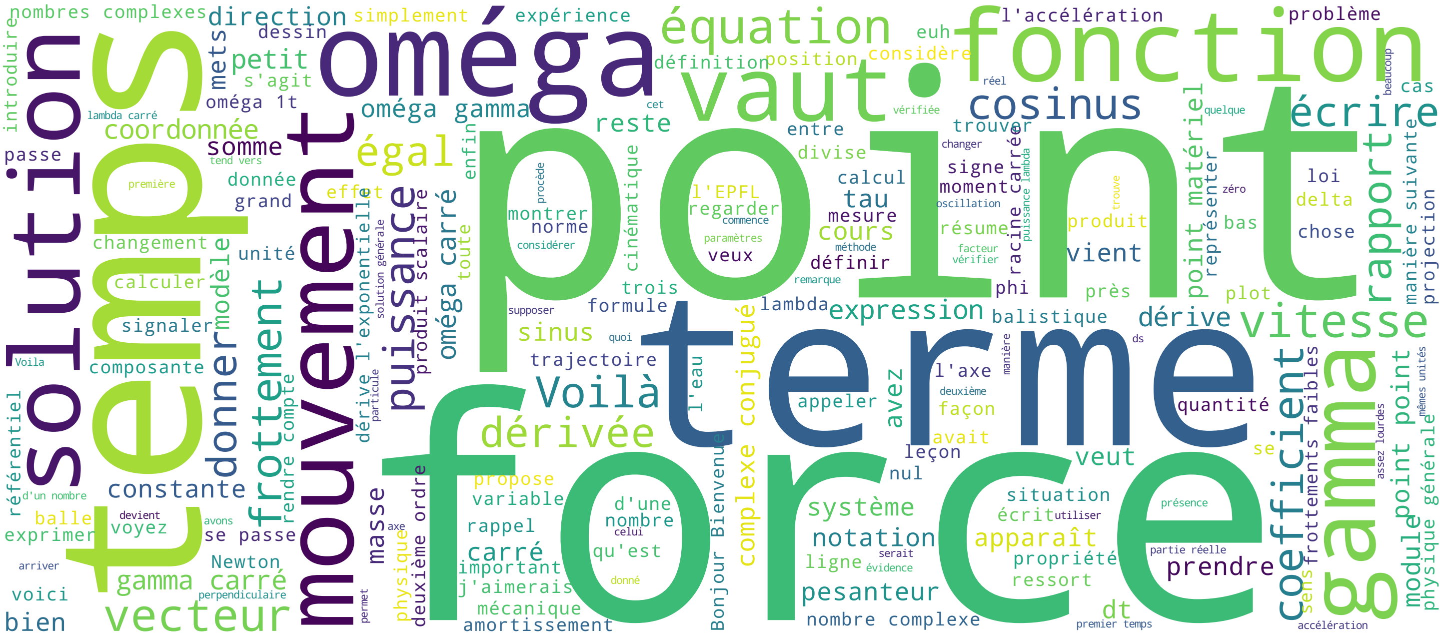
L'oscillateur harmonique amorti

Mécanique, cours 5.3

Jean-Philippe Ansermet

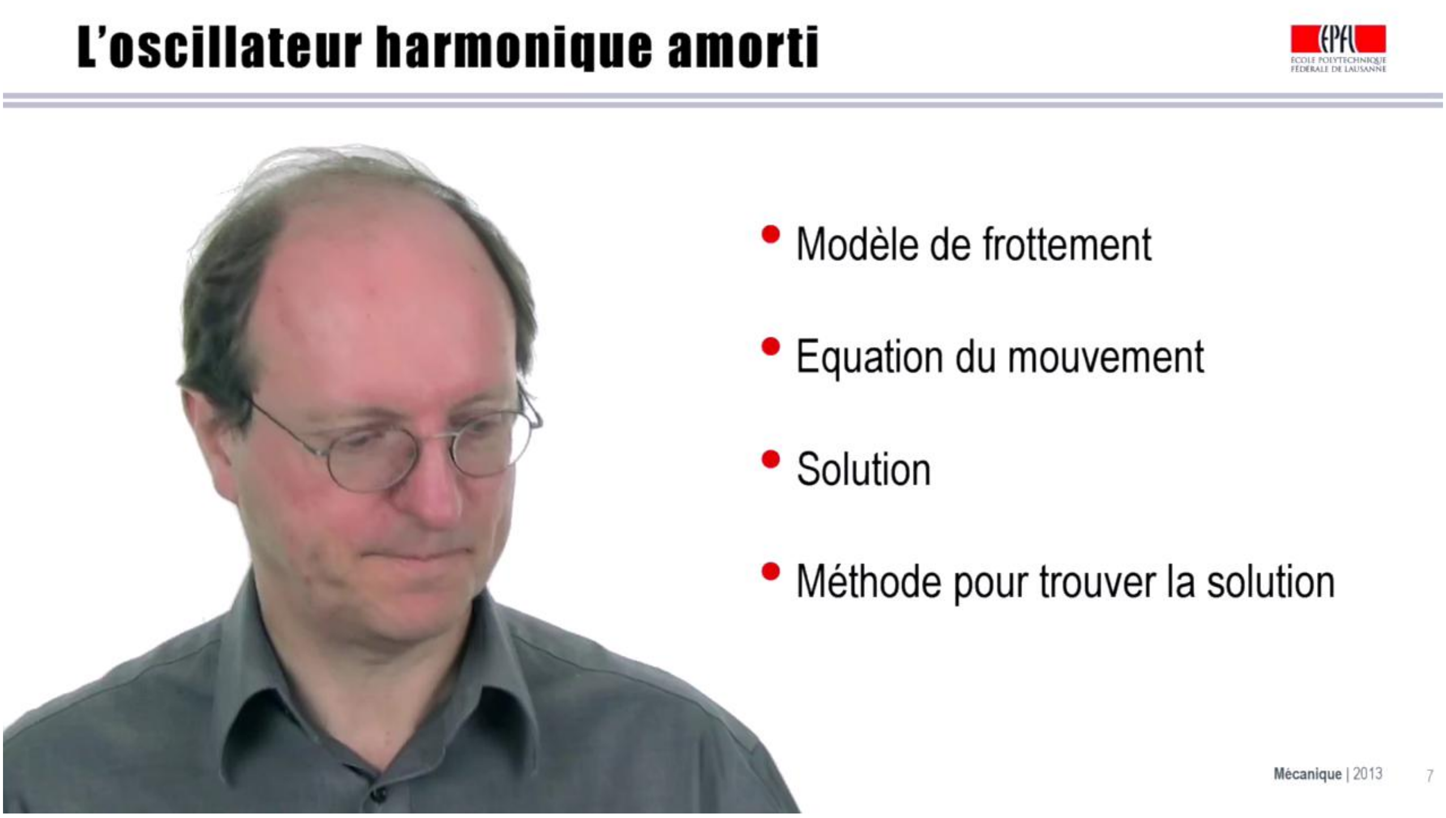
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-5-4



Search MOOC

Video

EPFL



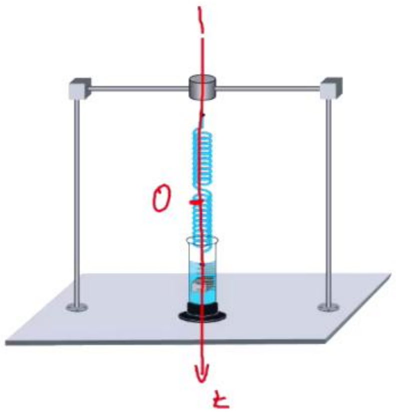
Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Nous venons d'analyser le problème dit de l'oscillateur harmonique, et nous avons trouvé comme solution, un mouvement périodique, donc une oscillation d'amplitude, qui reste tout le temps la même au cours du temps. Or, nous savons autour de nous, que les oscillateurs, à moins qu'ils soient sollicités par une force, finissent tous par s'arrêter. Nous aimerions donc, améliorer notre modèle pour rendre compte du fait que, il y a un amortissement. Je vais, par conséquent, proposer un modèle de frottement. On prendra le même que pour la balistique. Avec ce modèle de frottement, et la force de rappel, on va écrire des équations du mouvement. On aura là, un problème, clairement plus difficile que tout ce qu'on a eu jusqu'à maintenant. Et je vais, pour, int, on va pouvoir intégrer les équations du mouvement, mais ce n'est pas facile. Euh, on doit utiliser les nombres complexes, que tout le monde ne connait pas. Donc, dans un premier temps, je vais donner la solution, et on va vérifier que la solution est correcte. Et dans un deuxième temps, pour ceux qui sont déjà familiers avec les nombres complexes, on verra la méthode qui permet de trouver cette solution.

