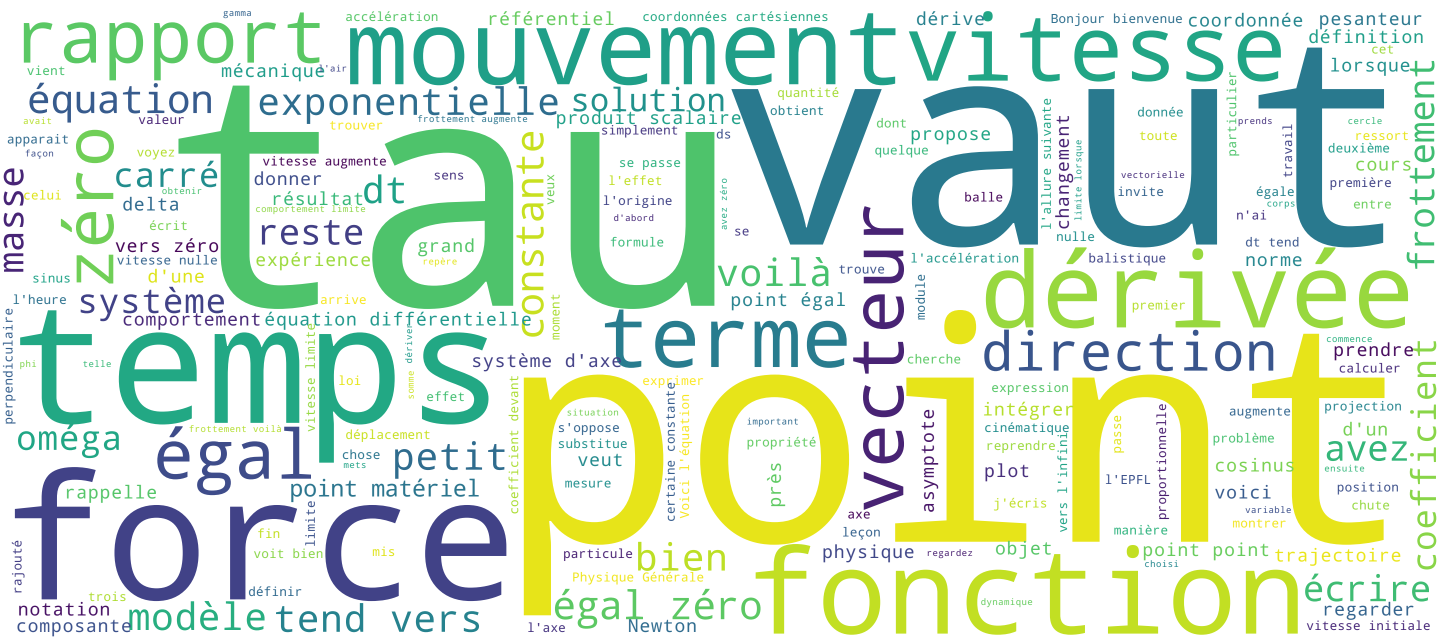
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-4

