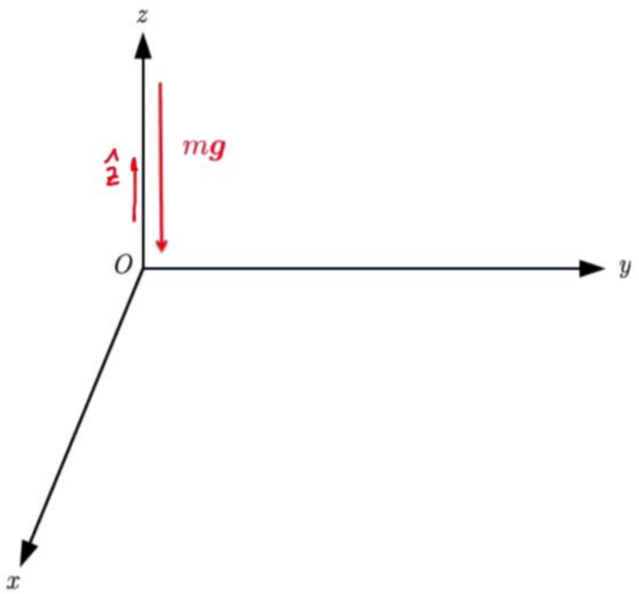
Passons maintenant au travail habituel d'analyse d'un système physique par lequel nous faisons des projections. Alors je suppose que je me suis donné un référentiel, je matérialise ce référentiel par un système d'axes cartésiens, et je choisis de mettre l'axe z selon la verticale vers le haut et donc ma force mg est dirigée selon z, vers le bas. Si j'utilise les coordonnées cartésiennes d'un système d'axes qui appartient au référentiel, mon accélération, ma cinématique, est très facile à exprimer; l'accélération, on prend simplement les dérivées deuxièmes par rapport au temps des trois coordonnées, et mes équations du mouvement, les équation différentielles que je tire en appliquant f égal ma sont les suivantes : on a, m fois l'accélération dans la direction x qui est nulle, qui vaut la force dans cette direction-là, elle est nulle parce que on a mis Oz le long de g. Donc, dans la direction x, on a 0 pour la force, y0 dans la direction z on a moins mg, encore une fois, si on veut raisonner en termes de projections, on peut définir un vecteur z chapeau, dans le sens de l'axe, le produit z fois g fera intervenir donc, le produit scalaire de z fois g, fait intervenir le cosinus de l'angle entre les deux, et le cosinus de l'angle entre les deux, enfin l'angle entre les deux c'est pi, donc le cosinus vaut moins 1.