Notes

Summary

0m 03s

Oscillateur harmonique amorti



modèle de force : $\boldsymbol{F}_f = -b\boldsymbol{v}$

cinématique : $v_x = \dot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

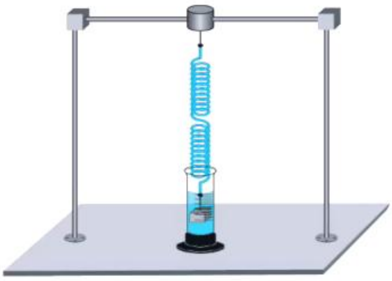
Je considère donc, un système mécanique, tel que celui-ci. Un ressort, une masse plongés dans de l'eau. Dans ce cas-là, on a clairement un amortissement. Je vais décider d'une, un modèle de force de frottement. Comme en balistique, je vais supposer une force qui s'oppose à la vitesse. Donc, ici, mon b est un coefficient positif. Et je mets le signe moins, pour indiquer que la force s'oppose au mouvement. La cinématique, si j'utilise une coordonnée x, pour repérer la position de mon point matériel, j'ai simplement que la vitesse, qui intervient dans la force, ici, vaut x point. Et mon équation du mouvement, en appliquant f = ma, on a m fois l'accélération, ici. La première force, qui est ma force de rappel. Et voilà ma force de frottement visqueux. Certains peuvent se demander, mais qu'est ce qu'il se passe dans l'auditoire? On a un système qui est soumis à la pesanteur. Je vais maintenant vous montrer, que sous l'effet de la pesanteur, on a, le même, la même équation du mouvement, avec une translation des coordonnées. Pour se faire, je vais définir un axe auxiliaire, d'ac, de coordonnées z. Quelque part, par ici, j'ai la position au repos.

Notes

Summary

1m 33s

Oscillateur harmonique amorti



modèle de force : $\boldsymbol{F}_f = -b\boldsymbol{v}$

cinématique : $v_x = \dot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

Notation : $\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{b}{2m} = \gamma$

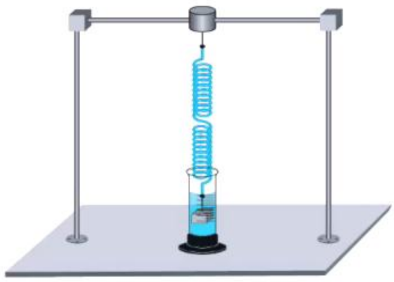
Mécanique | 2013 12

Et si je veux écrire l'équation du mouvement pour cette coordonnée z, en présence de la pesanteur, je vais avoir m z point point, qui vaut, la force de rappel, moins k z. La pesanteur, alors la pesanteur est dirigée vers le bas. Donc, j'ai une force m g, comme ceci, qui est donc, donne un terme m g positif, puisque j'ai, pour décider de prendre z, vers le bas. Il me reste la force de frottement, moins b, fois z point. Maintenant, on voit ici que je peux écrire z. Je mets le k en évidence. J'ai le k qui apparaît ici, je dois changer de signe, là. J'ai simplement ici, ce que je peux appeler x. Alors, j'ai moins k x. La dérivée, par rapport au temps, de x, va nous donner la même, que la dérivée de cette variable là. Donc, x point, est égal à z point. Donc ici, je peux écrire m, pardon, je vais écrire m x point point, pour la dérivée de x. Et ici, j'ai moins b, x point. x point est égal à z point. Voilà. Donc, je peux très bien admettre, que mon équation du mouvement est celle-ci, même en présence de pesanteurs. Maintenant, avant d'avancer dans l'analyse de cette solution, je propose un changement de variable. Et voilà, comment je procède. C'est assez caractéristique, la démarche du physicien.

