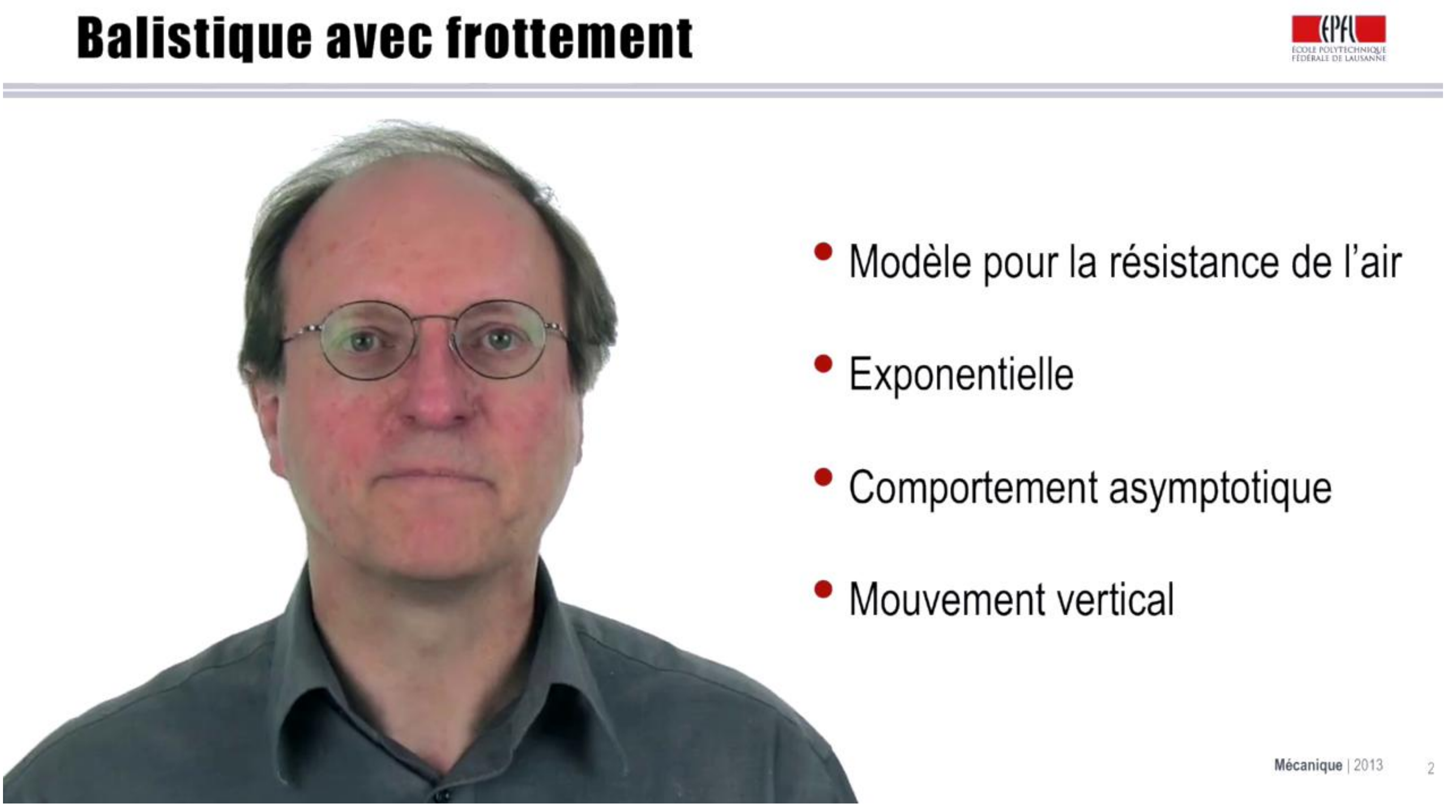
Balistique avec frottement

Mécanique, cours 4.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-4

Video



Guten Tag und willkommen zur Vorlesung "Allgemeine Physik" an der EPFL. In diesem Modul möchte ich mein Ballistik- model perfektionieren. Ich möchte gerne eine Reibungs- kraft hinzufügen. Wir haben vor kurzem die Komposition von Kräften betrachtet. Hier werden erstmals auf eine Anwendung dieser treffen. Das gewählte Model der Reibungskraft wird zu Differentialgleichungen führen, welche ein exponentielles Verhalten implizieren. Ein in der Physik häufig angetroffenes Verhalten. Ich werde euch auch zeigen wie man eine qualitative Analyse des durch eine Differentialgleichung implizierten Verhaltens machen kann. Am Ende werden wir die Integration der vertikalen Bewegung betrachten. Dies wird ein bisschen schwieriger als was wir bis jetzt machen mussten.

