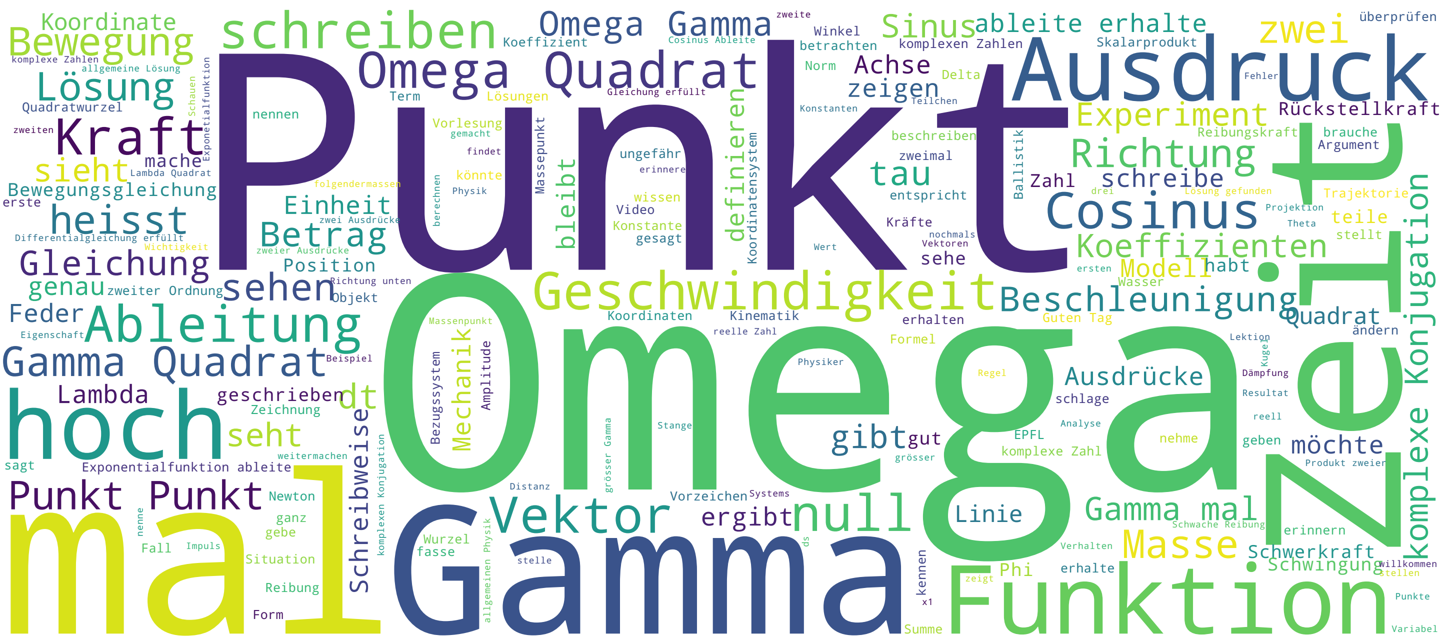
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-5-4