Notes

Summary

3m 12s



modèle de force : $\boldsymbol{F}_f = -b\boldsymbol{v}$

cinématique : $v_x = \dot{x}$

Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$\frac{b}{m}$

Notation : $\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{b}{2m} = \gamma$

Mécanique | 2013 12

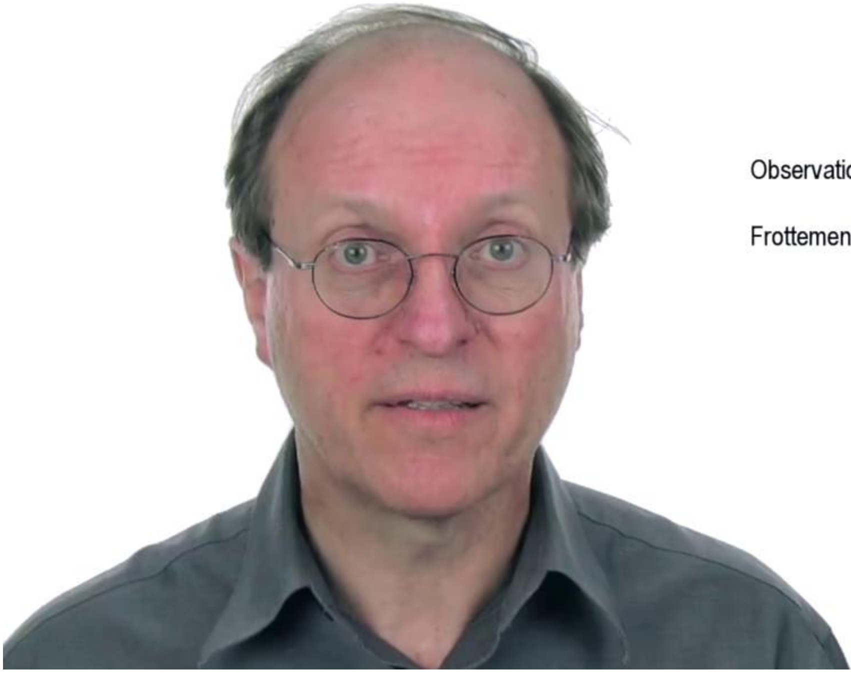
Je remarque, ici, que si je divise par m, j'ai le coefficient k sur m qui apparaît. k sur m, c'est exactement le même coefficient qu'on avait, en absence de frottement. Donc, je veux me souvenir, de la solution que j'avais, quand je pouvais négliger les frottements. Je vais noter le coefficient k sur m, non plus oméga, mais oméga 0, au carré, pour signaler que, il s'agit, ici, d'une constante qui est déterminée par les paramètres du modèle. Et maintenant, que vaut le coefficient b sur m? Si je divise par m, ici, j'ai un coefficient. Si je divise par m, j'ai ici, le coefficient b sur m. Quelles sont les unités du coefficient b sur m? Alors, on a b sur m, fois x point, qui doit avoir les mêmes unités que x point point. Donc b sur m, a les unités de un sur un temps. Ou bien, b sur m a les unités d'une pulsation. Alors, je choisis d'écrire, b sur deux m = gamma. Pourquoi j'ajoute un facteur 2? C'est parce que ça rend les expressions plus commodes, par la suite. Ça, il faut avancer dans les calculs, pour voir que, c'est une bonne idée, d'introduire au facteur 2. Ce qui est important pour moi, c'est que vous voyiez, ici, comment je procède pour changer de notation, et exprimer des paramètres expérimentaux, avec des symboles qui sont suggestifs de, des grandeurs impliquées.

Notes

Summary

5m 09s

Equation du mouvement



$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Observation : beaucoup d'oscillations dans la décroissance