Balistique avec frottement

Mécanique, cours 4.2

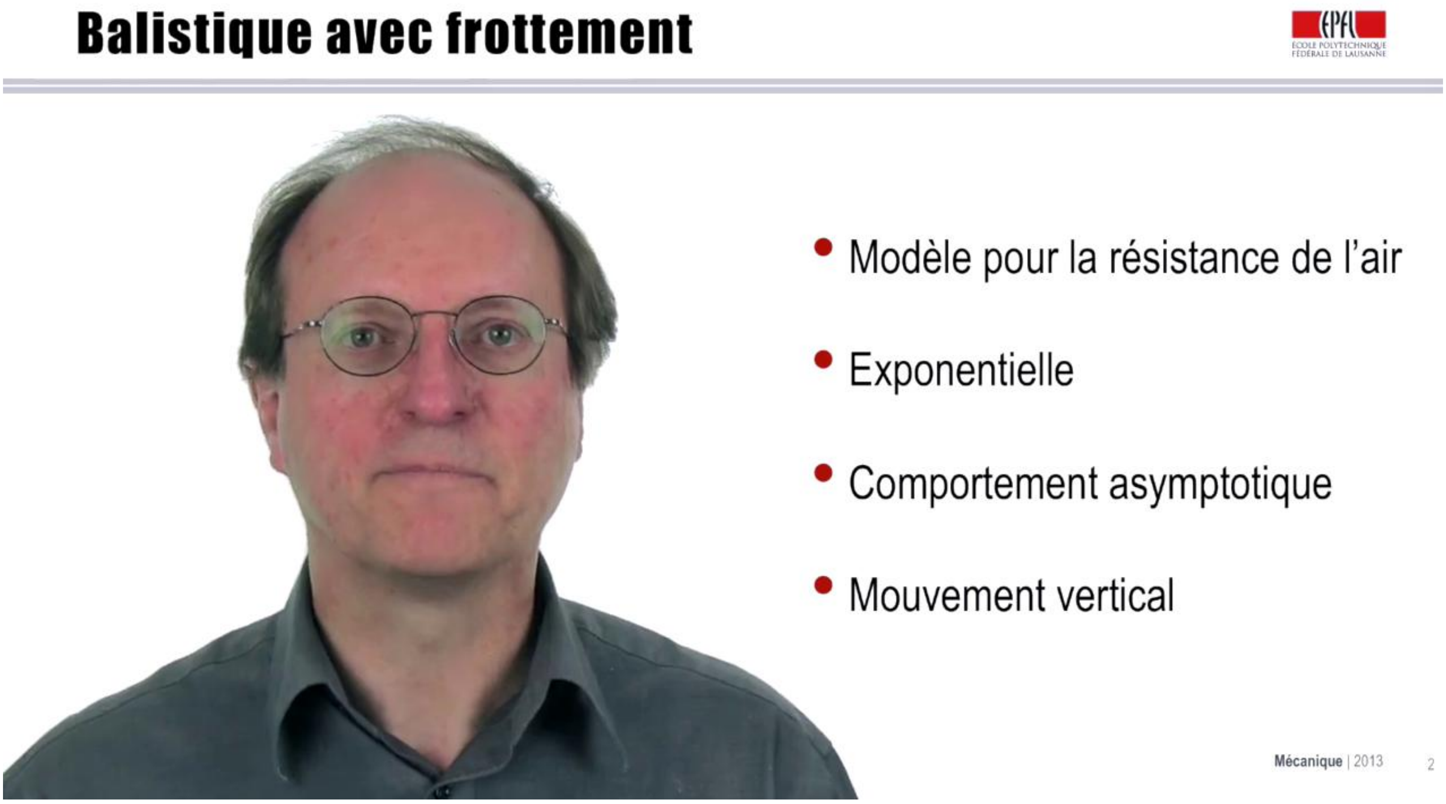
Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL



Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Dans ce module j'aimerais perfectionner mon modèle de balistique. J'aimerais rajouter une force de frottement. On vient de voir comment gérer la composition des forces et en voici une première application. Je vais choisir un modèle de force qui doit donner lieu à une équation différentielle prédisant un comportement exponentiel, c'est un comportement qu'on retrouve souvent en physique. Je vais aussi vous montrer comment on peut conduire une analyse qualitative du comportement prédit par une équation différentielle et à la fin on regardera l'intégration des mouvements dans la direction verticale ce sera un travail un peu plus lourd que ce qu'on a du faire jusqu'à maintenant.