Notes

Summary

4m 04s

Equation du mouvement pour la pesanteur



Cinématique

$$a_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \ddot{z}$$

Dynamique

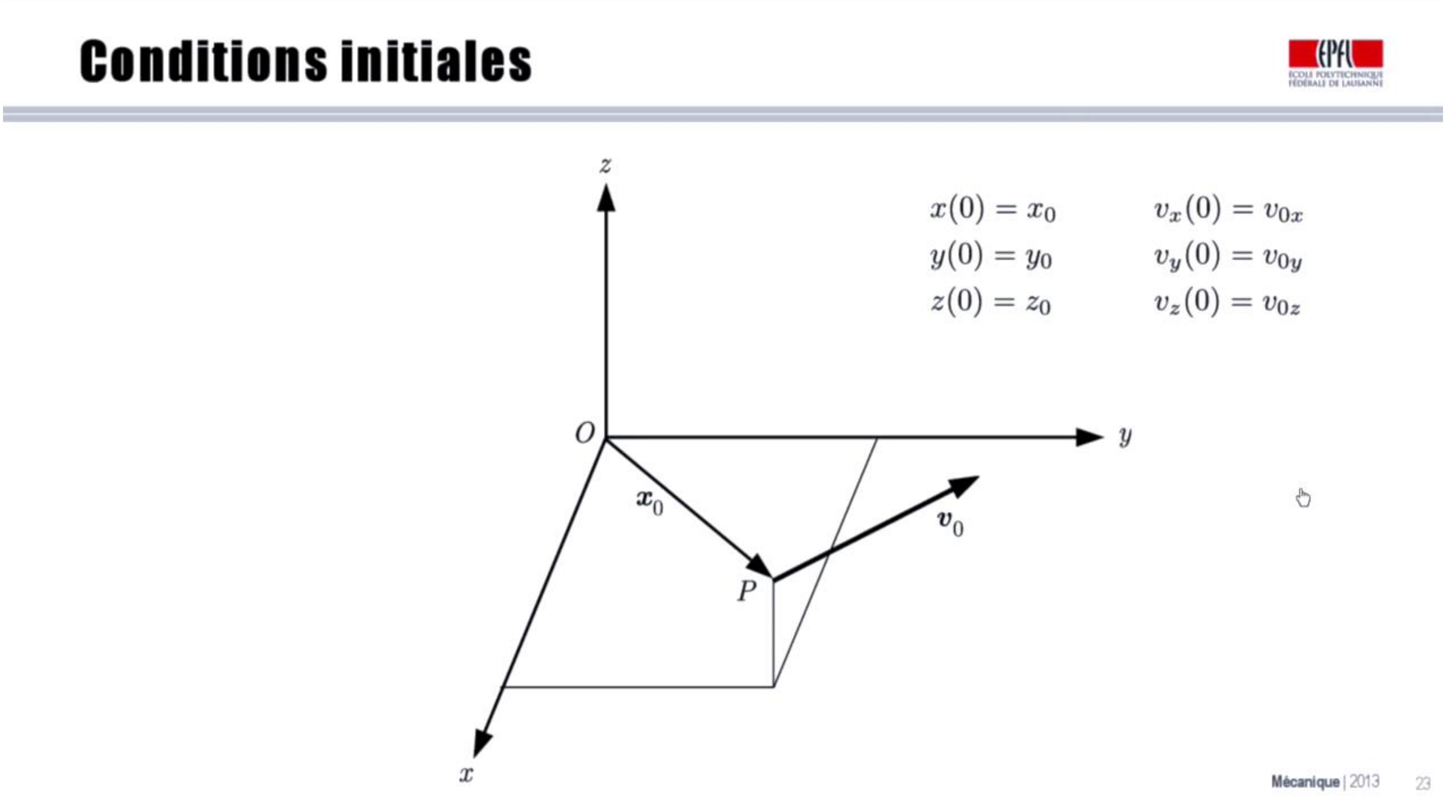
$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = -mg$$

C'est ce moins 1 qu'on retrouve ici. Voilà, j'ai ici mes équations du mouvement, mes équations différentielles qui régissent le mouvement de ma masse m dans le champ de la pesanteur. Essayons maintenant de les intégrer.

