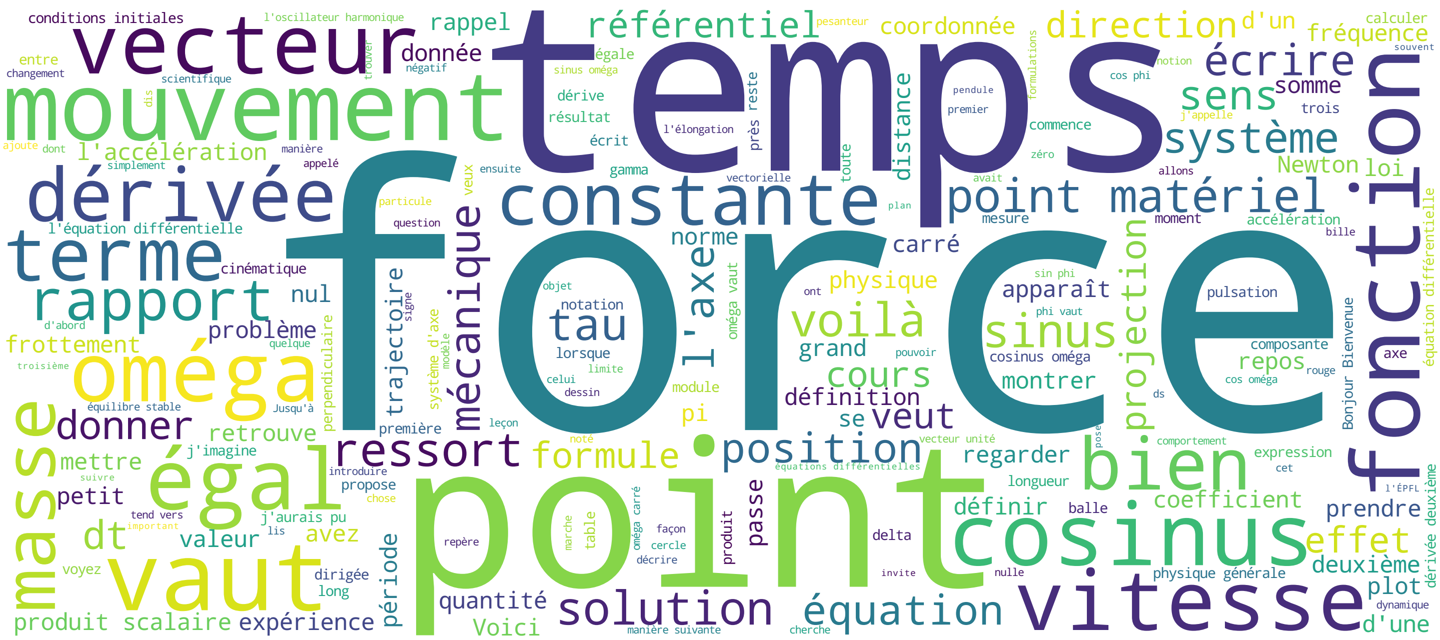
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'oscillateur harmonique