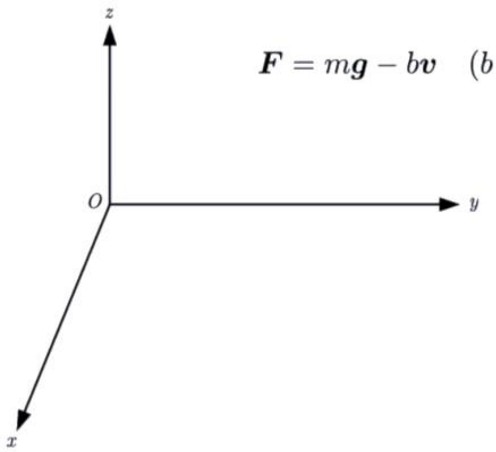
Notes

Summary

0m 03s

Modèle de force

- Pesanteur suffisamment bon ?
- Effet du frottement de l'air, modèle de force proportionnelle à la vitesse



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - b\boldsymbol{v} \quad (b > 0)$$

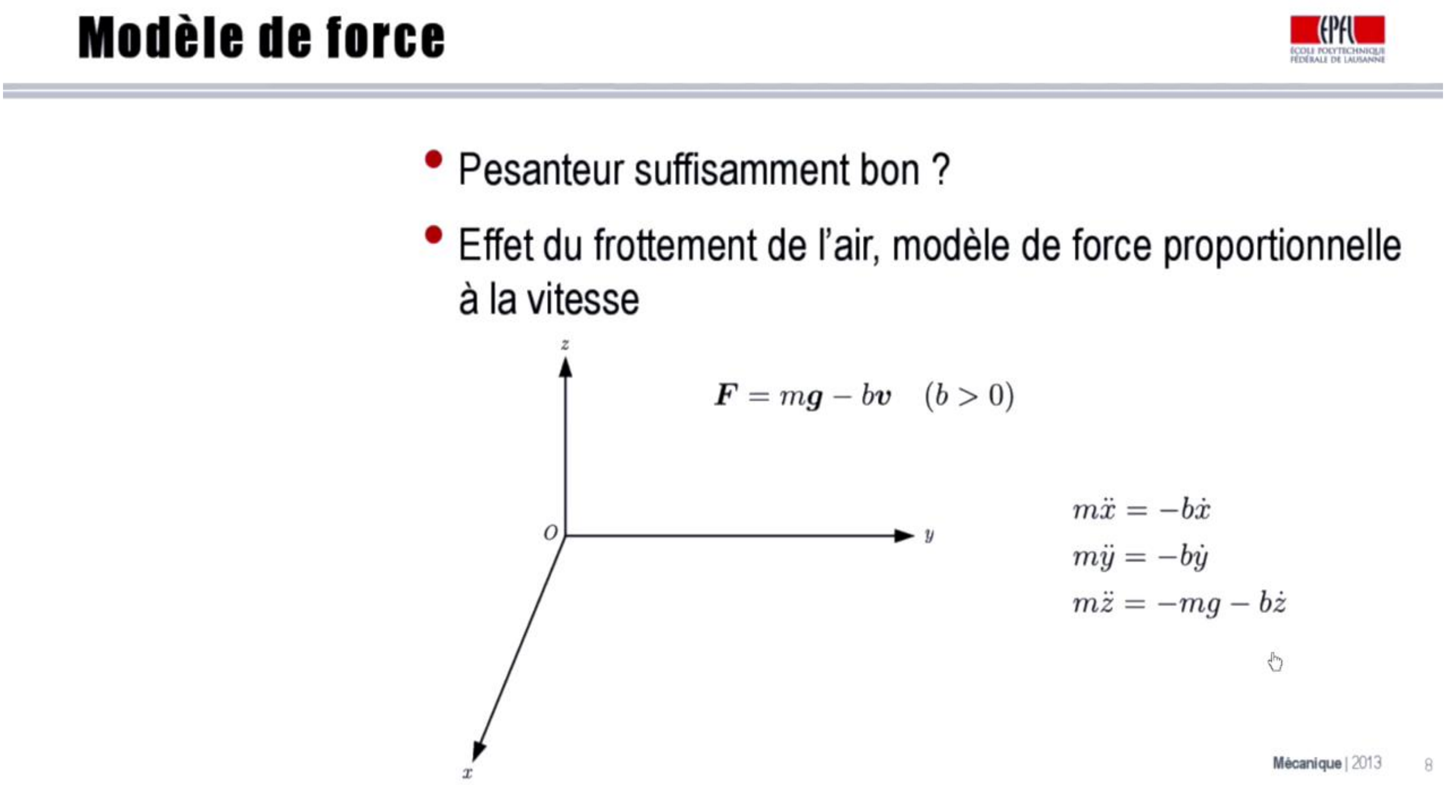
$$m\ddot{x} = -b\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -b\dot{y}$$
$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}$$