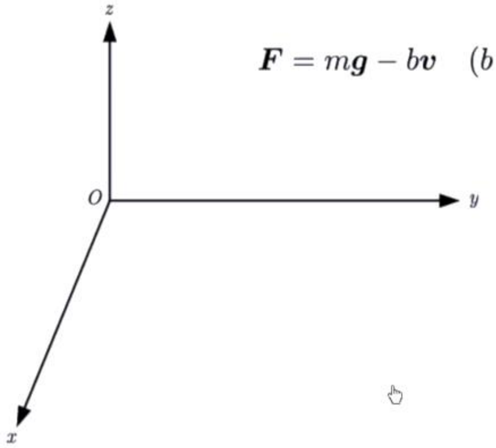
Notes

Summary

0m 03s

Modèle de force

- Pesanteur suffisamment bon ?
- Effet du frottement de l'air, modèle de force proportionnelle à la vitesse



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - b\boldsymbol{v} \quad (b > 0)$$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -b\dot{y}$$
$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}$$

Also für die Modellierung der Kraft. Bis anhin habe ich nur die Gewichtskraft betrachtet. Mit dem Model der Schwerkraft prognostiziert man eine uniforme vertikale Beschleunigung, wodurch die Geschwindigkeit bis in die Unendlichkeit anwachsen kann. Es ist naheliegend, dass dies kein realistisches Model ist. Deswegen werden wir nach einer besseren Modellierung des freien Falls in der Luft suchen. Um eine Differentialgleichung zu finden, welche ich integrieren kann, schlage ich vor eine Kraft zu betrachten welche proportionnel zu der Geschwindigkeit und logischerweise der Bewegung, respektive der Geschwindigkeit, entgegengesetzt ist. Mein Model der Reibungskraft sieht folgendermassen aus: Ich habe zwei Kräfte, die Gewichtskraft und eine Kraft proportionnel und entgegengesetzt der Geschwindigkeit. Ich nehme b positiv und schreibe minus bv um zu unterstreichen, dass die Kraft sich der Bewegung entgegensetzt. Ich nehme ein Koordinatensystem. Noch einmal werde beschreibt die Z-Achse die Vertikale. Die Bewegungsgleichungen erhalte ich unverzüglich. Ich kann die ganze Arbeit, welche gemacht wurde beim Beschreiben der Ballistik ohne Reibung, wiederverwenden.

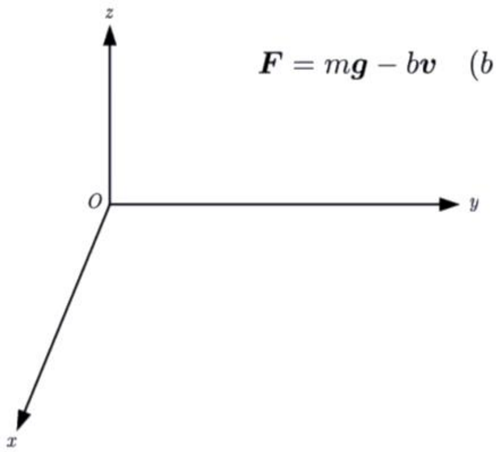
Notes

Summary

0m 58s

Modèle de force

- Pesanteur suffisamment bon ?
- Effet du frottement de l'air, modèle de force proportionnelle à la vitesse



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - b\boldsymbol{v} \quad (b > 0)$$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -b\dot{y}$$
$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}$$