Mécanique, cours 5.2

Jean-Philippe Ansermet

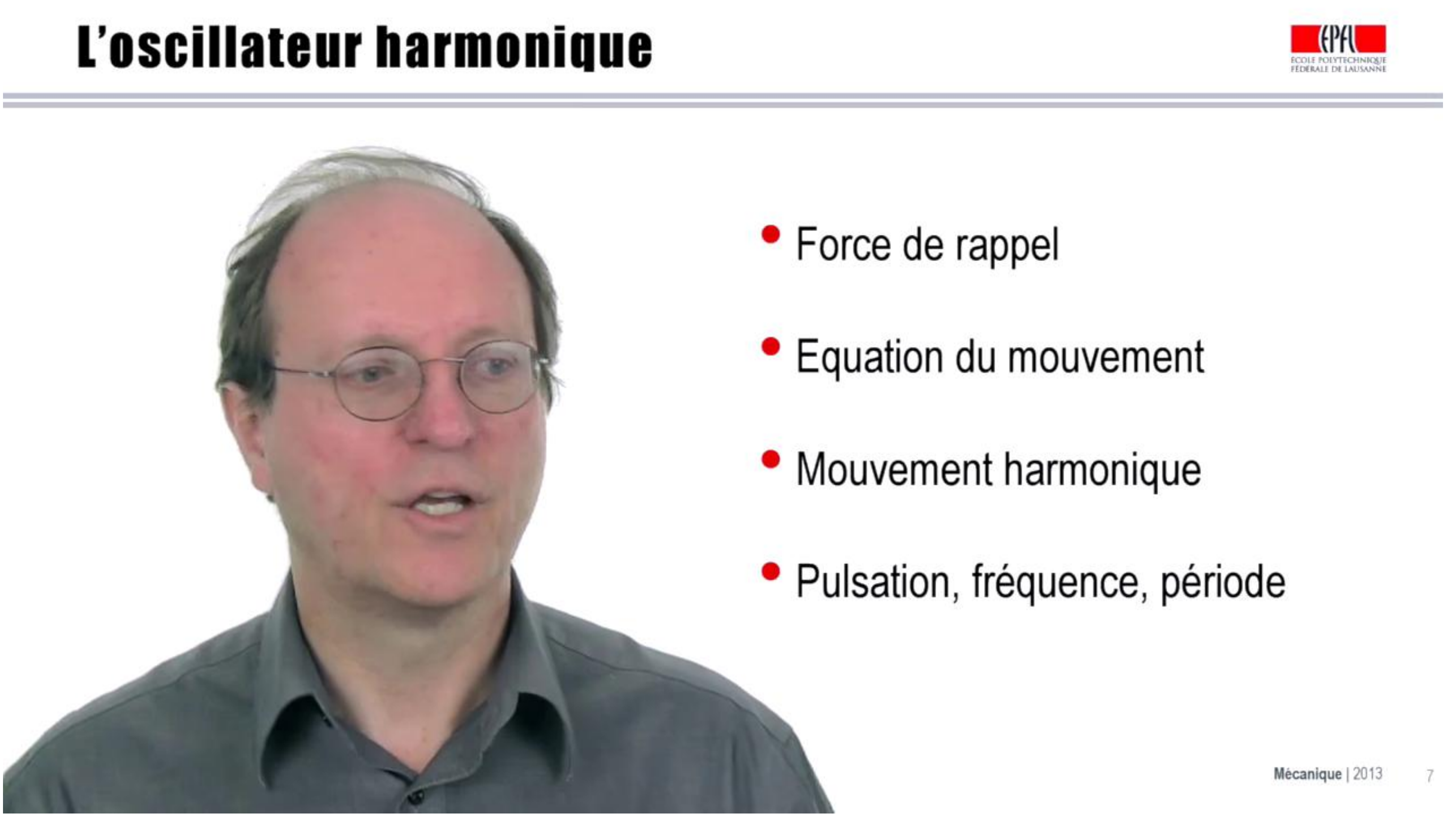
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-5



Search MOOC

Video

EPFL



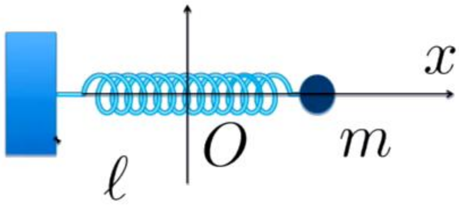
Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, j'aimerais introduire la notion de marche à suivre pour aborder un problème de mécanique et nous allons maintenant appliquer cette démarche pour le problème dit de l'oscillateur harmonique. C'est un problème éminemment important pour les scientifiques et pour les ingénieurs. En effet, on peut montrer que tout système mécanique qui admet un équilibre stable lorsque il est secoué autour de cet équilibre stable à un mouvement qui peut être assimilé à celui de l'oscillateur harmonique. Alors, je vais introduire un nouveau modèle de force que j'appelle la force de rappel. Je vais pour cette force écrire les équations du mouvement qui sont des équations différentielles d'un nouveau type.