Alors pour mon modèle de force, jusqu'à maintenant je me suis donné la pesanteur. Avec le modèle de la pesanteur, on prédit une accélération verticale uniforme dont la vitesse indéfiniment augmente. On voit bien que ce n'est pas réaliste et on va chercher à faire une meilleure modélisation de la chute des corps dans l'air. Pour trouver une équation différentielle que je peux intégrer, je propose de regarder une force qui est proportionnelle à la vitesse, évidemment qui s'oppose au déplacement. Donc opposée à la vitesse. Je vais écrire que mon modèle de force a l'allure suivante : j'ai deux forces j'ai la pesanteur et une force proportionnelle à la vitesse opposée à la vitesse, je prends b positif et j'écris moins bv pour exprimer le fait que j'ai une force qui s'oppose au déplacement. Je me donne un système d'axes encore une fois je vais prendre l'axe z vertical et mes équations du mouvement je peux les obtenir immédiatement, je peux reprendre tout le travail que j'ai établi lorsque j'ai fait la balistique en l'absence de frottement, en particulier je peux reprendre le résultat sur la cinématique en coordonnées cartésiennes. J'ai donc ici la masse pour l'accélération exprimée en coordonnées cartésiennes.

Notes

Summary

0m 58s



J'ai la pesanteur c'est la force que je dois projeter sur l'axe Oz qui vaut moins mg et maintenant j'ai la force de frottement. La vitesse en coordonnées cartésiennes s'exprime simplement par x point, y point, z point donc j'ai m a égal f et ici je dois mettre toutes les forces et vous retrouvez ici la composante x de la force de frottement y et z.

Notes

Summary

2m 44s

Exponentielle

Equation du mouvement : $\ddot{x} = -\dfrac{b}{m}\,\dot{x}$

Changement de variable : $\dot{x} = v$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m}\,v$$

Notation : $\tau = \dfrac{m}{b}$ $\qquad \dot{v} = -\dfrac{1}{\tau}\,v$

Mécanique | 2013 13

J'ai donc une équation différentielle qui a l'allure suivante : elle me dit que ma dérivée deuxième de x par rapport au temps est proportionnelle à la dérivée première de x par rapport au temps. Je fais un petit changement de variable, appelons x point v j'ai donc v point égal moins b sur m fois v. Je vais faire un autre changement de notation Je veux proposer de donner un nom à ce coefficient qui est plus explicite. C'est une pratique que je recommande qui est extrêmement utile pour garder le sens physique des résultats qu'on obtient. Alors, ici j'ai v et ici j'ai v point, v point, c'est une vitesse divisée par un temps. Ici j'ai une vitesse, donc ça ça doit être un sur un temps, b sur m à l'unité de un sur un temps. Alors je vous propose d'appeler tau, la lettre grecque tau m sur b. De cette manière mon équation différentielle s'écrit v point égal moins un sur tau fois v, où tau qui est exprimé ici est une constante. Alors, je cherche une fonction v de t dont la dérivée est presque v, v avec un coefficient devant. Quelle est la fonction dont la dérivée est égale à elle-même, c'est l'exponentielle.