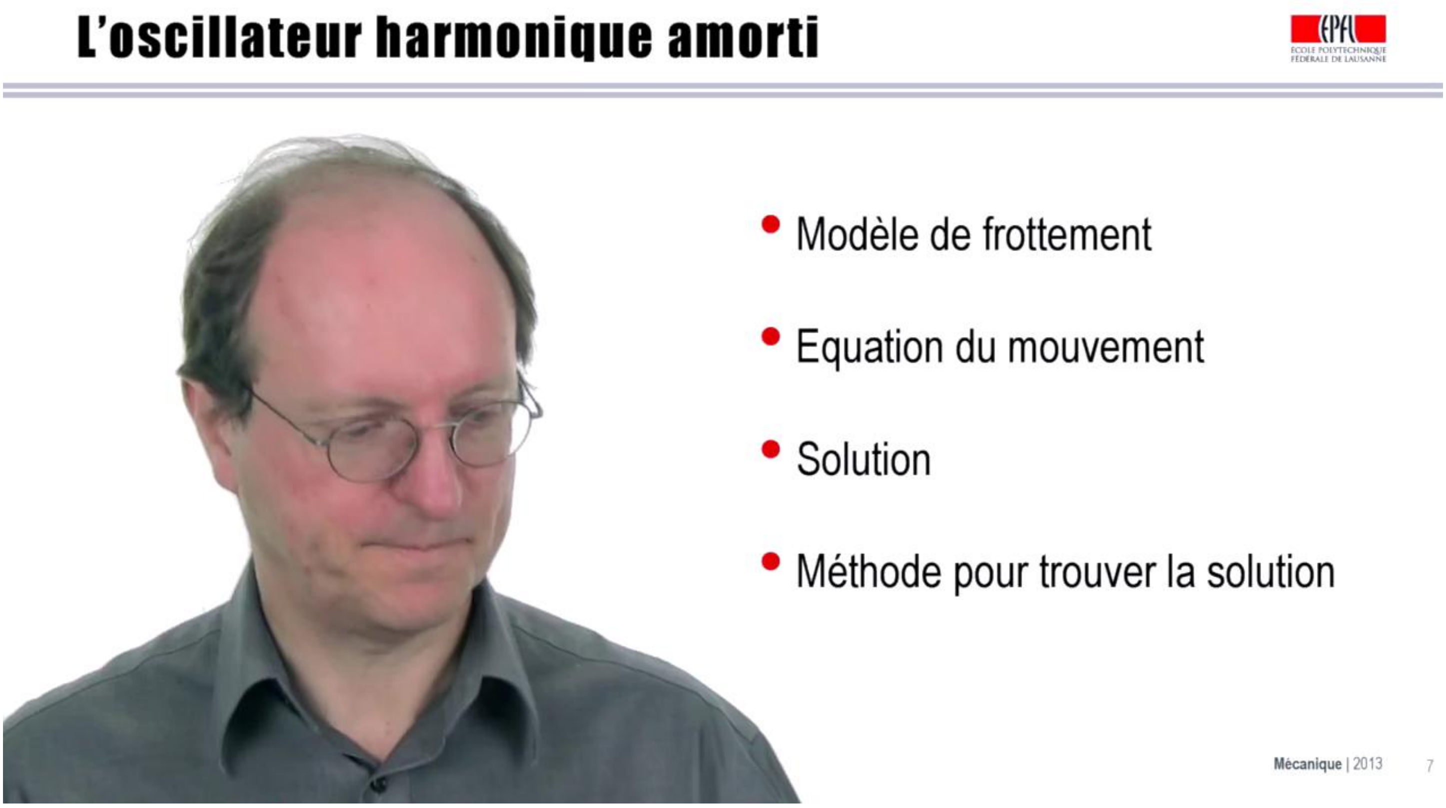
L'oscillateur harmonique amorti

Mécanique, cours 5.3

Jean-Philippe Ansermet



Video

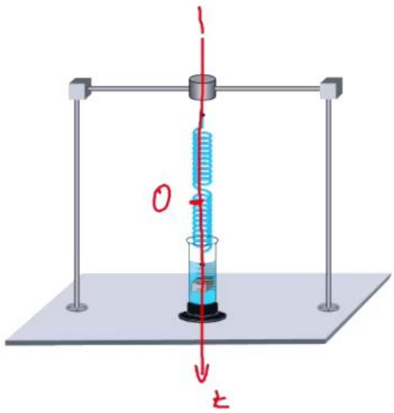


Guten Tag und willkommen zur Vorlesung der allgemeinen Physik der EPFL. Wir haben das Problem des harmonischen Oszillators analysiert und wir haben eine periodische Lösung gefunden, also eine Schwingung der Amplitude, welche die ganze Zeit die selbe bleibt. Nun wissen wir aber, dass überall um uns herum die Oszillatoren, es sei denn sie werden von einer Kraft angetrieben, irgendwann zu schwingen aufhören. Wir möchten nun unsere Modell verbessern um die Tatsache, dass es eine Dämpfung gibt, zu berücksichtigen. Ich werde deshalb ein Modell mit Reibung vorschlagen. Wir werden die selbe Reibung nehmen, wie wir in der Ballistik verwendet haben. Mit diesem Modell der Reibung und der Rückstellkraft werden wir die Bewegungsgleichungen schreiben. Hier werden wir verständlicherweise ein schwierigeres Problem haben als alles was wir bisher gemacht haben. Und wir werden die Bewegungsgleichungen integrieren können aber es wird nicht einfach sein. Wir werden komplexe Zahlen brauchen, die hier nicht alle kennen. Ich werde also am Anfang die Lösung geben und wir werden überprüfen, dass sie Stimmt. Danach werden wir, für die die komplexen Zahlen schon kennen, eine Methode sehen wie man diese Lösung finden kann.

Notes

Summary

0m 03s



modèle de force : $\boldsymbol{F}_f = -b\boldsymbol{v}$

cinématique : $v_x = \dot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

