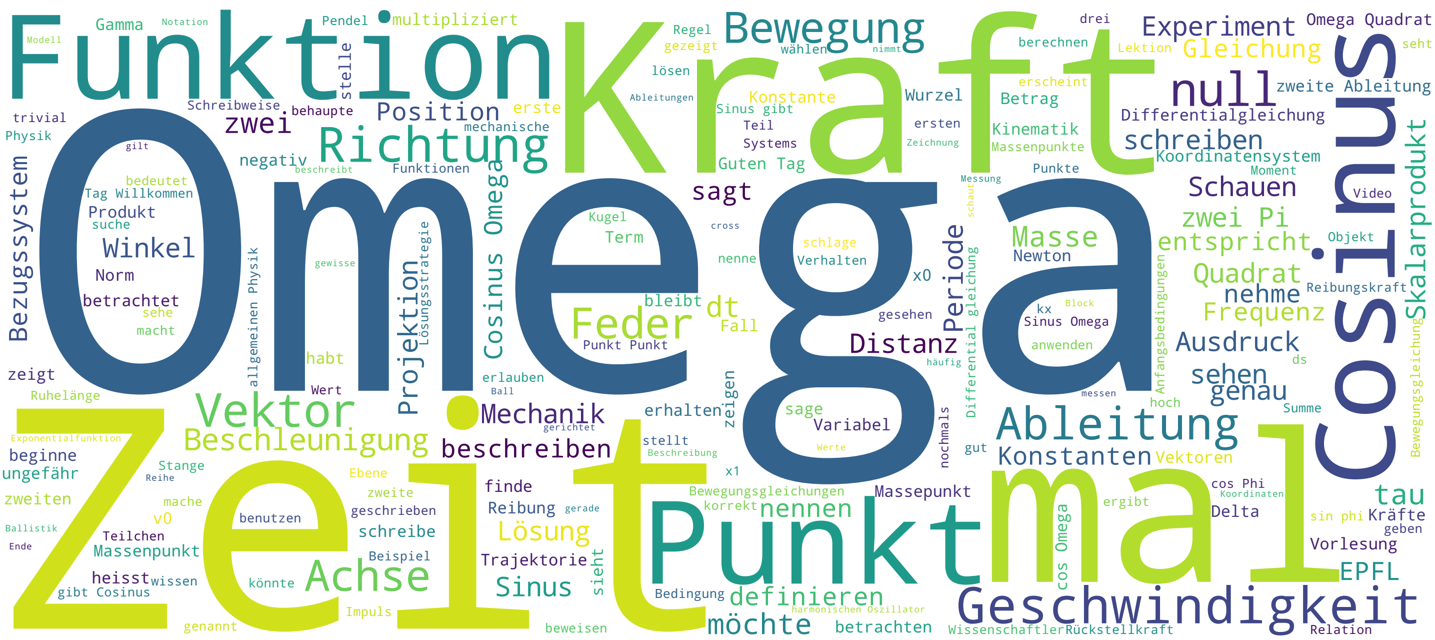
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-5

L'oscillateur harmonique

Mécanique, cours 5.2

Jean-Philippe Ansermet



Video

EPFL

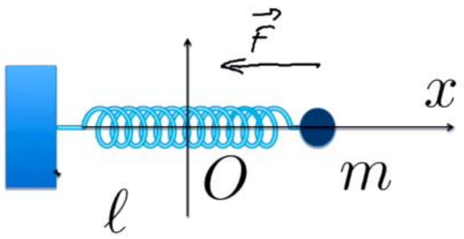
Guten Tag. Willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik an der EPFL. In dieser Lektion möchte ich die Lösungsstrategie einführen um ein Problem der Mechanik zu lösen und wir werden jetzt diese Strategie auf ein Problem anwenden, welches der harmonische Oszillator genannt wird. Dies ist eines der wichtigsten Probleme für Wissenschaftler und Ingenieure. In der Tat kann gezeigt werden, dass jedes mechanische System mit stabilem Gleichgewicht, wenn es um dieses Gleichgewicht herum geschüttelt wird, die Bewegung eines harmonischen Oszillators annimmt. Ich werde nun ein neues Modell einer Kraft einführen, welches ich Rückstellkraft nenne werde. Ich werde die Bewegungsgleichungen für diese Kraft schreiben. Dies sind Differential- gleichungen eines neuen Typus'. Wir werden eine analytische Lösung für diese Bewegung finden, die sogenannte harmonische Bewegung. Dies wird uns erlauben folgende, häufig benutzten, Begriffe einzuführen: die Kreisfrequenz, die Periode und die Frequenz.