Notes

Summary

3m 15s

Exponentielle

Equation du mouvement : $\ddot{x} = -\dfrac{b}{m}\,\dot{x}$

Changement de variable : $\dot{x} = v$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m}\,v$$

Notation : $\tau = \dfrac{m}{b}$ $\qquad \dot{v} = -\dfrac{1}{\tau}\,v$

$$v(t) = \dot{x}(0)\exp(-t/\tau)$$

Donc je dois écrire v de t égal une certaine constante, je commente tout à l'heure pourquoi je l'ai appelé x point 0 v de t vaut une constante fois une exponentielle et si j'écris moins t sur tau alors quand, si je mets moins t sur tau, quand je dérive par rapport à t, j'ai une fonction de fonction et la dérivée va me donner un moins un sur tau fois l'exponentielle avec le coefficient devant donc j'aurais bien cette propriété là. Maintenant que vaut v au temps t égal 0? L'exponentielle vaut 1, il reste x point de 0 donc ce coefficient qui est ici vaut bien la vitesse au temps t égal 0, alors je pourrais l'appeler v0, j'ai choisi aujourd'hui de l'appeler x point de 0 Je n'ai pas terminé parce que j'ai v qui est dont dx sur dt. J'ai maintenant dx sur dt qui vaut cette fonction là et je cherche la fonction telle que lorsque, la fonction x de t telle que lorsque je la dérive, j'obtienne ceci.

Notes

Summary

4m 53s

Exponentielle

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(0)\exp(-t/\tau)$$

$$\text{Intégration :}\ x(t) = -\dot{x}(0)\tau\exp\left(-t/\tau\right) + A$$

$$\text{Condition initiale :}\ x(0) = -\dot{x}(0)\tau + A = 0$$

$$x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Mécanique | 2013 18

On voit bien que x de t doit être encore une fois une exponentielle, il faut s'assurer du coefficient quand je dérive cette exponentielle j'ai un moins un sur tau qui apparait donc j'ai mis un moins ici pour annuler le moins parce que je fais la dérivée et j'ai un un sur tau, j'ai mis un tau ici, parce que quand je vais la dériver par rapport à t j'aurais un sur tau qui va s'annuler avec celui-là. J'ai donc bien x point, j'ai rajouté une constante qui a une dérivée nulle et lorsque je dérive x par rapport au temps je retrouve bien mon v de t ici. Maintenant si je me donne comme condition initiale qu'au temps t égal 0, j'étais à l'origine alors je vois que mon A vaut x point 0 fois tau. En fin de compte, quand je rassemble les termes ma fonction x de t vaut x point de 0 la vitesse initiale dans la direction au temps t égal 0 fois tau et j'ai ici ce coefficient un moins exponentielle moins t sur tau.

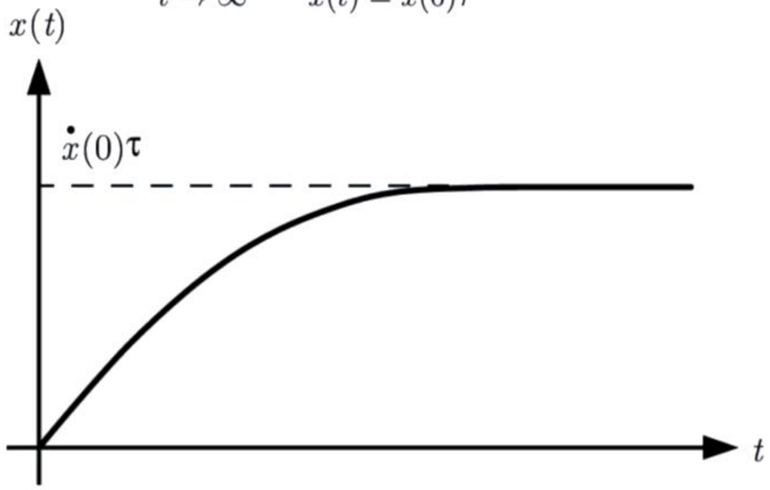
Notes

Summary

6m 11s

$$x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$t \to \infty \qquad x(t) = \dot{x}(0)\tau$$