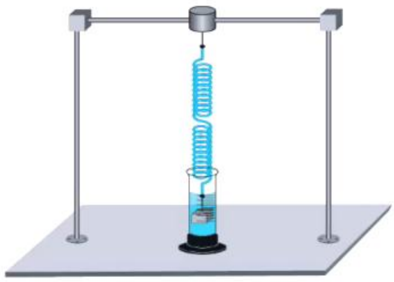
Ich schaue also ein mechanisches System, so wie dieses hier an. Eine Feder, eine Masse, welche ins Wasser getaucht wird. Hier haben wir ganz klar eine Dämpfung. Ich werde nun ein Modell der Reibungskraft wählen. Wie in der Ballistik werde ich annehmen, dass die Kraft gegen die Geschwindigkeit zeigt. Hier also ist b ein positiver Koeffizient. Ich brauche ein minus Zeichen um zu zeigen, dass die Kraft gegen die Bewegung wirkt. Die Kinematik, wenn ich eine x-Koordinate verwende um die Position meines Massenpunktes anzugeben, so habe ich einfach, dass die Geschwindigkeit, welche in der Kraft vorkommt, hier, gleich x Punkt ist. Und meine Bewegungsgleichung, nachdem ich f=ma angewendet habe, wird m mal die Beschleunigung, hier. Die erste Kraft, die Rückstellkraft. Und hier die viskose Reibung. Man kann sich nun fragen: was genau passiert im Auditorium? Wir haben ein System, welches der Schwerkraft unterliegt. Ich werde euch jetzt beweisen, dass wir unter Einfluss der Schwerkraft noch die selbe Bewegungsgleichung haben. Dies mache ich mit einer Verschiebung der Koordinaten. Ich werde eine Hilfsachse mit der Koordinate z definieren. Hier irgendwo ist die Ruheposition.

Notes

Summary

1m 33s

Oscillateur harmonique amorti



modèle de force : $\boldsymbol{F}_f = -b\boldsymbol{v}$

cinématique : $v_x = \dot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

Notation : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ $\frac{b}{2m} = \gamma$