Frottements faibles

$$\text{Unités :} \quad [\gamma^2] = [\omega_0^2]$$

$$\gamma^2 \ll \omega_0^2$$

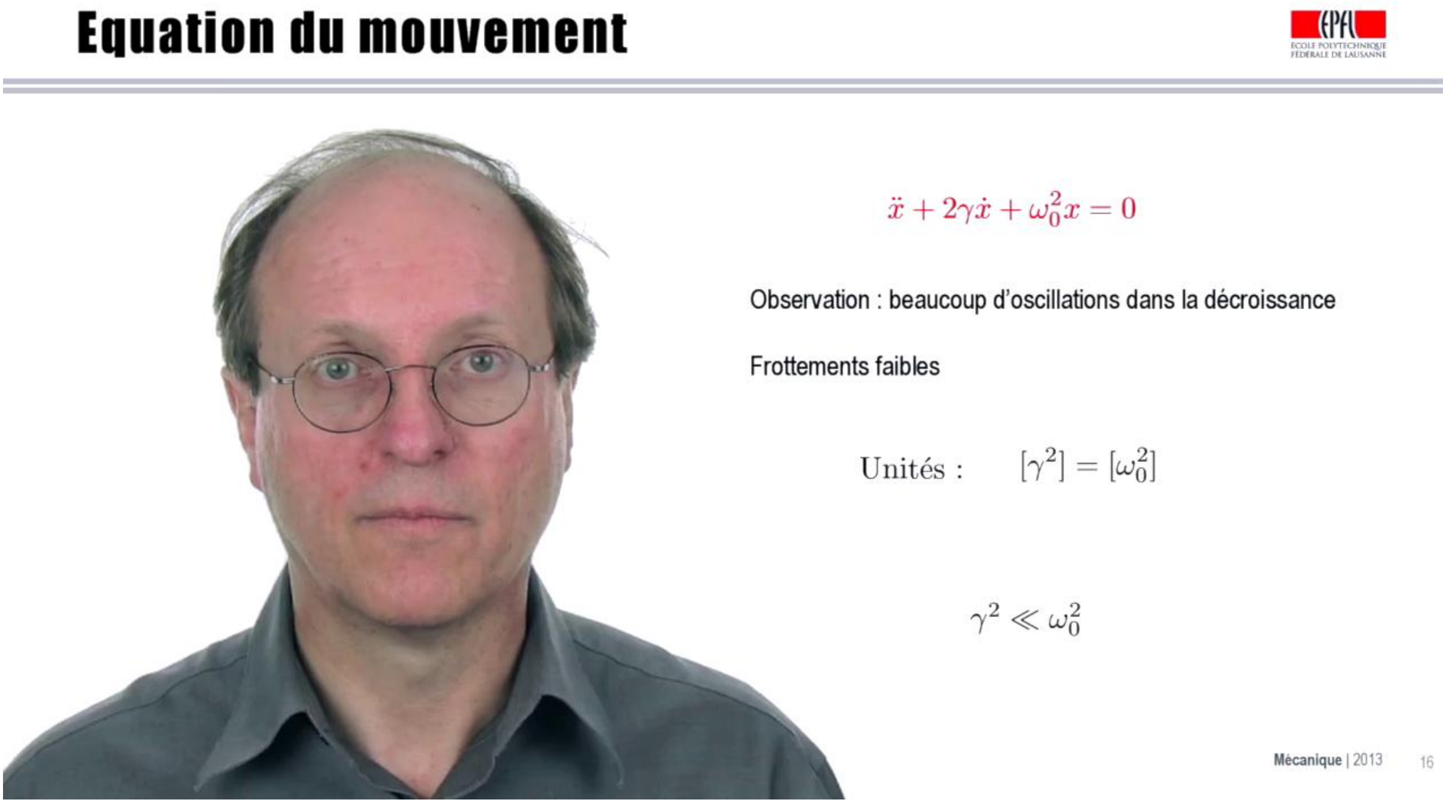
Mécanique | 2013 16

Voici donc, notre équation du mouvement. Je cherche la fonction x de t, qui satisfasse cette équation. Avant de passer à la solution, je dois préciser dans quel régime physique, je me situe. Vous avez vu, les vidéos d'expérience. On est en train d'analyser le mouvement, d'un objet qui aussi, plusieurs fois, avant qu'on puisse observer une atténuation notoire de son oscillation. Il faut maintenant rendre compte de cette situation. Cela se fait en disant que, on a, donc, beaucoup d'oscillations sur une petite décroissance. On a donc, une situation avec des frottements faibles. Comme, qu'est-ce que ça veut dire, quand on a des frottements faibles dans cette équation-là? Ça veut dire que gamma est petit. Mais gamma est petit par rapport à quoi? Alors, dans cette équation là, il n'y a que deux paramètres. Il y a gamma, et oméga 0. Et on se souvient, que gamma et oméga 0 ont les mêmes unités. Donc, il s'agit de comparer gamma carré, à oméga 0. Et donc, avoir des frottements faibles, c'est supposer que gamma carré, est petit, par rapport à oméga 0 carré. Comme ceci. Dans l'expérience, on a un plot oscillant, dans de l'eau. On pourrait remplacer l'eau, par de l'huile épaisse.