Notes

Summary

5m 52s

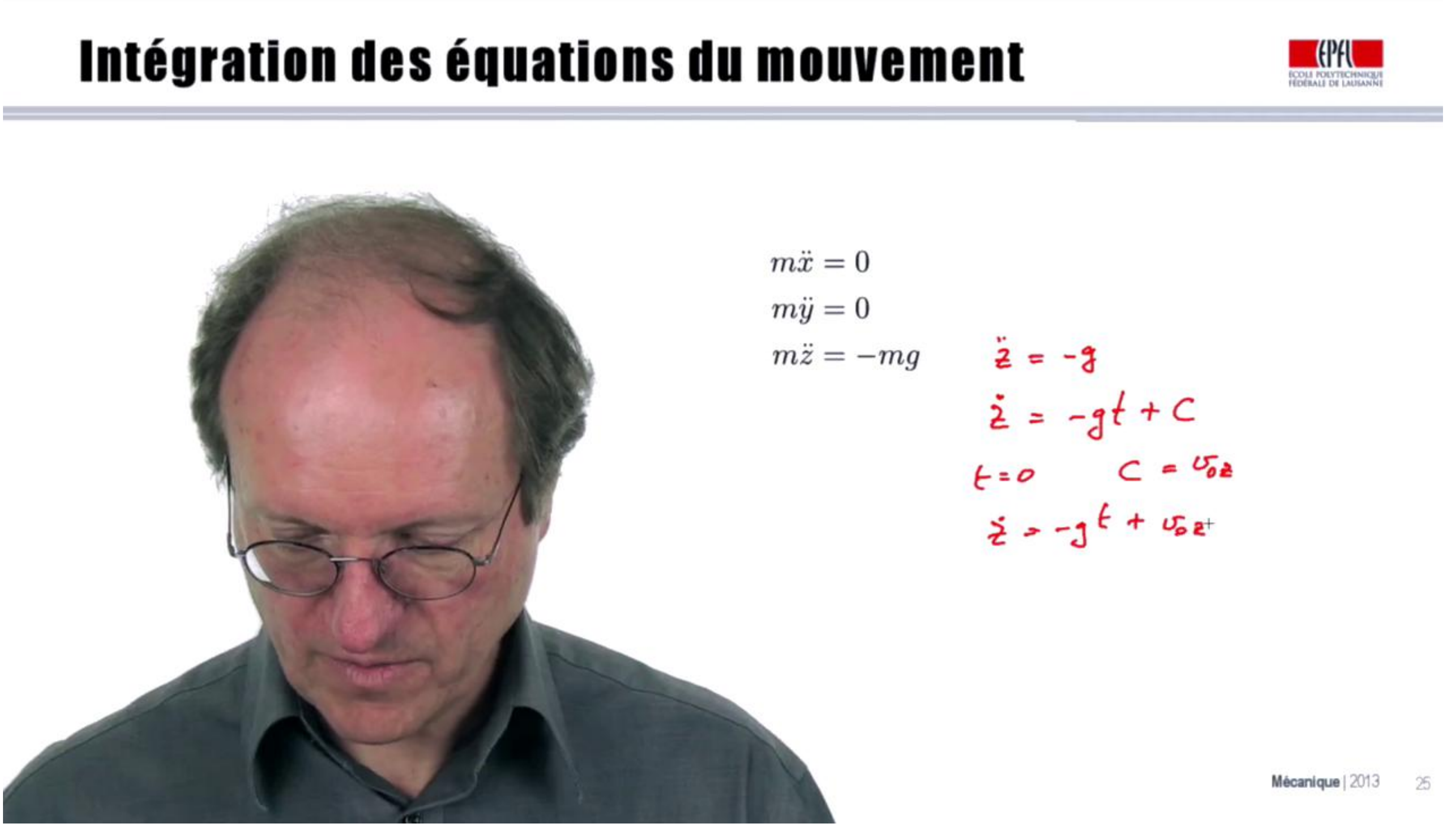


Alors on l'a vu, quand on a fait le mouvement rectiligne uniforme et le rectiligne uniformément accéléré, dans l'intégration, on va se retrouver avec des constantes, ces constantes sont en général déterminées par des conditions initiales, commençons par exprimer ces conditions initiales. Alors, d'abord j'imagine qu'à t égal 0, mon point matériel est quelque part dans mon système d'axes, et, de plus j'ai une vitesse donnée à t égal 0, qui est n'importe comment. Alors, je dis que x y z, à t égal 0, ont ces valeurs-là, que j'ai notées x(0), y(0), z(0) et je fais la même chose pour la vitesse, la vitesse dans la direction x, y, z au temps 0, a des valeurs v0x, v0y, v0z. Attention à la notation, ici il y a deux indices.