Mécanique | 2013 8

Im Speziellen kann ich das Resultat betreffend der Cinematik in kartesischen Koordinaten übernehmen. Ich habe nun hier die Masse multipliziert mit der in kartesischen Koordinaten aus- gedrückten Beschleunigung. Ich habe die Gewichtskraft, welche ich auf die Z-Achse projizieren muss, was minus mg ergibt. Zum Schluss betrachte ich die Reibungskraft. Die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten drückt sich als x Punkt, y Punkt, z Punkt aus. Also habe ich ma gleich f und hier muss ich alle Kräfte einsetzen. Hier erkennt ihr die X-,Y- und Z- Komponente der Reibungskraft. Ich habe nun eine Differential-gleichung der folgenden Form.

Notes

Summary

2m 27s

Exponentielle

Equation du mouvement : $\ddot{x} = -\frac{b}{m}\,\dot{x}$

Changement de variable : $\dot{x} = v$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m}\,v$$

Notation : $\tau = \frac{m}{b}$ $\qquad \dot{v} = -\frac{1}{\tau}\,v$

Sie sagt mir, dass die zweite Ableitung von x nach der Zeit proportional zur ersten Ableitung von x nach der Zeit ist. Ich mache eine Substitution, nenne x Punkt v. Ich habe nun v Punkt gleich minus b durch m mal v. Ich ändere meine Notation. Ich schlage vor diesem Koeffizienten einen expliziteren Namen zu geben. Dies ist eine Praktik, welche ich euch empfehle und sehr nützlich ist um den physikalischen Sinn des Resultats zu bewahren. Also, hier habe ich v und hier habe ich v Punkt. v Punkt ist eine Geschwindigkeit dividiert durch eine Zeit. Hier habe ich eine Geschwindigkeit. Also muss dies eins dividiert durch eine Zeit sein. b durch m besitzt die Einheit eins durch eine Zeit. Ich schlage euch vor m durch b tau, ein griechischer Buchstabe, zu nennen. Dadurch schreibt sich meine Differentialgleichung als v Punkt gleich eins durch tau mal v, wobei tau, welches hier ausgedrückt ist, eine Konstante darstellt. Also suche ich eine Funktion v von t, wessen Ableitung fast v entspricht, v mit einem Koeffizient davor. Welches ist die Funktion, wessen Ableitung der Funktion selbst entspricht? Dies ist die Exponentialfunktion.

Notes

Summary

3m 21s

Exponentielle

Equation du mouvement : $\ddot{x} = -\frac{b}{m}\,\dot{x}$

Changement de variable : $\dot{x} = v$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m}\,v$$

Notation : $\tau = \frac{m}{b}$ $\qquad \dot{v} = -\frac{1}{\tau}\,v$

$$v(t) = \dot{x}(0)\exp(-t/\tau)$$

Mécanique | 2013 14

Also muss ich schreiben: v von t gleich eine bestimmte Konstante, ich werde bald erläutern weshalb ich diese als x Punkt von null bezeichnet habe. v von t entspricht einer Konstanten multipliziert mit einer Exponentialfunktion. Die zeitliche Ableitung der Funktion v von t entspricht einer Ableitung einer zusammen- gesetzten Funktion. Diese Ableitung ergibt minus eins durch tau mal die Exponential- funktion mit dem davorstehenden Koeffizienten. Also hätten wir diese Eigenschaft hier. Also was entspricht v zur Zeit t gleich 0? Die Exponentialfunktion erbit 1. Übrig bleibt x Punkt von 0. Also dieser Koeffizient hier entspricht der Geschwindigkeit zur Zeit t gleich 0. Ich könne ihn auch als v0 bezeichnen. Heute habe entschieden ihn als x Punkt von 0 zu bezeichnen.

