ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-6

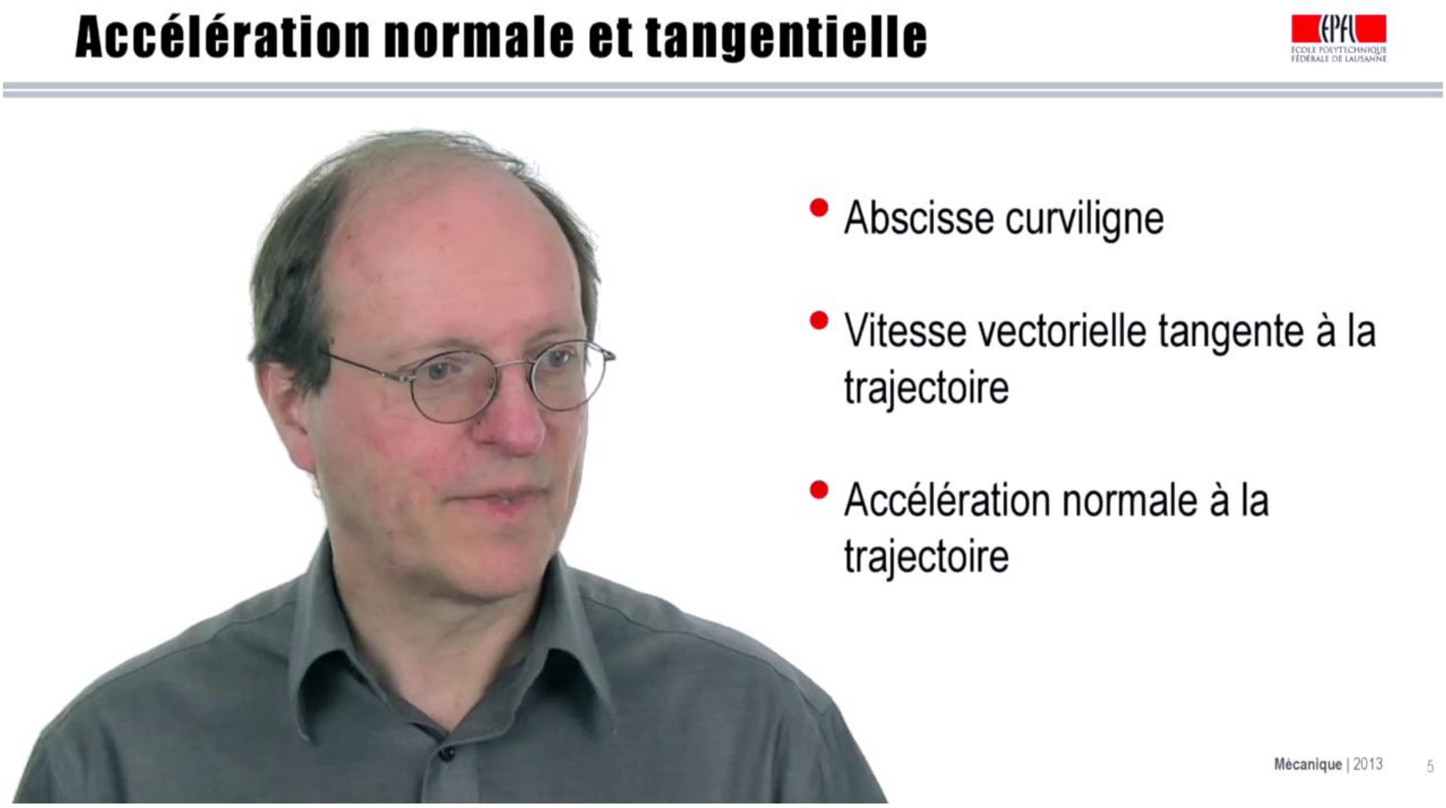
Accélération normale et tangentielle

Mécanique, cours 6.1

Jean-Philippe Ansermet

Video

EPFL



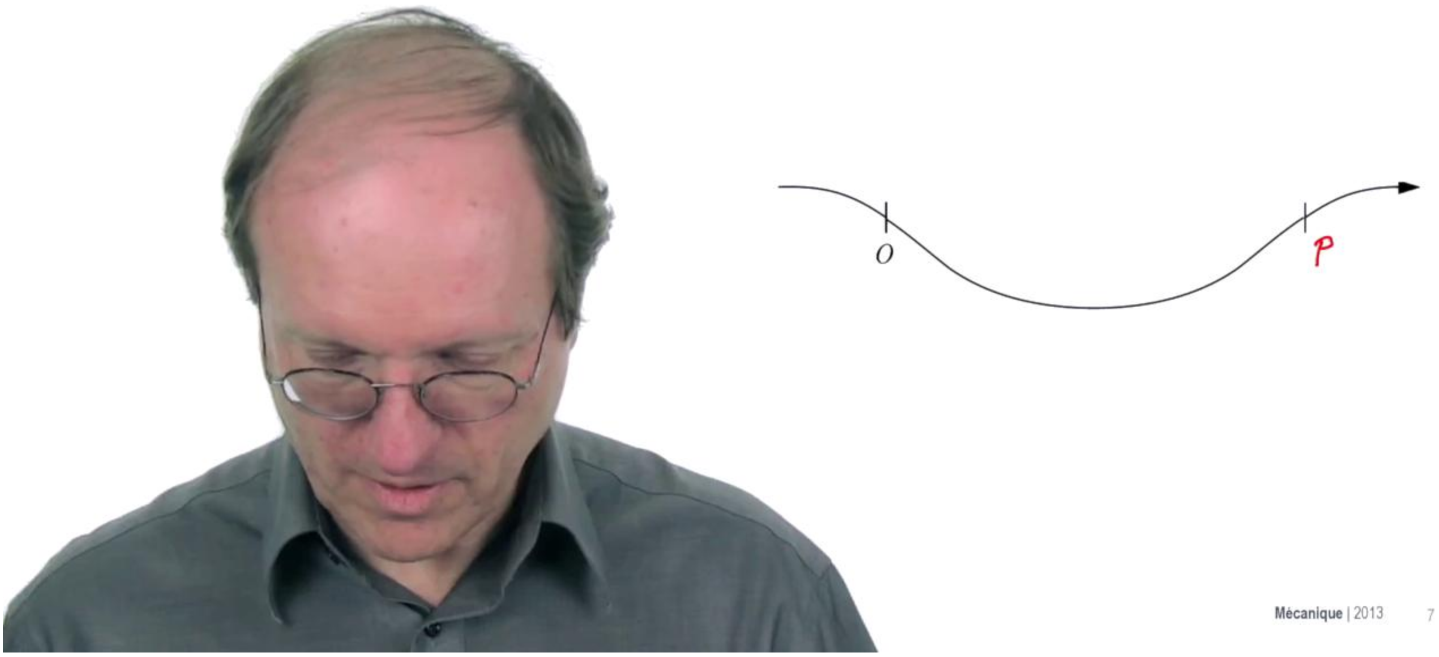
Hallo und wilkommen zur Vorlesung "Allgemeine Physik" der EPFL. In dieser Lektion möchte ich die vektorielle Beschleunigung wieder anschauen. Wir haben mit dem zweiten newtonschen Gesetz gesehen, dass wenn die Geschwindigkeit eines Massepunktes verändert wird, heisst es, dass eine Kraft auf diesen wirkt. Diese Veränderung der Geschwindigkeit wird Beschleunigung genennt. Es ist also wichtig, um die Dynamik zu verstehen, wirklich zu wissen was eine vektorielle Beschleunigung ist. Um dies zu erreichen, werde ich die Bogenlänge benutzen. Damit werde ich merken, dass die vektorielle Geschwindigkeit immer tengential zur Trajektorie ist, aber, dass die Beschleunigung, nicht nur tangential ist, sondern, dass sie auch eine Normalkomponente besitzt.