Notes

Summary

6m 09s



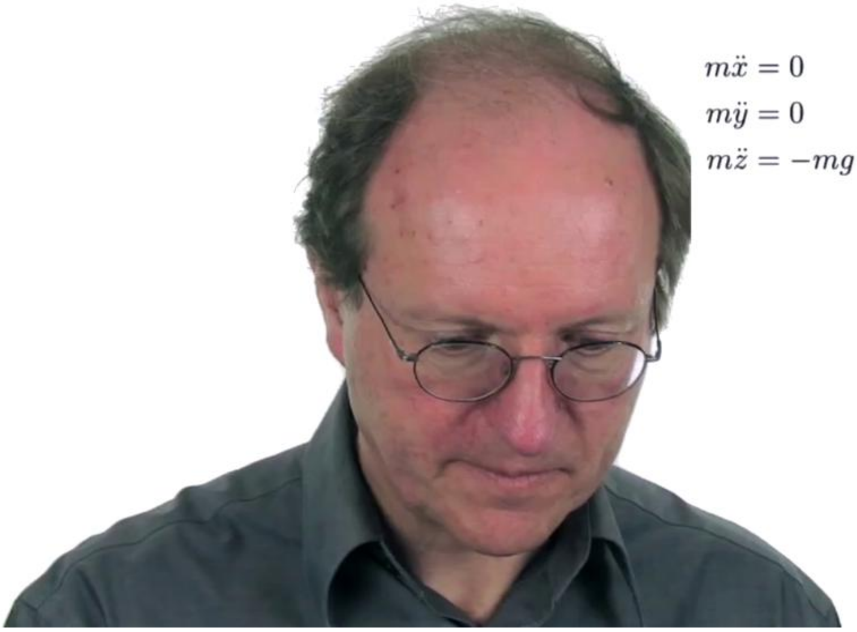
Voici les équations du mouvement, je les réécris ici, regardons-les les unes après les autres. Celle-ci, nous dit que la dérivée deuxième de ma fonction est nulle, donc la dérivée première doit être une constante. Que vaut cette constante? Cette constante, elle doit valoir la valeur de la vitesse initiale, donc v0x, on intègre encore une fois, alors là je ne peux pas me permettre cette imprécision, je dois bien clairement écrire 1 en indice v 0 x, j'intègre encore une fois, j'ai x fonction du t, du temps, qui vaut v0x, encore une fois, v0x, fois le temps, plus une constante que je pourrais appeler d, et on sait que à t égal 0, x vaut x 0, donc j'ai x 0 qui vaut d, en résumé, x vaut v0x fois t, plus x 0. Dans la direction y, je vais faire un calcul parfaitement analogue, et dans la direction z, les choses sont un peu différentes, on a maintenant z point point, qui vaut moins g, j'intègre une fois z point vaut moins g t, plus une constante, encore une fois, je vais l'appeler C, qu'est-ce qu'on sait de z point? C'est qu'à t égal 0, quand t égal 0, ceci vaut C, mais z point vaut v 0 z. Donc, j'ai z point égal moins g t, plus v0z.

Notes

Summary

7m 12s

Intégration des équations du mouvement



$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = -mg$$

$$\ddot{z} = -g$$
$$\dot{z} = -gt + C$$
$$t = 0 \qquad C = v_{0z}$$
$$\dot{z} = -gt + v_{0z}$$
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + D$$
$$z(0) = z_0 = D$$
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0$$