Notes

Summary

4m 54s

Exponentielle

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(0)\exp(-t/\tau)$$

$$\text{Intégration : } x(t) = -\dot{x}(0)\tau\exp\left(-t/\tau\right) + A$$

$$\text{Condition initiale : } x(0) = -\dot{x}(0)\tau + A = 0$$

$$x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Mécanique | 2013 18

Ich bin noch nicht fertig. Ich habe v, was ich als dx durch dt schreiben kann. Ich habe nun dx durch dt, was dieser Funktion hier entspricht und ich suche die Funktion x von t, so dass ich, wenn ich diese Ableite, diesen Ausdruck erhalte. Man sieht, dass x von t auch einer Exponentialfunktion entsprechen muss. Wir müssen den Koeffizient betrachten. Wenn ich diese Exponentialfunktion ableite, erhalte ich minus eins durch tau. Deswegen habe ich ein Minus hier gesetzt um das Minus, welches durch die Ableitung erhalten wird, zu annullieren. Des Weiteren erhalte ich ein eins durch tau hier. Ich habe ein tau hier gesetzt, weil wenn ich nach der Zeit ableite, erhalte ich ein eins durch tau, welches sich mit diesem hier annulliert. Ich habe nun x Punkt. Ich habe eine Konstante hinzugefügt, wessen Ableitung null ist und wenn ich x nach der Zeit ableite, erhalte ich mein v von t hier. Wenn ich nun annehme, dass zur Zeit gleich 0 die Masse im Koordinatenursprung ist, sehe ich, dass A x Punkt 0 mal tau entspricht. Wenn ich den gefundenen Ausdruck für A in die Funktion x von t einsetze, bekommt diese x Punkt zur Zeit t gleich null, die Anfangsgeschwindigkeit in der X-Richtung, mal tau. Und ich habe hier einen Koeffizienten eins minus e hoch minus t durch tau.

Notes

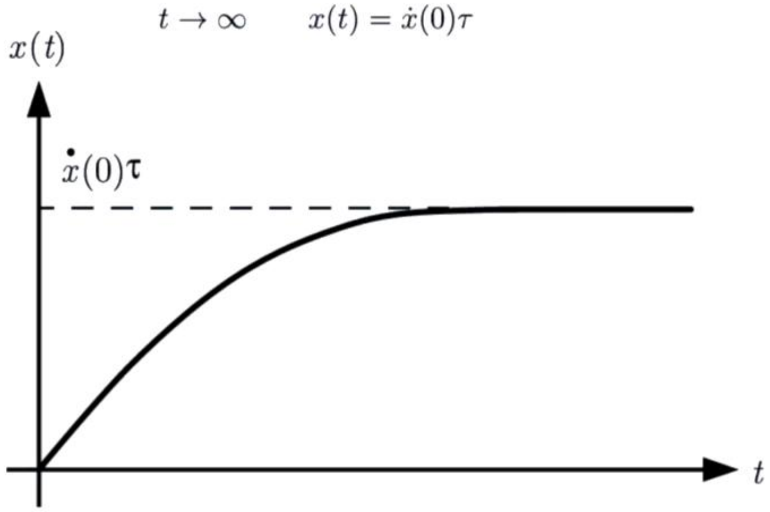
Summary

5m 53s

Exponentielle

$$x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$t \to \infty \qquad x(t) = \dot{x}(0)\tau$$



$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + \frac{df}{dt}\Delta t$$

$$x(0 + t) \approx x(0) + \frac{df}{dt}t$$

Ich schlage nun vor einen Graphen zu konstruieren, welcher diese hier Funktion darstellt. Voilà. Wie habe ich diesen Graphen konstruiert? Ich stelle fest, dass wenn t gegen unendlich tendiert, respektive t sehr gross ist, diese Funktion hier sich gegen null annähert. Es bleibt also x Punkt zur Zeit 0 mal tau übrig, was ich so aufschreiben kann. Ich habe also für sehr sehr grosse t eine Asymptote bei x Punkt zur Zeit null mal tau. Nun was geschieht wenn t klein ist? Um dies zu beantworten werden wir die Taylor-Entwicklung verwenden. Ich erinnere euch an die Schreibweise df durch dt entspricht ungefähr, ungefähr da ich nicht dt gegen null tendieren lasse, f von t plus dt minus f von t geteilt durch dt. Wenn ich den Limes von dt gegen null genommen hätte, wäre dies die Definition der Ableitung. Also hier schreibe ich annäherungsweise und ich habe f von t plus ein endlich delta t, welches ungefähr f von t plus die Ableitung, dieser Term hier, mal delta t entspricht. Verwenden wir diese Regel für diese Funktion hier. Ich möchte eine Taylor-Entwicklung in dieser Region hier. Also starte ich im Punkt null und habe ein kleines t. x im Punkt 0 plus ein kleines t ist x im Punkt 0 plus die Ableitung meiner Funktion zur Zeit t gleich null mal t.