$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + \frac{df}{dt}\Delta t$$

$$x(0+t) \approx x(0) + \frac{df}{dt}t$$

Mécanique | 2013 25

Je me propose maintenant de construire un graphe représentant cette fonction là, le voici. Comment j'y suis arrivé, et bien je constate que lorsque t tend vers l'infini, t est très grand cette fonction là tend vers zéro, il reste donc x point de zéro fois tau que je peux écrire comme ceci. J'ai donc à t très très grand, une asymptote à x point de zéro fois tau Maintenant, que se passe-t-il quand t est petit ? Alors t petit, on va utiliser nos développements limités. Je vous rappelle que je me suis permis d'écrire df sur dt égal environ, ça veut dire environ parce je n'ai pas mis dt tend vers zéro, j'ai f de t plus dt moins f de t, divisé par dt. Si j'avais écrit une limite lorsque dt tend vers zéro en un sens j'aurais écrit ma définition de la dérivée. Donc ici j'écris approximativement et j'ai donc f de t plus un delta t fini qui est f de t plus la dérivée ce terme là, fois delta t. Alors appliquons le à cette fonction ici. Je peux écrire x, j'aimerais un développement dans cette région là donc je pars de zéro et j'ai t petit. x de zéro plus t petit vaut x de zéro plus la dérivée de ma fonction quand t égal zéro fois t. Alors il ne reste plus qu'à calculer la dérivée de cette fonction là.

Notes

Summary

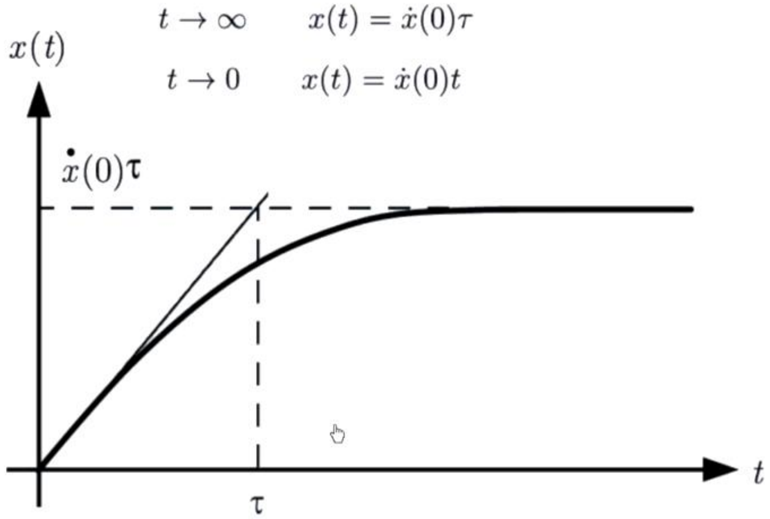
7m 32s

Exponentielle

$$x(t) = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$t \to \infty \qquad x(t) = \dot{x}(0)\tau$

$t \to 0 \qquad x(t) = \dot{x}(0)t$



$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + \frac{df}{dt}\Delta t$$

$$x(0+t) \approx x(0) + \frac{df}{dt}t$$

Mécanique | 2013 27

Or la dérivée de cette fonction là, prise à t égal zéro vaut simplement x point de zéro. Je vous laisse faire le calcul tranquillement. N'oublions pas que l'on chercher la valeur à t égal zéro. Donc il nous reste juste le x point de zéro fois le temps t. x point de zéro fois t, c'est ce que j'ai écrit ici, donc je suis en train de dire que, quand t est tout petit, on a un comportement linéaire et c'est cette asymptote là. Vous remarquez que ces deux approximations se croisent quand t égal tau. Donc si ça c'est le comportement de cette exponentielle vous pouvez dessiner ces deux asymptotes, ces deux tangentes et cela vous donne le temps tau. Je vous rappelle que ce temps tau ici, on l'avait défini à partir de b et de m.