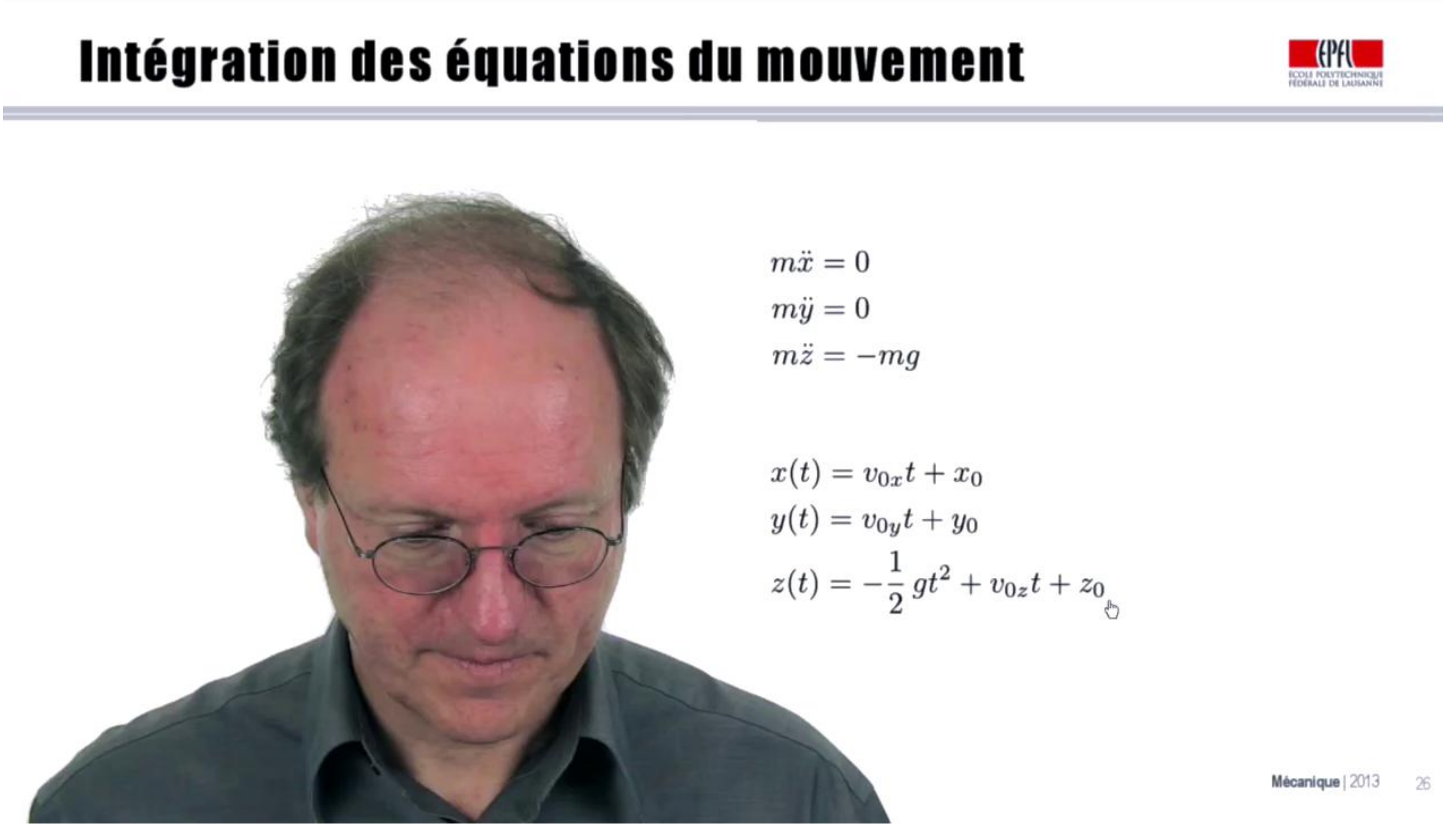
Mécanique | 2013 25

J'intègre encore une fois, z, vaut moins une demie g t carré, en effet, si je dérive z par rapport au temps, ici j'aurais moins g t. C'est ce terme-là, et il y a v0z, t; plus une constante. À t égal 0 on a z 0, on a dit que ça valait z 0, et si je mets t égal 0 dans cette expression-là, en dessus, il me reste plus que d. À la fin du compte, j'ai z qui vaut moins une demie g t carré, plus v0z, t, plus z z.