Notes

Summary

0m 03s

Définition : abscisse curviligne



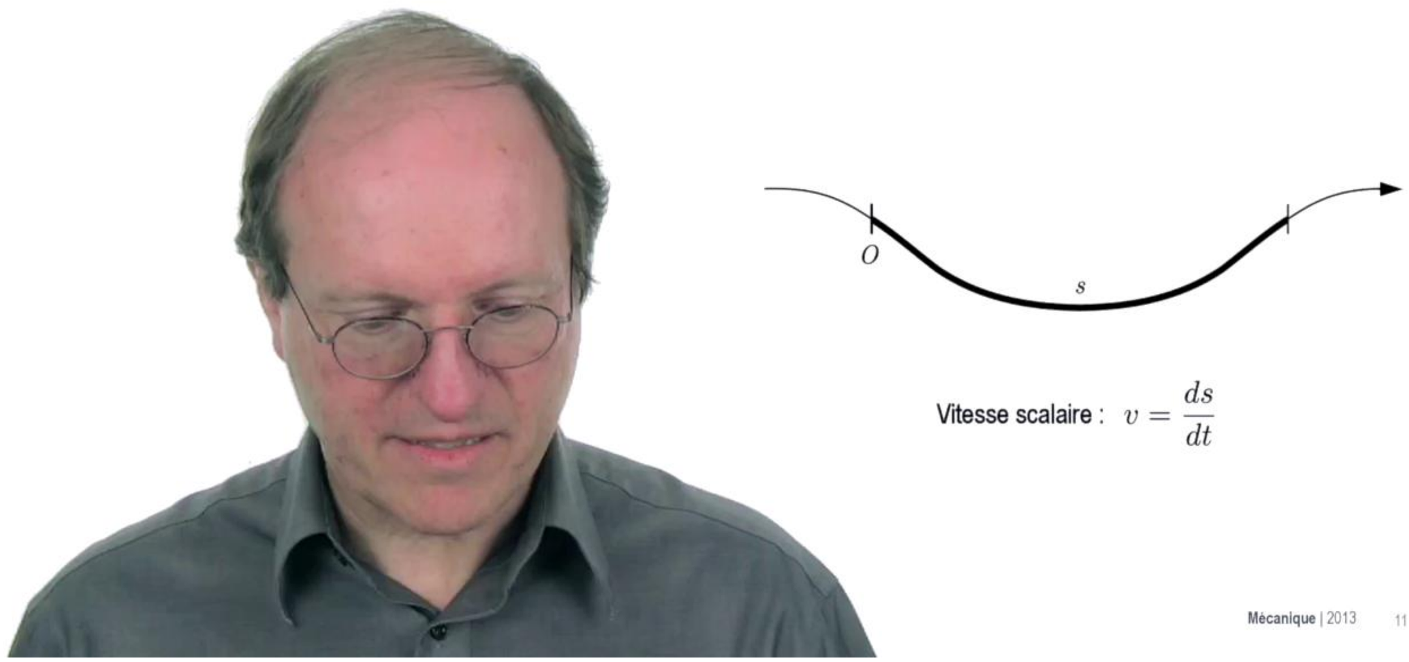
Ich beginne mit der Definition der Bogenlänge. Stellen Sie sich vor, dass man die Trajektorie eines Massepunktes kennt. Dieser Massepunkt ist hier, und ich definiere einen Ursprung auf der Trajektorie. Dazu wähle ich eine Richtung für die Trajektorie. Jetzt kann ich also beschreiben wo sich der Massepunkt auf der Trajektorie befindet mit Hilfe der Weglänge die ich s nenne.

Notes

Summary

1m 00s

Vitesse scalaire avec abscisse curviligne



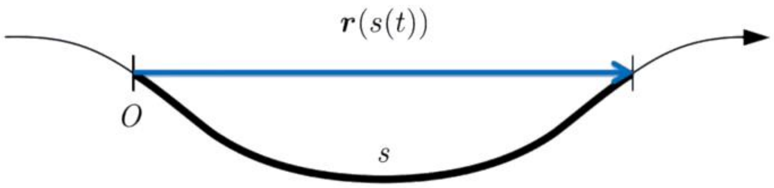
S ist die Bogenlänge. Nun definiere ich noch die skalare Geschwindigkeit. Diese skalare Geschwindigkeit ist die Distanz über die Zeit, wenn man die Limes für delta t gegen 0. Die Distanz wird durch s ausgedrückt und damit ist es klar, dass die skalare Geschwindigkeit die zeitliche Ableitung von s sein wird. Sowie hier. Ich komme nun zur skalaren Geschwindigkeit.