Notes

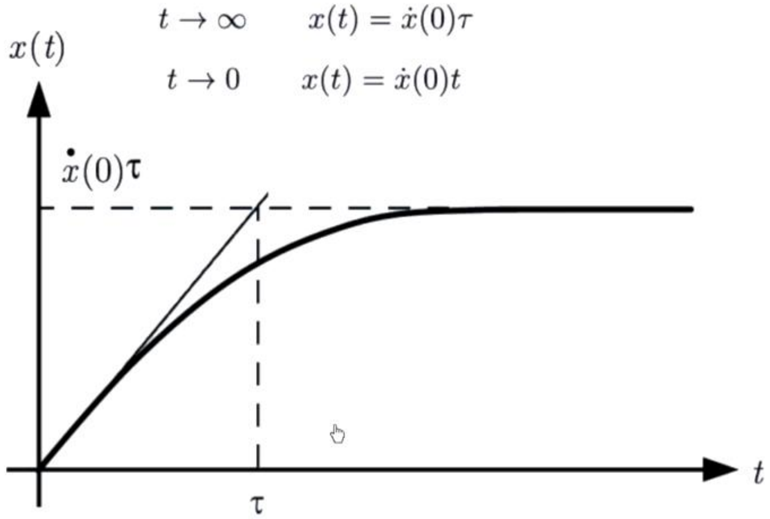
Summary

7m 32s

$$x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$t \to \infty \qquad x(t) = \dot{x}(0)\tau$

$t \to 0 \qquad x(t) = \dot{x}(0)t$



$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + \frac{df}{dt}\Delta t$$

$$x(0+t) \approx x(0) + \frac{df}{dt}t$$

Mécanique | 2013 27

Also wir müssen nur noch die Ableitung dieser Funktion berechnen. Die Ableitung dieser Funktion zur Zeit t gleich null entsptricht x Punkt zur Zeit null. Diese Berechnungen lasse ich euch in aller Ruhe machen. Vergesst nicht, dass wir den Wert zur Zeit t gleich null suchen. Also est bleibt nur x Punkt zur Zeit t gleich null mal t, was ich bereits hier geschrieben habe. Also ich bin gerade dabei zu sagen, dass, wenn t sehr klein ist, wir ein Lineares Verhalten vorfinden, welches dieser Asymptoten hier entspricht. Ihr stellt fest, dass sich diese beiden Annäherungen bei t gleich tau kreuzen. Also wenn dies das Verhalten dieser Exponentialfunktion ist, könnt ihr diese beiden Asymptoten, respektive Tangenten zeichnen, und dies ergibt euch die Zeit tau. Ich erinnere euch daran, dass diese Zeit tau hier durch b und m definiert ist.

Notes

Summary

9m 26s

Comportement asymptotique

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

Physiquement :

- v augmente sous l'effet de g
- plus v est grand, plus le frottement augmente
- il existe une vitesse limite