Notes

Summary

0m 03s

Force de rappel, équation du mouvement



longueur au repos : ℓ

Force projetée sur Ox : $F = -kx$

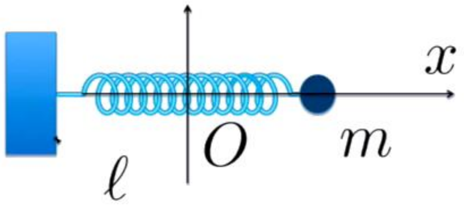
Ich beginne mit der Beschreibung der Rückstellkraft. Ich möchte folgende Situation beschreiben: Ich habe eine Feder, die an einer Mauer befestigt ist, welche zum Bezugssystem gehört. Und ich habe eine Masse m, die an die Feder gehängt wurde. Diese Feder hat eine Ruhelänge, die ich l nennen werde. Diese Distanz hier werde ich l nennen. Bis zu einem gewissen Punkt, ist dies der Punkt der von der Masse besetzt würde, wenn die Feder in der Ruheposition ist. Und jetzt werde ich ein Achsensystem definieren, um dies Bewegung meines Massenpunktes zu beschreiben. Hier habe ich eine Koordinatenachse Ox. Ich werde den Punkt O genau nach der Distanz l wählen, welche ja die Ruhelänge der Feder ist und ich behaupte, dass die Rückstellkraft folgendermassen Modellierbar ist: Ich sage, dass die Kraft proportional zu der Dehnung zunimmt. x wird von der Ruheposition ausgehend gemessen, entspricht also der Dehnung. Ich schriebe hier nun: minus kx, da, wenn die Feder ausgezogen wird, wie hier, so ist die Kraft in Richtung der negativen x gerichtet und die Projektion der Kraft auf die Achse ist negativ.

Notes

Summary

1m 17s

Force de rappel, équation du mouvement



longueur au repos : ℓ

Force projetée sur Ox : $F = -kx$

cinématique : $a = \ddot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx$

In anderen Worten: ich hätte einen Einheitsvektor entlang der x-Achse einführen können und die Projektion, die uns interessiert, ist die Projektion der Kraft auf die Achse, also das Skalarprodukt und da der Winkel zwischen x und F gleich pi ist, erhalten wir ein Minus. Man kann auch schauen was passieren würde, wenn der Massenpunkt hier wäre. Die Feder wäre also zusammen- gedrückt. Wir wissen es: die Kraft wäre in dem Moment in dieser Richtung. x ist hier negativ und meine Formel gibt mir eine positive Kraft, was korrekt ist. Wenn die Feder zusammengedrückt ist, zeigt die Kraft in Richtung der positiven x. Die Kinematik ist jetzt trivial. Ich habe einfach die Beschleunigung, die zweite Ableitung der Position nach der Zeit und die Bewegungsgleichung, hier ist sie. Wir wenden F=ma an. Hier die Kraft, minus kx.

Notes

Summary

3m 04s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$x = \cos(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega\sin(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = \sin(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = \omega\cos(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{\sin(\omega t)}_{x}$$

Mécanique | 2013 20

Hier m mal die Beschleunigung. Ich habe also hier die Differentialgleichung und ich kann sie explizit in dieser Form schreiben. Ich suche eine Funktion, x von t, deren zweite Ableitung, auf einen konstante Faktor genau, diese Funktion x von t ist. Ihr könntet nun eine Reihe von Funktionen und ihren Ableitungen im Kopf haben, oder aber ihr schaut in einer Tabelle nach und ihr werdet sehen, dass der Cosinus die richtige Eigenschaft hat. Ich schreibe hier Cosinus Omega t, wo Omega als Konstante angeschaut wird. Wenn ich nach der Zeit ableite, wird der Cosinus zu minus Omega Sinus. Ich habe eine Funktion einer Funktion. Ich habe also das minus Omega das hier erscheint. Ich leite nochmals ab, die Ableitung des Sinus gibt Cosinus, noch ein Omega, also minus Omega Quadrat. x ist also cos Omega t. Ich finde x hier wieder. Ich habe also genau die Struktur meiner Differentialgleichung, solange ich sage, dass Omega gleich der Wurzel von k über m ist. Ich hätte auch einen Sinus Omega t nehmen könne. Die Ableitungen geben das richtige Resultat, der Sinus gibt Cosinus. Die Ableitung des Cosinus wird uns nochmals einen Sinus geben, x ist gleich Sinus Omega t und ich finde es hier.