Notes

Summary

9m 25s



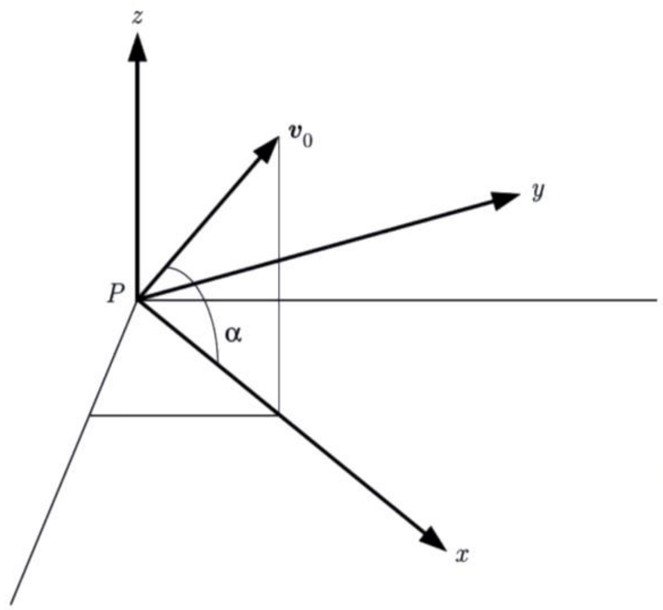
Voilà, je peux effacer tout ça, et j'écris toutes les solutions proprement, les voilà; avec, v0x, v0y, v0z, qui sont donnés par la vitesse à t égal 0; x0, y0, z0, la position à t égal 0.

Notes

Summary

10m 14s

Trajectoire



$$x(0) = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$z(0) = 0$$

$$v_x(0) = v_{0x}$$
$$v_y(0) = 0$$
$$v_z(0) = v_{0z}$$

$$x(t) = v_{0x}t$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$$

On pourrait maintenant se demander que vaut la, quelle est la trajectoire? Alors, pour calculer la trajectoire, je, j'anticipe un petit peu sur les calculs, et les faisant, j'ai réalisé que, on pouvait un petit peu simplifier la notation. Je redéfinis mon système d'axes, pourquoi je vous fais passer à travers cet exercice? C'est pour vous rappeler de façon claire et évidente que les axes, sont donnés par vous. C'est vous qui choisissez quel système de coordonnées vous allez prendre. Alors regardez, pour simplifier les expressions, je commence par dire que à t égal 0, mon point matériel, est à l'origine, à t égal 0, il est à l'origine de mes axes. Et je choisis mes axes, ici x, y, z, de manière à ce que la vitesse initiale v 0, soit dans le plan qui contient x, et z, c'est mon choix. Comme j'ai choisi de prendre l'origine de mes axes de coordonnées à la position point p à t égal 0, j'ai à t égal 0 les trois coordonnées qui sont nulles, et pour la vitesse, comme j'ai imposé x et z dans le plan qui contient v, j'ai une composante de la vitesse à t égal 0 dans la direction x, une composante dans la direction z, mais pas dans la direction y. Mes équations du mouvement deviennent alors comme ceci, où il y a toute une série de constantes qui ont disparu.

Notes

Summary

10m 39s

Trajectoire

$$x(t) = v_{0x} t \qquad t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t$$

Mécanique | 2013 33

Pour calculer la trajectoire, je dois éliminer le temps, on a appelé équation horaire, l'équation qui nous dit où se trouve notre point matériel en fonction du temps, la trajectoire, c'est seulement le lieu géométrique des points, il n'y a plus de temps, alors, je peux de cette équation-là, tirer t qui vaut x sur v 0, x et je mets cette expression de t ici, et là, pour obtenir z en fonction de x. Voilà, vous avez maitnenant une expression z en fonction de x, il n'y a plus le temps, on a une courbe dans le plan z x, si vous voulez on a une fonction z x et cette fonction-là, c'est une parabole.

Notes

Summary

12m 37s

Trajectoire

$$x(t) = v_{0x} t$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t$$

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + v_{0z} \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)$$

Notes

Summary

13m 13s