$$\ddot{z} = 0 \implies \dot{z}|_{limite} = -g\tau$$

Mécanique | 2013 34

Ich betrachte nun das Verhalten meiner Lösung oder, wenn ihr möchtet, das Verhalten meines Models in der Z-Richtung. Hier ist die Bewegungsgleichung, welche wir in der Z-Richtung erhalten haben. Was sagt diese Gleichung aus? Durch den Effekt von g ist die Beschleunigung konstant, wenn man die Geschwindigkeit vernachlässigen kann. Jedoch bedeutet eine Beschleunigung eine Erhöhung der Geschwindigkeit, wenn auch im Negativen. Wir haben ein Objekt im freien Fall, also erhöht sich seine Geschwindigkeit. Je grösser die Geschwindigkeit, desto grösser ist die vorhandene Reibungskraft. Dadurch erhalten wir ein Verhalten, welches eine Asymptote besitzt. Ich fasse die Situation zusammen: Die Geschwindigkeit v erhöht sich durch den Effekt von g. Aber wenn sich die die Geschwindigkeit erhöht, wächst auch die Reibungskraft an. Dies führt zu einem Limit, wo z Punkt Punkt null ist. Die Beschleunigung annulliert sich in dem Moment, wo sich diese beiden Terme gegenseitig aufheben. Also existiert eine Grenzgeschwindigkeit, welche g mal tau entspricht. Sie ist negativ, da ich das Koordinatensytem mit der z-Achse nach oben gerichtet gewählt habe.

Notes

Summary

10m 36s

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

$$\text{Changement de variable : } a = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \rightarrow \ddot{z} = -\tau\dot{a} = a$$

$$\rightarrow a = C\,e^{-t/\tau} \rightarrow \dot{z} = -\tau g - \tau C\,e^{-t/\tau}$$

$$\rightarrow z = -\tau g t + D + \tau^2 C\,e^{-t/\tau}$$

Wir können nun versuchen nicht nur das Verhalten qualitativ zu betrachten, sondern wirklich die Bewegungsgleichungen zu integrieren. Also hier ist die Bewegungsgleichung. Ich schlage euch vor eine Substitution zu machen. Den ganzen Term hier nenne ich a. Also habe ich a, welches minus g minus eins durch tau mal z Punkt entspricht. Ich stelle fest, dass wenn ich diesen Ausdruck nach der Zeit ableite erhalte ich a Punkt. Die Ableitung dieses Terms ist null. Hier habe ich minus eins durch tau mal z Punkt Punkt. Also meine Substitution impliziert, dass z Punkt Punkt minus tau mal a entspricht. Jedoch entspricht a auch diesem Term. Also haben wir wegen der anfänglichen. Differentialgleichung auch z Punkt Punkt gleich a. Also finden wir wieder eine Gleichung der Form: a Punkt gleich minus eins durch tau mal a. Dies impliziert eine Lösung in der Form einer Exponentialfunktion. Ich gebe euch die Lösung: a gleich eine bestimmte Konstante mal e hoch minus t durch tau. Ich substituiere diese Lösung in die Definition von a um z Punkt zu erhalten. Z Punkt entspricht minus g mal tau minus a mal tau, respektive minus tau mal C mal die Exponentialfunktion. Ich integriere noch einmal.

Notes

Summary

12m 04s

Mouvement vertical

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

$$\text{Changement de variable : } a = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \rightarrow \ddot{z} = -\tau\dot{a} = a$$

$$\rightarrow a = C\,e^{-t/\tau} \rightarrow \dot{z} = -\tau g - \tau C\,e^{-t/\tau}$$

$$\rightarrow z = -\tau g t + D + \tau^2 C\,e^{-t/\tau}$$

$$\text{Conditions initiales : } z = \dot{z} = 0 \text{ à } t = 0 \implies C = -g \text{ et } D = \tau^2 g.$$

$$z = -\tau g t + \tau^2 g\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Mécanique | 2013 41

Dieser Term ist einfach zu integrieren. Ich kann mir vorstellen eine Konstante zu haben, wessen Ableitung null ist und dann muss ich diesen Term integrieren. Noch einmal, passt auf. Wenn ich die das Integral einer Exponentialfunktion ableite, erhalte ich eine Exponentialfunktion. Aber wenn ich die Exponentialfunktion ableite, erhalte ich ein minus eins durch tau. Also muss ich mit minus tau multiplizieren. Also tauch zusätzlich ein tau im Quadrat auf. Ich empfehle euch dies in aller Ruhe zu betrachten, indem ihr eine Pause macht. Als Anfangsbedingung werde ich z zur Zeit t gleich null als null und z Punkt zur Zeit t ebenfalls gleich null setzten. Also lasse ich das Objekt vom Koordinatenursprung fallen ohne jegliche Anfangsgeschwindigkeit. Wenn ihr t gleich 0 nehmt, erhaltet ihr hier die Exponentialfunktion, welche eins ist. Hier habt ihr null. Also erhalten wir C gleich minus g. Jetzt, wenn wir die zweite Anfangsbedingung, z zur Zeit t gleich null gleich null, betrachten, habt ihr hier null. Null. Es bleibt ein D übrig hier und tau im Quadrat mal C, welches wir zuvor bestimmt haben. Wir finden D gleich tau im Quadrat mal g. Ich substituiere C und D in diese Gleichung hier. Voilà.