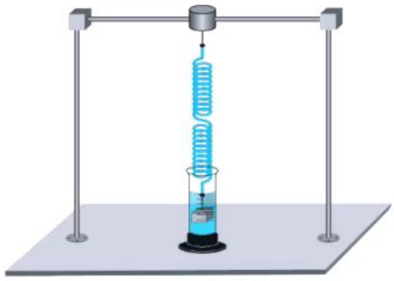
Und wenn ich die Bewegungs- gleichung für diese z-Koordinate, mit der Schwerkraft, schreiben will, so werde ich m z Punkt Punkt haben, was gleich der Rückstellkraft minus kz sein muss. Die Schwerkraft ist Richtung unten ausgerichtet. Ich habe eine Kraft, mg, so wie hier, welche einen positiven Teil mg gibt, da ich entschieden habe, z Richtung unten zu nehmen. Es bleibt die Reibungskraft, minus b mal z Punkt, über. Nun, hier sehen wir, dass ich k ausklammern kann. Ich habe k, das hier vorkommt, ich muss das Vorzeichen hier ändern. Und das hier kann ich nun x nennen. Also, hier habe ich k x. Die Ableitung nach der Zeit von x wird und das selbe geben wie die Ableitung von dieser Variabel hier. x Punkt ist also gleich z Punkt. Ich kann also hier m, Entschuldigung, m x Punkt Punkt schreiben, für die Ableitung von x. Und hier habe ich minus b x Punkt. x Punkt ist gleich z Punkt. So. Ich kann also ganz gut annehmen, dass meine Bewegungsgleichung diese hier ist, auch wenn es eine Schwerkraft hat. Nun, bevor wir weitermachen mit der Analyse dieser Lösung, möchte ich ein Substitution machen. Hier nun wie ich dies tue. Dies ist ziemlich typisch für die Vorgehensweise eines Physikers.

Notes

Summary

3m 12s

Oscillateur harmonique amorti



modèle de force : $\boldsymbol{F}_f = -b\boldsymbol{v}$

cinématique : $v_x = \dot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ $\frac{b}{m}$

Notation : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ $\frac{b}{2m} = \gamma$

Ich merke, dass wenn ich hier durch m teile, so habe ich den Koeffizienten k über m der entsteht. k über m ist genau der selbe Koeffizient den wir hatten als noch keine Reibung da war. Ich erinnere mich also an die Lösung die ich hatte als wir die Reibung vernachlässigen konnten. Ich werde k über m nicht Omega sonder Omega 0 im Quadrat nennen, um zu zeigen, dass es sich um eine Konstante handelt, welche mit den Parameter des Models ermittelt wird. Was ist nun dieser Koeffizient b über m? Wenn ich hier durch m teile, so habe ich einen Koeffizienten. Wenn ich hier durch m teile, so habe ich den Koeffizienten b über m. Welches ist die Einheit des Koeffizient b über m? Wir haben hier b über m mal x Punkt, was die selbe Einheit wie x Punkt Punkt haben muss. b über m hat also die Einheit von eins geteilt durch eine Zeit. Oder, b über m hat die Einheit einer Kreisfrequenz. Ich entscheide nun, b über zwei m = Gamma zu schreiben. Wieso füge ich den Faktor 2 hinzu? Ich mache damit die Ausdrücke angenehmer für was noch kommt. Um zu sehen, dass dies eine gute Idee war, müssen wir weitermachen mit den Berechnungen. Was mir wichtig ist, ist, dass ich seht wie ich vorgehe um die Schreibweise zu ändern und die experimentellen Parameter mit Symbolen, welche auf die Einheit der Grösse hinweisen, ersetze.

Notes

Summary

5m 09s

Equation du mouvement

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Observation : beaucoup d'oscillations dans la décroissance