Notes

Summary

6m 54s



On n'aurait plus du tout d'oscillation. On serait dans un autre régime. De nombreux livres traitent ces différents régimes. Ici, j'ai choisi, de me concentrer sur le régime faiblement amorti. Maintenant, pour cette équation-là, dans un premier temps, je vous donne la solution.

Notes

Summary

8m 30s

1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

La voici. Et je me propose de vérifier, que, ce x de t, satisfait l'équation différencielle. Pour ce faire, je calcule, x point. Alors, les expressions vont devenir assez lourdes. Je remarque, ici, que j'ai une exponentielle, et ici, un cosinus. J'ai le produit de deux fonctions. Lorsque je dérive, je vais obtenir la somme de deux termes. En effet, quand je dérive l'exponentielle, j'ai un moins gamma, fois cette fonction qui apparaît. Quand je dérive le cosinus, j'ai moins sinus qui va apparaître. C'est ce que j'ai écrit ici. Maintenant, j'ai besoin, de x point point. Donc, je dois dériver cette fonction, encore une fois, par rapport au temps. Ici, j'ai un produit de deux termes. Ça va me donner, la somme de deux termes. Et ici, deux termes. Donc, au total, je dois avoir, quatre termes. Les voici. Si je dérive l'exponentielle, j'ai un moins gamma qui vient. Donc j'ai un gamma carré. C'est ce terme-là. Si je dérive, maintenant, ce cosinus, j'ai un moins oméga 1, fois le sinus. Avec le moins qu'il y a là, ça devient plus oméga 1, gamma, fois la fonction en sinus. De ce terme-là, si je dérive l'exponentielle, j'aurais plus oméga 1, gamma, fois la fonction. Et enfin, si je dérive ce sinus, j'ai un cosinus qui apparaît, avec un oméga 1 carré.

Notes

Summary

8m 52s

1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$2\gamma\dot{x}(t) = -2\gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - 2\omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \left(\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_1^2\right) e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

C'est ce terme-là. Alors maintenant, on doit prendre, ce x point point, ajouter 2 gamma, fois x point. C'est 2 gamma, fois ce terme là. Ce que j'ai écrit, ici. Et encore, oméga 0 carré, fois x, c'est-à-dire, oméga 0, fois cette fonction-là, ce que j'ai écrit, ici. On va faire la somme de ces trois termes. Ça veut dire qu'on va sommer tous ces termes. Et on doit trouver, 0. Alors, je me concentre d'abord, sur les termes en cosinus. Il y a des termes en cosinus, et il y a des termes en sinus. Voilà les termes en cosinus. Il y en a encore un, là. J'ai gamma carré, ici, et moins 2 gamma carré, là. Donc, j'ai moins gamma carré. J'ai un oméga 0 carré, ici. Et enfin, j'ai oméga 1, au carré, avec un signe moins. Je résume, quand je fais la somme, x point point, 2 gamma x point, oméga 0 carré x. J'ai le oméga 0 carré, c'était celui-là. Le moins gamma carré, c'est ces deux termes ensemble. Et le oméga 1 carré, il vient ici. Qu'en est-il des termes en sinus? Vous avez, oméga 1 gamma, ici. Encore 1 oméga 1 gamma, donc, on est, sur cette ligne, on a 2 oméga 1 gamma. Mais sur cette ligne, on a moins 2 oméga 1 gamma. Donc tous les termes en sinus s'annulent. Qu'est-ce qu'il reste?

Notes

Summary

10m 31s

1. Solution donnée, à vérifier

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - \omega_1 e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi) - \omega_1^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$2\gamma\dot{x}(t) = -2\gamma^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) - 2\omega_1 \gamma e^{-\gamma t} C \sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \left(\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega_1^2\right) e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi) = 0$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Mécanique | 2013 24