Notes

Summary

9m 30s

Comportement asymptotique

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

Physiquement :

- v augmente sous l'effet de g
- plus v est grand, plus le frottement augmente
- il existe une vitesse limite

$$\ddot{z} = 0 \implies \dot{z}|_{limite} = -g\tau$$

Mécanique | 2013 34

Je regarde maintenant le comportement de ma solution ou si vous voulez, le comportement de mon modèle dans la direction z. Voici l'équation du mouvement que nous avons obtenu dans la direction z. Que dit cette équation-là? Sous l'effet de g, l'accélération est constante si on peut négliger la vitesse Seulement avoir une accélération veut dire que la vitesse augmente négativement mais elle augmente. Vous avez un objet en chute libre, sa vitesse augmente. Plus la vitesse augmente, plus la force de frottement augmente. et on arrive à un comportement limite. Je résume la situation : la vitesse v augmente sous l'effet de g mais plus v augmente plus la force de frottement augmente, on arrive à une condition limite z point point égal zéro, l'accélération s'annule au moment où ces deux termes s'annulent mutuellement. Donc on a une vitesse limite qui vaut g fois tau. Elle est négative parce que j'ai choisi mon système d'axes avec le z vers le haut.

Notes

Summary

10m 36s

Mouvement vertical

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

$$\text{Changement de variable : } a = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \rightarrow \ddot{z} = -\tau\dot{a} = a$$

On peut maintenant essayer de, non pas simplement de regarder le comportement qualitatif à la limite, mais vraiment intégrer le mouvement. Alors voici l'équation du mouvement. Je vous propose un changement de variable. Tout ce terme-là je l'appelle a donc j'ai a qui vaut moins g moins un sur tau fois z point je remarque que si je dérive cette expression par rapport à t j'ai a point, ce terme est nul, enfin la dérivée est nulle et ici j'ai moins un sur tau fois z point point, donc mon changement de variable implique z point point égal moins tau fois a. oui mais a c'est tout ça, donc on a aussi z point point qui vaut a à cause de l'équation différentielle initiale donc on se retrouve avec une équation encore une fois qui nous dit a point égal moins un sur tau fois a.

Notes

Summary

12m 03s

Mouvement vertical

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

$$\text{Changement de variable : } a = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \rightarrow \ddot{z} = -\tau\dot{a} = a$$

$$\rightarrow a = C\,e^{-t/\tau} \rightarrow \dot{z} = -\tau g - \tau C\,e^{-t/\tau}$$

$$\rightarrow z = -\tau g t + D + \tau^2 C\,e^{-t/\tau}$$

$$\text{Conditions initiales : } z = \dot{z} = 0 \text{ à } t = 0 \implies C = -g \text{ et } D = \tau^2 g.$$

Mécanique | 2013 40

Ce qui suggère une exponentielle donc je donne la solution a égal une certaine constante, je ne me suis pas avancé dans la notation, j'ai juste appelé C fois une exponentielle moins t sur tau, je substitue dans la définition de a pour obtenir le z point, z point vaut moins g fois tau mois a fois tau donc moins tau fois C fois l'exponentielle. J'intègre encore une fois, ce terme est facile à intégrer, je peux imaginer d'avoir une constante dont la dérivée sera nulle et puis je dois intégrer ce terme, encore une fois attention, quand je dérive l'intégrale de l'exponentielle nous donnera une exponentielle mais quand je dérive l'exponentielle j'aurais un moins un sur tau qui apparait donc je dois multiplier par moins tau la devant, donc j'ai plus tau au carré qui apparait. Je vous invite à regarder ça tranquillement en faisant une pause. Je vais prendre comme condition initiale que à t égal zéro, j'ai t à z égal zéro avec une vitesse nulle donc je laisse tomber un objet avec une vitesse nulle depuis l'origine de mon système d'axes de coordonnées.