Frottements faibles

$$\text{Unités :} \quad [\gamma^2] = [\omega_0^2]$$

$$\gamma^2 \ll \omega_0^2$$

Mécanique | 2013 16

Hier also unsere Bewegungsgleichung. Ich suche die Funktion x von t, die diese Gleichung erfüllt. Bevor ich zur Lösung komme, muss ich angeben in welchem physikalischen Regime wir uns befinden. Ihr habt die Videos der Experiment gesehen. Wir sind daran die Bewegung eines Objekts, welches mehrere Male Schwingt bevor eine bemerkbare Dämpfung auftritt, zu analysieren. Wir müssen nun diese Situation berücksichtigen. Dies geschieht in dem man sagt, dass es viele Schwingungen und eine kleine Dämpfung hat. Wir sind als mit einer Situation mit schwachen Reibungen konfrontiert. Was heisst das nun, wenn wir schwache Reibungen haben in dieser Gleichung? Dies heisst, dass Gamma klein ist. Aber, im Verhältnis zu was ist Gamma klein? In dieser Gleichung haben wir nur zwei Parameter. Es hat Gamma und Omega 0. Wir erinnern uns, dass Gamma und Omega 0 die selben Einheiten haben. Wir können also Gamma Quadrat mit Omega 0 Quadrat vergleichen. Schwache Reibung heisst also, dass Gamma Quadrat klein ist im Vergleich zu Omega 0 Quadrat. Wie hier. In dem Experiment haben wir einen Schwingenden Block im Wasser. Man könnte das Wasser durch dick- flüssiges Öl ersetzen. Wir hätten gar keine Schwingung mehr. Wir wären in einem anderen Regime. Diese verschiedenen Regime sind in zahlreichen Bücher erklärt. Ich gebe mich hier mit dem schwach gedämpften Regim zufrieden.

Notes

Summary

6m 56s

1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Nun, ich gebe euch erstmal die Lösung zu der Gleichung hier. Hier ist sie: Und ich schlage vor zu überprüfen, dass x von t die Differentialgleichung erfüllt. Um dies zu tun berechne ich x Punkt. Die Ausdrücke werden nun etwas schwerfällig. Ich sehe hier eine Exponential- funktion und hier einen Cosinus. Ich habe also das Produkt zweier Funktionen. Wenn ich dies ableite, werde ich die Summe zweier Ausdrücke bekommen. Wenn ich die Exponentialfunktion ableite kriege ich, ein minus Gamma mal diese Funktion, die Auftaucht. Wenn ich den Cosinus Ableite, so erhalte ich minus Sinus. Dies ist was ich hier geschrieben habe. Ich brauche nun x Punkt Punkt. Ich muss also diese Funktion nochmals nach der Zeit ableiten. Hier habe ich ein Produkt zweier Ausdrücke, dies ergibt eine Summe von zwei Ausdrücken. Und hier, zwei Ausdrücke. Insgesamt werde ich also vier Ausdrücke haben. Hier sind sie. Wenn ich die Exponentialfunktion ableite erhalte ich ein minus Gamma. Ich habe also ein Gamma Quadrat. Das ist dieser Ausdruck hier. Wenn ich den Cosinus ableite erhalte ich ein minus Omega 1 mal den Sinus. Mit dem Minus hier ergibt das plus Omega 1 Gamma mal die Sinusfunktion.

Notes

Summary

8m 47s

1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$2\gamma\dot{x}(t) = -2\gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - 2\omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \left(\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_1^2\right) e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Mécanique | 2013 24

Von diesem Ausdruck, wenn ich die Exponentialfunktion ableite, hätte ich plus Omega 1 gamma mal die Funktion. Schlussendlich, wenn ich den Sinus ableite, erhalte ich einen Cosinus mit einem Omega 1 Quadrat. Das ist dieser Ausdruck hier. Jetzt muss man dieses x Punkt Punkt nehmen und 2 Gamma mal x Punkt dazurechnen. Das heisst, 2 Gamma mal diesen Ausdruck hier, wie ich es hier habe. Und noch Omega 0 Quadrat mal x. Das heisst, Omgea 0 mal diese Funkton hier, wie ich hier geschrieben habe. Wir werden die Addition von den drei Ausdrücken machen. Das heisst, wir werden alle diese Ausdrücke addieren. Und wir werden 0 erhalten müssen. Ich konzentriere mich zuerst auf die Ausdrücke mit dem Cosinus. Es hat Ausdrücke mit Cosinus und solche mit Sinus. Hier die Ausdrücke mit Cosinus. Es hat noch einen, hier. ich habe Gamma Quadrat, hier, minus 2 Gamma Quadrat, da. Insgesamt also minus Gamma Quadrat. Ich habe ein Omega 0 Quadrat hier und schliesslich ein Omega 1 im Quadrat mit einem Minuszeichen. Ich fasse zusammen: wenn ich die Summe ausrechen, x Punkt Punkt, 2 Gamma x Punkt Omega 0 Quadrat x. Ich habe Omega 0 Quadrat, dieser hier. Das minus Gamma Quadrat, das sind diese zwei Ausdrücke zusammen.