Notes

Summary

0m 03s

Force de rappel, équation du mouvement



longueur au repos : ℓ

Force projetée sur Ox : $F = -kx$

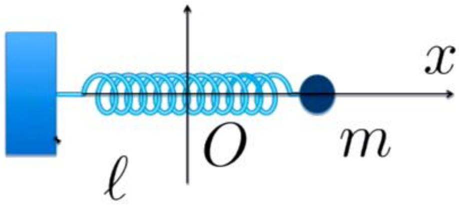
On va pouvoir en trouver une solution analytique qui est un mouvement dit harmonique, ce qui nous permettra d'introduire des notions souvent utilisées en technique: la pulsation, la période et la fréquence. Je commence avec la description de la force de rappel. Je veux modéliser la situation suivante. J'ai un ressort accroché à un mur qui appartient au référentiel et une masse m accrochée au ressort. Ce ressort a une longueur au repos que je vais noter l. Je veux noter l la distance ici. Jusqu'à un certain point, c'est le point qu'occuperait la masse si le ressort était au repos. Et maintenant, je vais définir un système d'axes pour décrire le mouvement de mon point matériel. Voici, je vais mettre, j'ai un axe O x de coordonnées. Je vais mettre le point O justement à cette distance l qui est la longueur au repos du ressort et je déclare que la force de rappel est modélisable de la manière suivante. Je dis que la force est proportionnelle à l'élongation. x est mesuré depuis la position au repos, c'est donc l'élongation.

Notes

Summary

1m 01s

Force de rappel, équation du mouvement



longueur au repos : ℓ

Force projetée sur Ox : $F = -kx$

cinématique : $a = \ddot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx$

Mécanique | 2013 14

J'ai écrit moins kx parce que lorsque le ressort est étiré comme indiqué ici, la force est dirigée dans le sens des x négatifs donc la projection de la force sur l'axe est négative. En d'autres termes, j'aurais pu introduire un vecteur unité le long de l'axe x et la projection qui m'intéresse ici c'est la projection de la force sur l'axe donc c'est le produit scalaire et comme on a un angle entre x et F qui vaut pi, on a un signe moins qui apparaît. On peut aussi regarder ce qui se passerait si le point matériel était ici. Donc le ressort serait comprimé. On le sait, la force à ce moment là serait dans ce sens-ci. x est alors négatif et ma formule me donne une force positive ce qui est correct. Quand le ressort est comprimé, la force est dirigée dans le sens des x positifs. La cinématique maintenant est triviale. J'ai simplement l'accélération, la dérivée deuxième de la position dérivée par rapport au temps et l'équation du mouvement, la voici. On applique F=ma. Voici la force moins kx.

Notes

Summary

2m 44s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$

$$x = \cos(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega\sin(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = \sin(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = \omega\cos(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\,\underbrace{\sin(\omega t)}_{x}$$

Voici m fois l'accélération. J'ai donc l'équation différentielle que je peux écrire explicitement de cette manière là. Je cherche une fonction x du temps dont la dérivée deuxième est à un coefficient près cette fonction x du temps. Alors vous pourriez avoir en tête une série de fonctions et leurs dérivées ou bien vous le regarder dans une table et vous observez que le cosinus a la bonne propriété. J'écris ici cosinus oméga t avec oméga considéré comme une constante. Si je dérive par rapport au temps, le cosinus devient moins oméga sinus. J'ai une fonction de fonction. Donc j'ai le moins oméga qui apparaît. Si je redérive encore une fois, la dérivée du sinus donne le cosinus avec encore un oméga donc j'ai moins oméga carré. Alors x, c'est cos oméga t. Je retrouve le x ici. J'ai donc bien la structure de mon équation différentielle pour autant que je pose que le oméga vaut racine de k sur m. J'aurais pu prendre un sinus oméga t. Les dérivées donnent le bon résultat en effet le sinus va nous donner un cosinus. La dérivée du cosinus va donner un sinus et j'ai encore une fois, le x qui vaut sinus oméga t que je retrouve ici. J'ai donc x et j'ai bien la bonne structure, celle-ci.