Notes

Summary

13m 08s

Mouvement vertical

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\,\dot{z}$$

$$\text{Changement de variable : } a = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \rightarrow \ddot{z} = -\tau\dot{a} = a$$

$$\rightarrow a = C\,e^{-t/\tau} \rightarrow \dot{z} = -\tau g - \tau C\,e^{-t/\tau}$$

$$\rightarrow z = -\tau g t + D + \tau^2 C\,e^{-t/\tau}$$

$$\text{Conditions initiales : } z = \dot{z} = 0 \text{ à } t = 0 \implies C = -g \text{ et } D = \tau^2 g.$$

$$z = -\tau g t + \tau^2 g\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Mécanique | 2013 41

Si vous prenez t égal zéro ici vous avez l'exponentielle qui vaut un ici vous avez zéro, donc vous avez C qui vaut moins g et maintenant si, on a z égal zéro à t égal zéro, vous avez zéro ici zéro, il vous reste un D et tau au carré C avec C qu'on vient de trouver, vous trouvez D qui vaut tau au carré g. Je substitue C et D dans cette équation-là et voilà ce que je trouve : z vaut moins tau gt plus ce terme-là. Ce terme-là quand t tend vers l'infini tend vers zéro, il nous reste ce comportement limite qu'on avait trouvé tout à l'heure.

Notes

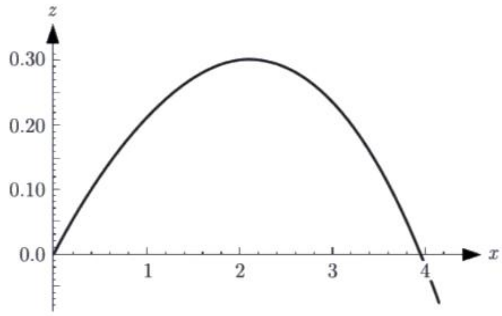
Summary

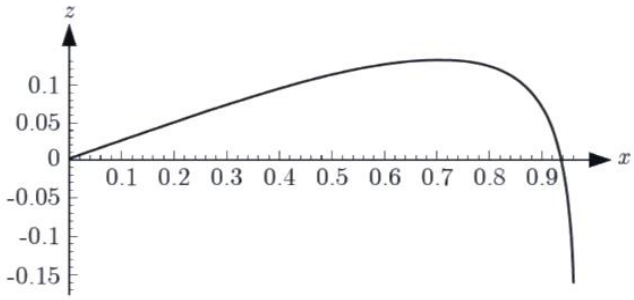
14m 35s

Trajectoire avec frottement

$$x = \dot{x}(0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$z = -\tau g t + \left(\tau^2 g + \tau \dot{z}(0)\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$





Mécanique | 2013 45

Pour finir je vous propose d'examiner ce que ces prédictions nous donnent pour la trajectoire. Alors je reprends notre solution z de t sauf que je l'ai modifiée un peu. J'ai rajouté la possibilité d'avoir une vitesse initiale non nulle, je vous rappelle le résultat pour x et maintenant je regarde deux cas limites. Si on a peu de frottement, voilà ce qu'on obtient. Si vous y regardez de très près vous verrez que vous avez une légère déformation par rapport à la parabole, en revanche, si maintenant j'ai un fort frottement voilà ce que j'obtiens et alors il devient absolument clair que à temps long, nous atteignions une asymptote dans la direction x comme on a vu, on ne va pas plus loin que x point de zéro fois tau, et puis, dans la direction y ici, une fois qu'on est dans l'asymptote on a aussi le fait que on a atteint la vitesse limite. En introduisant le frottement on a donc obtenu un comportement radicalement différent.

Notes

Summary

15m 29s