Notes

Summary

10m 15s

1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$2\gamma\dot{x}(t) = -2\gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - 2\omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \left(\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_1^2\right) e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) = 0$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Mécanique | 2013 24

Und das Omega 1 Quadrat kommt hier. Wie sieht es mit dem Sinus aus? Ihr habt Omega 1 Gamma hier Dazu 1 Omega 1 Gamma, wir sind also auf dieser Linie, wir haben 2 Omega 2 Gamma. Aber auf der Linie haben wir minus 2 Omega 1 Gamma. Alle Ausdrücke mit Sinus lösen sich also auf. Was ist mit dem Rest? Der bleibt nur wenn ich Omega 1 im Quadrat gleich Omega 0 im Quadrat minus Gamma Quadrat wähle. Ich habe also die Differentialgleichung erfüllt. Ich habe, wie ich muss, ein 0 hier. Es ergibt 0. Ich habe also bewiesen, dass ich die Lösung gefunden habe. Ah, da ist noch etwas das ich zeigen möchte. Schaut euch diese Tabelle an, ihr seht, dass die Ausdrücke schnell ziemlich schwerfällig sind. Wir sind von dieser, relativ einfachen, Funktion ausgegangen und wenn wir sie zweimal ableiten, füllen wir eine ganze Linie, wie hier. Ich möchte von dieser Folie profitieren, um euch auf einen wichtigen Punkt in eurer Arbeitsmethode aufmerksam zu machen. Es ist sehr wichtig gewissenhaft und sehr sorgfältig zu sein beim Schreiben. Ihr seht, dass ich Omega 1 und Omega 0 eingeführt habe. Man sollte sie nicht verwechseln. Es hat hier Ausdrücke mit einer Exponetialfunktion. Man sollte diese gut sehen.

Notes

Summary

11m 53s

1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x(t) = e^{-\gamma t} C\cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C\cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C\sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C\cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1\gamma e^{-\gamma t} C\sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1\gamma e^{-\gamma t} C\sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C\cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$2\gamma\dot{x}(t) = -2\gamma^2 e^{-\gamma t} C\cos(\omega_1 t + \phi) - 2\omega_1\gamma e^{-\gamma t} C\sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e^{-\gamma t} C\cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \left(\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_1^2\right) e^{-\gamma t} C\cos(\omega_1 t + \phi) = 0$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Die Vorzeichen: man muss alle behalten. Wenn man diese Berechnungen macht ist man etwas wie ein Buchhalter. Und jeder Rappen zählt. Jede Schreibweise hat ihre Wichtigkeit. Jede Schreibweise hat einen eigenen physikalischen Sinn. Mann muss die Schreibweisen ein- halten um ans Ziel der Rechnung zu gelangen und man muss auch wissen wo man sich in der Rechnung befindet. Und keine Fehler machen, natürlich. Wie findet man diese Lösung?