Notes

Summary

4m 24s

Intégration de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$

$$x = B\cos(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega B\sin(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underline{B\cos(\omega t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = A\sin(\omega t) \qquad \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{A\sin(\omega t)}_{x} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mécanique | 2013 21

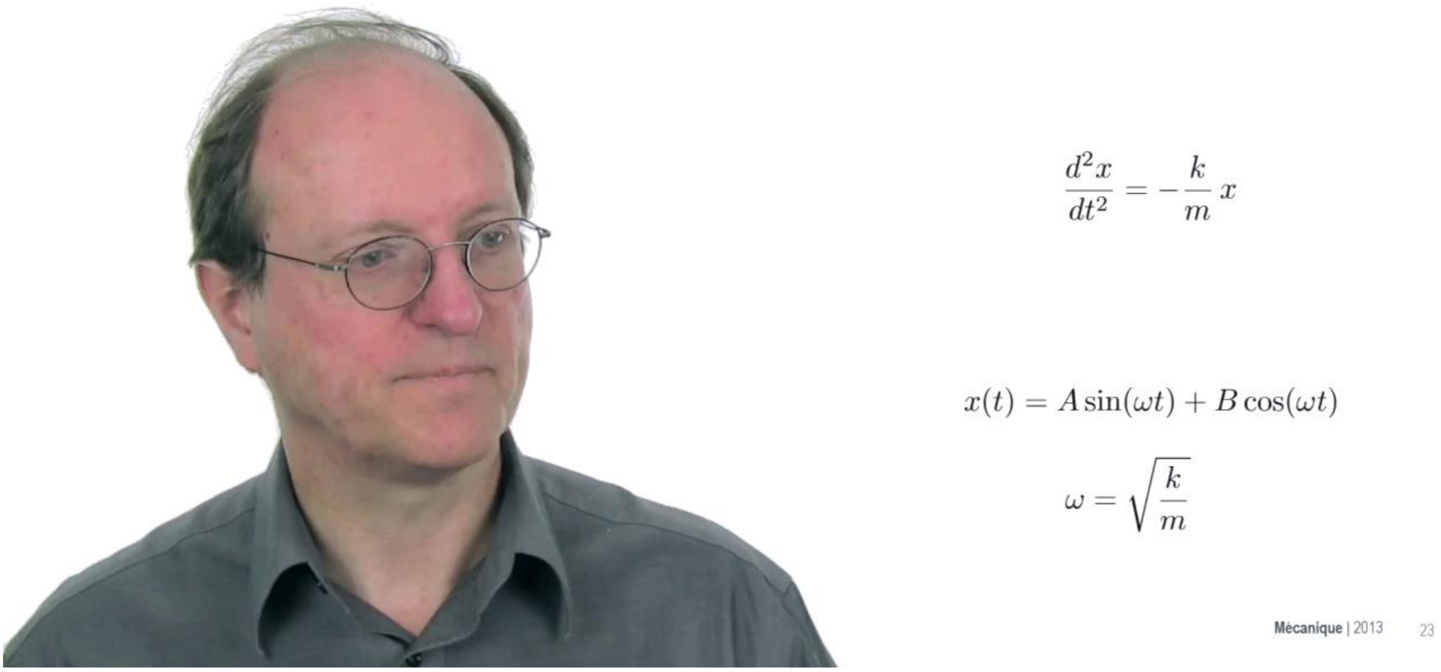
Avec encore une fois, la même condition pour oméga. Maintenant je remarque que si j'avais multiplié x par un coefficient A. Ce coefficient A je l'aurais retrouvé partout. Là, j'ai encore une fois x donc j'ai bien satisfait l'équation différentielle. De même, j'aurais pu mettre un B ici.