Notes

Summary

13m 46s

Mouvement vertical

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

$$\text{Changement de variable : } a = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \rightarrow \ddot{z} = -\tau\dot{a} = a$$

$$\rightarrow a = C\,e^{-t/\tau} \rightarrow \dot{z} = -\tau g - \tau C\,e^{-t/\tau}$$

$$\rightarrow z = -\tau g t + D + \tau^2 C\,e^{-t/\tau}$$

$$\text{Conditions initiales : } z = \dot{z} = 0 \text{ à } t = 0 \implies C = -g \text{ et } D = \tau^2 g.$$

$$z = -\tau g t + \tau^2 g\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Mécanique | 2013 41

Ich finde: z gleich minus tau g mal t plus disen term hier. Dieser Term hier tendiert gegen null, wenn t gegen unendlich tendiert. Übrig bleibt das asymptotische Verhalten, welches wir zuvor gefunden haben.

Notes

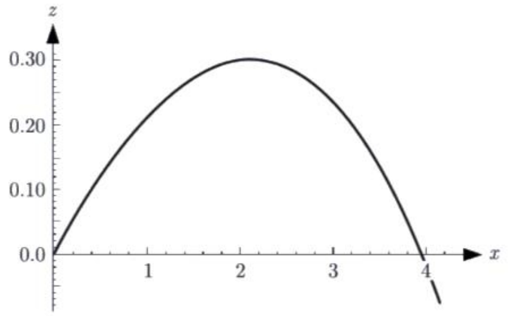
Summary

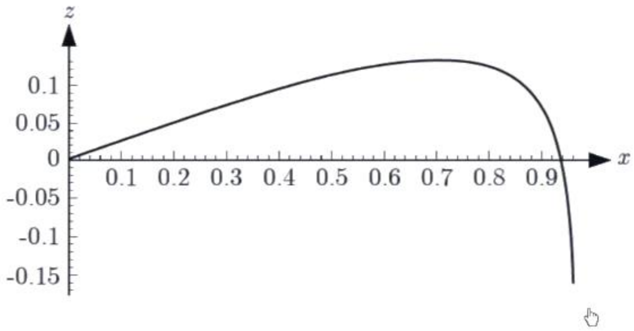
15m 12s

Trajectoire avec frottement

$$x = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$z = -\tau g t + \left(\tau^2 g + \tau \dot{z}(0)\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$





Mécanique | 2013 45

Zum Schluss schlage ich euch vor die Vorhersagen für die Flugbahn zu untersuchen. Ich übernehme unsere Lösung z von t, welche ich jedoch leicht modifiziert habe. Ich habe die Möglichkeit einer Anfangsgeschwindigkeit hinzugefügt. Ich erinnere euch an das Resultat für x und ich untersuche jetzt zwei Extremfälle. Wenn man nur wenig Reibung hat, erhält man das. Wenn ihr sehr genau hinsieht, erkennt ihr, dass eine Leichte leichte Deformation gegenüber der Parabel vorhanden ist. Im Gegensatz, wenn starke Reibung vorhanden ist, erhalte ich dies. Es wird absolut klar, dass nach einer gewissen Zeit eine Asymptote in der X-Richtung erreicht ist, wie wir sie gesehen haben. Das Objekt geht nicht weiter als x Punkt zur Zeit null mal tau. In der Z-Richtung, wenn einmal die Asymptote erreicht ist, bewegt sich das Objekt mit einer konstanten Grenzgeschwindigkeit fort. Also, das Einführen einer Reibungskraft hat das Verhalten des Objekts radikal geändert.

Notes

Summary

15m 29s