Notes

Summary

4m 24s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$

$$x = B\cos(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega B\sin(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 B\cos(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = A\sin(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{A\sin(\omega t)}_{x} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ich habe also x und auch die richtige Struktur, diese hier. Mit, auch hier, der selben Bedingung für Omega. Ich stelle fest, dass, wenn ich x mit einer Variabel A multipliziert hätte, hätte ich diese Variabel A überall wiedergefunden. Hier habe ich noch einmal x, ich habe als die Differentialgleichung erfüllt. Auch hier hätte ich ein B hin- setzten können. Ich hätte B überall gehabt. Ich abe hier x und ich erfülle daher die Differential- gleichung.

Notes

Summary

6m 05s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mécanique | 2013 23

Jetzt, in aller Allgemeinheit, wird die Lösung dieser Differentialgleichung eine lineare Superposition der zwei Lösungen mit dem Sinus und dem Cosinus sein. Omega muss immer noch gleich Wurzel k über m sein.

Notes

Summary

6m 48s

Constantes d'intégration

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$$

Conditions initiales :

$$x = x_0 \text{ et } v = v_o \text{ à } t = 0$$

$$B = x_0$$
$$A = \frac{v_0}{\omega}$$

Mécanique | 2013 27

Schauen wir uns jetzt die Werte der Konstanten A und B an. Die Konstanten A und B sind durch die Anfangsbedingungen gegeben. Ich stelle mir folgende Anfangsbedingungen vor: zur Zeit t gleich 0 ist die Position x0 und die Geschwindigkeit v0. t gleich 0 bedeutet in dieser Gleichung, dass dieser Ausdruck hier Null ist. Bei t gleich 0 ist auch dieser Ausdruck null. Bei t gleich 0 ist der Cosinus gleich 1, ich habe hier also bei t gleich 0 x0 hier und hier habe ich v0. Ich sehe also, dass B gleich x0 ist und dass A Omgea gleich v0 ist. Dies kann ich so schreiben.

Notes

Summary

7m 03s

Solutions générales équivalentes

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$$

Mécanique | 2013 28

Jetzt möchte ich darauf hinweisen, dass man oft, anstatt die Summe zweier Funktionen zu benutzen, man lieber einen Ausdruck mit einem Cosinus omega t und einer Phasenverschiebung verwendet. Ich werde euch jetzt beweisen, dass diese zwei Ausdrücke gleichwertig sind.

Notes

Summary

8m 10s

Equivalence des deux formulations

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$$

$$x = \underbrace{C\cos\phi}_{B}\cos\omega t \underbrace{- C\sin\phi}_{A}\sin\omega t$$

Ich fange mit dem zweiten an. Ich habe x, welches durch den Cosinus von zwei Variablen ausgedrückt wird. Ich kann also sehr gut schreiben, dass x gleich nun, der Cosinus der Summe ist das Produkt des Cosinus minus das Produkt des Sinus. Ich kann also schreiben: C cos Phi cos Omega t minus c sin phi sin Omega t. Es reicht also, wenn ich C cos Phi gleich B und minus C sin Phi gleich A nehme. Ich habe also die Gleichwertigkeit der beiden Formulierungen gezeigt.

Notes

Summary

8m 29s

Définitions

pulsation ω

période T : $x(t+T) = x(t)$ $\qquad \omega T = 2\pi$

fréquence $f = \dfrac{1}{T}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

Ich kommen nun zu ein paar Definitionen. Omega, welches in unserer Lösung vor- kommt, wird Kreisfrequenz genannt. Wir haben hier eine Lösung die periodisch ist. Tatsächlich, egal welche Zeit man betrachtet, wenn man eine Menge, ich habe sie T genannt, dazu fügt, kommt man wieder zur selben Position. Sowie wenn man an unsere Cosinus-Omega-t-plus-Phi-Lösung denkt, der Cosinus ist eine periodische Funktion mit einer Periode von zwei Pi. Wenn Omega mal gross T genau gleich zwei Pi ist, so nimmt die Funktion den selben Wert an. Folglich habe ich die Bedingung, dass Omega t gleich zwei Pi. Ich schliesse diese Relation, die ich in Rot markiert habe, daraus. Diese Relation ist sehr wichtig und sie sagt mir, dass Omega gleich zwei pi durch die Periode ist. Nun, die Frequenz ist, per Definition, 1 über der Periode und ich habe diese, auch sehr wichtige, Formel: Omega gleich zwei Pi mal die Frequenz. In der Umgangssprache wird manchmal Omega die Frequenz genannt, in Wirklichkeit ist es aber die Kreis- frequenz und f ist die Frequenz.

Notes

Summary

9m 17s