Notes

Summary

6m 10s

Intégration de l'équation du mouvement



J'aurais eu B partout. Je retrouve ici x donc je satisfais l'équation différentielle. Maintenant d'une manière générale, la solution à cette équation différentielle, c'est une superposition linéaire de solutions en sinus et cosinus avec pour oméga racine de k sur m.

Notes

Summary

6m 48s

Constantes d'intégration

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$$

Conditions initiales :

$$x = x_0 \text{ et } v = v_o \text{ à } t = 0$$

$$B = x_0$$
$$A = \frac{v_0}{\omega}$$

Mécanique | 2013 27

Maintenant j'examine la question des valeurs des constantes A et B. Les constantes A et B sont données par les conditions initiales. Alors j'imagine les conditions initiales suivantes. J'imagine que à t égal 0, la position est donnée par x 0 et la vitesse vaut v 0. t égal 0 dans cette équation là veut dire que ce terme là est nul. À t égal 0 ce terme là est nul aussi. À t égal 0 le cosinus vaut 1 et donc je lis ici évidemment à t égal 0 ici j'ai x 0 et ici j'ai v 0. Donc je lis que B vaut x 0 et A oméga vaut v 0 ce que je peux écrire de cette manière là. Maintenant j'aimerais signaler que souvent au lieu d'utiliser la somme de deux fonctions, on préfère utiliser une expression avec un cosinus oméga t et avec un déphasage.

Notes

Summary

7m 03s

Solutions générales équivalentes

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$$

Mécanique | 2013 28

Je vais maintenant vous montrer que ces deux formulations sont équivalentes.

Notes

Summary

8m 23s

Equivalence des deux formulations

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$$

$$x = \underbrace{C\cos\phi}_{B}\cos\omega t \underbrace{- C\sin\phi}_{A}\sin\omega t$$

Je pars de la deuxième. J'ai x qui est exprimé comme le cosinus de la somme de deux termes. Donc je peux très bien écrire x égal, alors le cosinus de la somme c'est le produit des cosinus moins le produit des sinus. Donc je peux écrire C cos phi, cos oméga t, moins C sin phi, sin oméga t. Il suffit donc de prendre que C cos phi vaut B et moins C sin phi vaut A. J'ai donc établi l'équivalence entre les deux formulations.

Notes

Summary

8m 29s

Définitions

pulsation ω

période T : $x(t+T) = x(t)$ $\qquad \omega T = 2\pi$

fréquence $f = \dfrac{1}{T}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

Je passe à quelques définitions. Le oméga qui apparaît dans notre solution est appelé de façon courante la pulsation. Maintenant, on a une solution qui est périodique. En effet, si on ajoute, quelle que soit la valeur du temps considéré, si on ajoute une quantité que j'ai noté ici grand T, je retombe sur la même position. Comme, si on pense à notre solution en terme de cosinus oméga t plus phi, le cosinus est une fonction périodique de période deux pis quand oméga fois grand T vaut deux pis la fonction revient à la même valeur. Par conséquent, j'ai cette condition oméga t égale deux pis. J'en déduis cette relation que j'ai notée en rouge parce qu'elle est très importante qui dit oméga vaut deux pis sur la période. Maintenant, la fréquence c'est 1 sur la période par définition et donc j'ai la formule aussi également très importante oméga égal deux pis fois la fréquence. Il arrive dans le langage courant qu'on appelle oméga la fréquence et vraiment ici il faudrait appeler oméga la pulsation et f c'est la fréquence.

Notes

Summary

9m 17s