Notes

Summary

13m 31s

2. Méthode générale

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{Essai :} \quad x = e^{\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Nun, es gibt eine allgemeine Methode um gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzulösen. Man sagt zweiter Ordnung weil es zweite Ableitungen hat. Die Methode besteht darin eine Lösung für eine Versuchsfunktion, in form einer Exponentialfunktion, Lambda t zu suchen. Wenn ich diese Funktion einmal ableite, so erhalte ich ein Lambda. Das ist eine Eigenschaft der Exponetialfunktion. Wenn ich zweimal ableite erhalte ich Lambda Quadrat. Wenn ich also diese Funktion hier in die Differentialgleichung einsetze, erhalte ich genau die Funktion selbst. Die Potenz Lambda t, mit der zweiten Ableitung, was mir Lambda Quadrat geben wird. Hier habe ich x Punkt, was mir ein Lambda geben wird. Ich habe also 2 Gamma Lambda. Hier das Omega 0 Quadrat wird mir genau die Funktion 2 hoch Lambda t geben. Das hier ist Null. Ich schreibe das rein. Das gibt mir folgendes Resultat. Und damit diese Gleichung erfüllt ist, muss dieses Polynom gleich Null sein. Gut, wenn man will, dass die Gleichung zu jeder Zeit erfüllt ist. Die Zeit erscheint hier. Nun, die Lösungen sind allgemein bekannt. Die Lösungen sind die eines Binoms. Ich habe sie folgendermassen geschrieben.

Notes

Summary

14m 02s

2. Méthode générale

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{Essai :} \quad x = e^{\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Und hier eine der Lösungen: Lambda 1 minus Gamma plus die Wurzel von Lambda 2 gleich minus Gamma minus die Quadratwurzel. Jetzt werdet ihr euch erinnern, dass wir abgemacht haben, mechanische Systeme mit schwacher Reibung uns anzuschauen. Die schwache Reibung bedeutet, dass Gamma viel kleiner ist als Omega. Wir haben hier also Wurzeln negativer Zahlen. Wir müssen also mit komplexen Zahlen arbeiten.

Notes

Summary

15m 42s

$$\lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$
$$\lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x = A e^{-\gamma t} e^{i\omega_1 t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t}$$
$$= e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t}\right]$$

Hier also meine Lösungen, geschrieben mit komplexen Zahlen. Lambda 1 und Lambda 2 mit i mal die Quadratwurzel einer Zahl, die jetzt positiv ist. Ich werde diese Quadratwurzel Omega 1 nennen. Meine allgemeine Lösung ist also eine lineare Kombination dieser zwei Lösungen. Die allgemeine Lösung x werde ich als einen Koeffizienten A mal e hoch minus Gamma t mal e hoch i Omega 1 t schreiben. Ich kann auch den anderen Ausdruck haben. Ich schreibe also einen Koeffizienten B e hoch minus Gamma t, e hoch minus i Omega 1 t. In diesem Ausdruck hier A und B sind im allgemeinen immaginäre Zahlen. Ah, komplexe Zahlen, Entschuldigung. x muss reell sein. x stellt die Koordinate des Punkts dar. Das ist eine reelle Zahl. Wir müssen also sicherstellen, dass dieser Ausdruck reell wird. Dies kann ich folgendermassen machen: Ich sehe, dass ich e hoch minus Gamma t schreiben kann, diesen Ausdruck klammere ich aus. Ich habe A e hoch i Omega 1 t. Und B e hoch minus i Omega 1 t. Hier habe ich eine komplexe Zahl und ihre komplexe Konjugation. Ich sehe, dass eine Möglichkeit um sicherzustellen, dass x reell ist ist, B gleich der komplexen Konjugation von A zu stellen. In dem Fall habe ich die Summe einer komplexen Zahl und ihrer komplexen Konjugation. Das ist immer eine reelle Zahl.

Notes

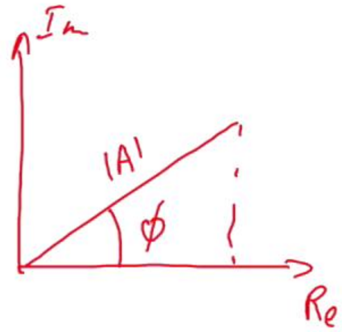
Summary

16m 14s

2. Eq. horaire obtenue par une méthode générale

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\, e^{i\omega_1 t} + A^*\, e^{-i\omega_1 t}\right)$$