Il reste que si je prends oméga 1 au carré égal oméga 0, au carré, moins gamma carré, alors, j'ai satisfait mon équation différentielle. J'ai bien un 0, ici. J'obtiens 0. Voila, j'ai donc montré que j'ai obtenu la solution. Oh, il y a encore une chose, que j'aimerais montrer. Vous considerez ce tableau, vous voyez que les expressions sont rapidement assez lourdes. On est partis de ce, cette fonction relativement simple, et quand on la dérive deux fois, on occupe toute une ligne, comme ceci. Je, j'aimerais profiter de ce transparent, pour vous signaler un point important dans votre méthode de travail. Il est très important d'être méticuleux dans les notations. Vous voyez que j'ai introduit oméga 1, oméga 0. Il faut pas les confondre. Il y a des termes en exponentielle qui apparaissent,ici. Il ne faut pas qu'on, il faut qu'on le voit clairement. Les signes, il faut tous les garder. Au fond, quand on fait ces calculs-là, on est un petit peu comme un comptable. Et chaque centime compte. Chaque notation a son importance. Chaque notation a un sens physique particulier. Il faut respecter les notations, pour arriver au bout du calcul, et encore, savoir, où on en est. Et ne pas faire de fautes, bien sûr. Comment est-ce qu'on trouve cette solution?

Notes

Summary

12m 15s

2. Méthode générale

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{Essai :} \quad x = e^{\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Alors, il y a une méthode générale, pour traiter une équation différencielle, à coefficient constant, du deuxième ordre. On dit qu'elle est du deuxième ordre, parce qu'il y a des dérivés deuxièmes. La méthode consiste à chercher une solution pour une fonction d'essai exponentielle, lambda t. Si je dérive une fois, cette fonction-là, je vais avoir un lambda, qui apparaît. Hein, c'est une propriété de l'exponentielle. Je dérive deux fois, j'aurais lambda carré. Donc, quand je mets cette fonction-là, dans l'équation différentielle. Ici, j'aurai juste la fonction elle-même. Le puissance lambda t, avec la dérivée deuxième, qui va me donner le lambda carré. Ici, j'aurai le x point, qui va me donner un lambda. Donc j'aurai 2 gamma, lambda. Là, le oméga 0 carré, va juste me donner la fonction, 2 puissance lambda t. Ça, c'est nul. Si je mets ça au propre, ça me donne le résultat suivant, et pour que ce, cette égalité soit vérifiée, il faut que ce polynôme soit nul. Bon, si on veut que l'égalité soit vérifiée, en tout temps. Temps apparaissant ici. Alors les solutions, c'est bien connu. Les solutions, c'est celles du binôme. Je les ai écrites de la manière suivante.

Notes

Summary

14m 02s

2. Méthode générale

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Essai : $x = e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Voila une solution lambda 1, moins gamma plus la racine carrée, lambda 2, égal moins gamma, moins la racine carrée. Maintenant, vous vous souvenez que, on a convenu, de considérer des systèmes mécaniques, où le frottement était faible. Et le frottement faible, se traduit par le fait que gamma est beaucoup plus petit que oméga. Donc, ici, on a des racines carrées de nombres négatifs. Il faut donc introduire des nombres complexes.

Notes

Summary

15m 42s

$$\lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$
$$\lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x = A e^{-\gamma t} e^{i\omega_1 t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t}$$
$$= e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t}\right]$$

Alors, voilà mes solutions écrites, avec les nombres complexes. Lambda 1, et lambda 2, avec i fois la racine carrée d'un nombre qui est maintenant positif. Et je vais convenir d'appeler oméga 1, cette racine carrée. Donc, ma solution générale, est une combinaison linéaire de ces deux solutions. La solution générale x, je vais l'écrire comme un coefficient A, fois e à la puissance, moins gamma t, fois e à la puissance i, oméga 1t. Je peux avoir aussi l'autre terme. Donc, je vais écrire un coefficient B, e puissance moins gamma t, e puissance moins i, oméga 1t. Dans cette expression-là, A et B, en principe, sont des nombres imaginaires. Maintenant, euh, des nombres complexes, pardon. x, doit être réel. x représente la coordonnée du point. C'est un nombre réel. Donc, on doit assurer que cette expression soit réelle. Alors, je peux le faire de la manière suivante: je vois que je peux écrire e puissance moins gamma t, que je mets en évidence. J'ai A, e puissance i, oméga 1t. Et B, e puissance moins i, oméga 1t. Ici, j'ai un nombre complexe, et son complexe conjugué. Et je vois que, une façon de garantir que x, soit réel, c'est de prendre B, complexe conjugué de A. À ce moment-là, j'ai la somme d'un nombre complexe, et son complexe conjugué. Et ça, c'est toujours réel.

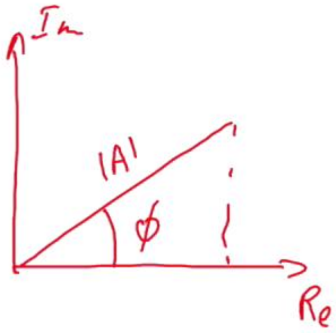
Notes

Summary

16m 14s

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\, e^{i\omega_1 t} + A^*\, e^{-i\omega_1 t}\right)$$

$$A = |A| e^{i\phi}$$



Donc, je vais prendre comme solution, une expression de cette forme-là, le e puissance moins gamma t, vient de ces termes. Et ici, je vais écrire A, et A*, pour signifier le complexe conjugué de A. Et j'ai donc, un nombre plus son complexe conjugué, qui est assurément réel. Partant de là, pour arriver à la solution, comme annoncé au début, je vais écrire A, comme étant le module de A. A est un nombre complexe. Voila son module, et voila e puissance i, voila phase. Alors, pour représenter les choses, je peux faire un dessin du bloc complexe, pour le nombre A. Voila, le module de A. La phase phi, c'est le nombre qu'on a ici. Ici, on a la partie réelle de A, et ici, la partie imaginaire. D'accord. Et on peut représenter A, de cette manière-là.

Notes

Summary

18m 12s

2. Eq. horaire obtenue par une méthode générale

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\, e^{i\omega_1 t} + A^*\, e^{-i\omega_1 t}\right)$$

$$A = |A|e^{i\phi}$$

$$x(t) = |A|e^{-\gamma t}\left(e^{i\omega_1 t + i\phi} + \, e^{-i\omega_1 t - i\phi}\right)$$

$$x(t) = 2|A|e^{-\gamma t}\cos\left(\omega_1 t + \phi\right)$$

Quand on met cette expression de A, là-dedans, on a le module de A, qui sort, on a e puissance i phi, ici, et comme on avait un A*, c'est à dire le complexe conjugué de A, on e puissance moins i phi, qui vient là. Et on voit bien, encore une fois, qu'on a un nombre complexe, plus son complexe conjugué. Donc, on a deux fois la partie réelle, donc deux fois, le cosinus. Et donc, j'ai finalement, mon x de t, qui a la forme annoncée. Simplement, 2, j'ai 2 A, là où j'avais annoncé un cofficient C. Et encore une fois, le oméga 1, c'est la racine carrée, comme je l'avais déjà donnée. Je résume la situation.

Notes

Summary

19m 16s

1. Equation horaire fournie

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Mécanique | 2013 38

Voilà ma solution, avec le oméga 1, qui n'est pas tout à fait le oméga 0. Donc, oméga 0, c'est racine de k sur m. Oméga 1 est modifié par le frottement. On a ce terme qui apparaît. Et, euh, je peux faire une esquisse de la courbe.

Notes

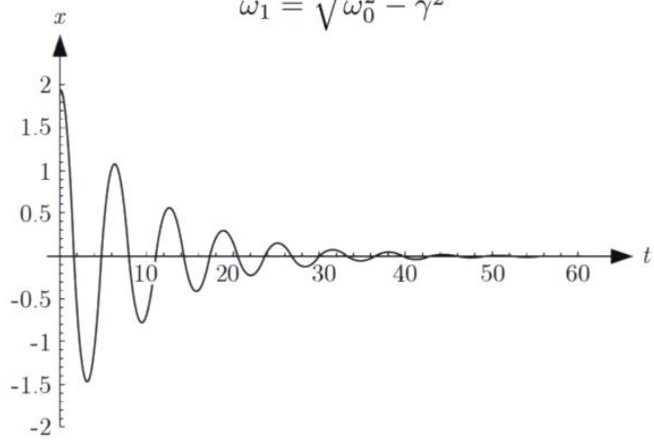
Summary

20m 01s

1. Equation horaire fournie

$$x(t) = e^{-\gamma t} C \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Mécanique | 2013 39

Voilà, maintenant, nous avons, ce que nous avons cherché d'obtenir. C'est-à-dire, une oscillation, mais qui est amortie. L'amortissement, il est donné par l'exponentiel, ici. Gamma représente le frottement. Plus gamma est grand, plus le frottement est grand. Et plus gamma est grand, plus l'amplitude décroît sur des temps courts.

Notes

Summary

20m 22s