$$A = |A| e^{i\phi}$$



Ich werde also als Lösung ein Ausdruck mit der folgenden Form nehmen: das e hoch minus Gamma t kommt von diesen Ausdrücken. und hier schreibe ich A und A*, um die komplexe Konjugation von A zu schreiben. Und ich habe jetzt, eine Zahl plus ihre komplexe Konjugation. Das ist mit Sicherheit reell. Von hier ausgehend, um zur eben beschriebenen Lösung zu kommen, werde ich A als Betrag von A schreiben. A ist eine komplexe Zahl. Hier ihr Betrag und hier e hoch i, hier die Phase (das Argument). Um die Dinge darzustellen kann ich eine Zeichnung der komplexen Ebene machen. Hier der Betrag von A. Die Phase Phi ist die Zahl die man hier sieht. Hier haben wir den reellen und hier den imaginären Teil von A. Gut. Wir können A folgendermassen darstellen.

Notes

Summary

18m 12s

2. Eq. horaire obtenue par une méthode générale

$$x(t) = e^{-\gamma t}\big(A\,e^{i\omega_1\,t} + A^*\,e^{-i\omega_1\,t}\big)$$

$$A = |A|e^{i\phi}$$

$$x(t) = |A|e^{-\gamma t}\big(e^{i\omega_1\,t+i\phi} + e^{-i\omega_1\,t-i\phi}\big)$$

$$x(t) = 2|A|e^{-\gamma t}\cos\big(\omega_1\,t + \phi\big)$$

Wenn wir diesen Ausdruck für A hier hin machen, so haben wir den Betrag von A der rauskommt. Wir habe e hoch i Phi, hier. Und da wir ein A* hatten, das heisst die komplexe Konjugation von A, kommt ein e hoch minus i Phi hier hin. Man sieht hier nochmals sehr gut, dass wir eine komplexe Zahl und ihre komplexe Konjugation haben. Wir haben also zweimal den reellen teil, also zweimal den Cosinus. Und mein x von t nimmt wirklich die gegebene Form an. Nur hier habe ich 2 A, anstatt dem gegebenen Koeffizienten C. Noch einmal, Omega 1 ist die Quadratwurzel wie ich schon gesagt habe. Ich fasse die Situation zusammen.

Notes

Summary

19m 16s

1. Equation horaire fournie

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Mécanique | 2013 38

Hier ist nun meine Lösung, mit Omega 1, welches nicht ganz gleich Omega 0 ist. Omega 0 ist die Wurzel von k über m. Omega 1 wird durch die Reibung verändert. Dieser Ausdruck hier erscheint. Und ich kann eine Skizze der Kurve machen.

Notes

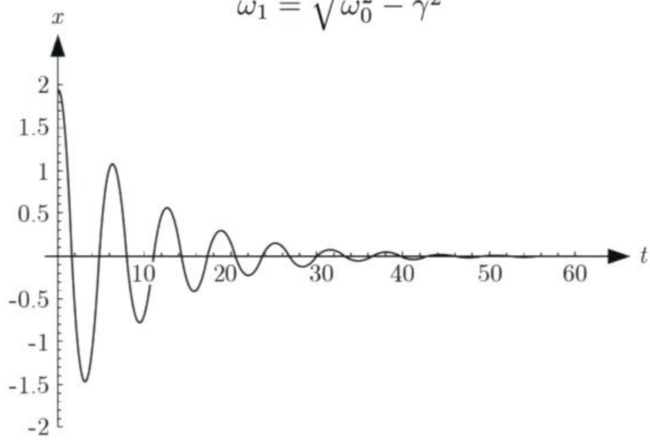
Summary

20m 01s

1. Equation horaire fournie

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Mécanique | 2013 39

So, jetzt, wir haben alles das wir gesucht haben. Wir haben eine Schwingung die gedämpft ist. Die Dämpfung ist hier durch die Exponentialfunktion gegeben. Gamma steht für die Reibung. Je grösser Gamma ist, umso grösser ist auch die Reibung. Und je grösser Gamma ist, umso mehr wir die Amplitude in kurzer Zeit kleiner werden.

Notes

Summary

20m 22s