Notes

Summary

1m 37s

Vitesse vectorielle et abscisse curviligne



Vitesse vectorielle : $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$

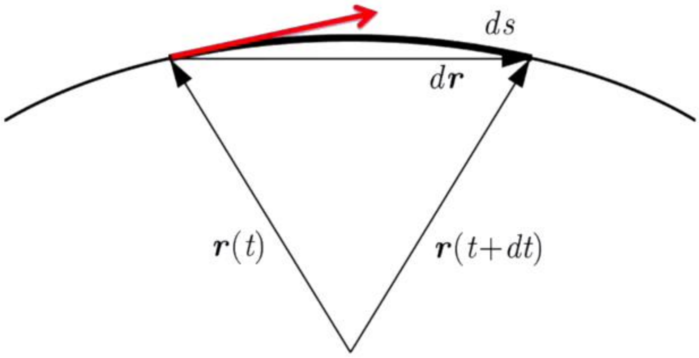
Ich behaupte nochmals, dass ich eine orientierte Trajktorie habe, ich definiere einen Ursprungspunkt der Bogenlänge, mein P Punkt, der hier ist, kann ich mit Hilfe der Bogenlänge s beschreiben, und ich schlage vor, die vektorielle Geschwindigkeit zu berechnen. Diese wird als dr über dt bezeichnet, wo r den Vektor ist. Jetzt will ich diese Geschwindigkeit mit Hilfe der Bogenlänge audrücken. Ich mache Folgendes: zuerst betrachte ich r, als wäre es eine Funktion von s, welches eine Funktion von der Zeit ist. Also muss ich eine Funktion von einer Funktion ableiten: r Funktion von s, s Funvtion der Zeit. Die Berechnung führt zu dieser Lösung wenn man die Regel der Ableitung einer Funktion von einer Funktion anwendet. Hier ist mein dr über ds und hier habe ich ds über dt. Diese Grösse ist, wie schon gesagt, die skalare Geschwindigkeit v. Die vektorielle Geschwindigkeit gleicht also der skalaren Geschwindigkeit mal diesen Vektor. Wir müssen zunächst die physikalische Bedeutung dieser Ableitung dr über ds begreifen.

Notes

Summary

2m 20s

Propriété : vitesse tangente à la trajectoire



$$|d\boldsymbol{r}| = |ds|$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Vecteur :

- tangent
- de norme 1

$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Um diese zu berechnen, stelle ich mir einen Teil der Trajektorie vor. Hier ist meinen Massepunkt p zur Zeit t und hier ist er einen Moment dt später. Hier ist die Vektorielle Verschiebung dr und wenn dies die Trajektorie ist, hat mein Massepunkt eine Distanz von ds hinter sich gelegt. Nun, wenn ich die Limes für dt gegen 0 nehme, wird dieser Punkt irgendwo hier sein und ich merke, dass ich mich auf dieser Gerade befinde. Diese ist tangential zur Trajektorie. Ich verstehe also, dass der Vektor dr über ds tangential zur Trajektorie ist. Zeichnen wir ihn so. Welcher Wert hat nun dieser Vektor? Dieser dr, hier, hat eine Norm die nach ds läuft wenn ds und dt nach 0 laufen. Also ist dr, die Norm von dr, circa gleich wie den Absoluten Wert von ds und dieser Vektor dr über ds hat also eine Länge von 1. Es ist einen Einheitsvektor. Wir wissen also, dass dieser Vektor dr über ds tangential zur Trajektorie ist, und dass seine Norm 1 ist. Zurück zur vektoriellen Geschwindigkeit. Diese, wie gesagt, gleicht v mal diesen Vektor. Also kann man sie schreiben mit der skalaren Geschwindigkeit mal den tangentialen Einheitsvektor.

Notes

Summary

3m 52s

Propriété : accélération tangentielle

$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\left(v\hat{\boldsymbol{\tau}}\right) = \frac{dv}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$$

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Mécanique | 2013 28

Ich konne nun zur vektoriellen Beschleunigung. Wenn ich mit dieser Notation der Geschwindigkeit arbeite, muss ich um zur Beschleunigung zu kommen die Geschwindigkeit zeitlich ableiten. Ich habe ein Produkt von zwei Grössen, also werde ich am Ende eine Summe von zwei Termen kriegen. Hier ist die Beschleunigung die ich mithilfe der Ableitung von diesem Ausdruck finde. Einerseits habe ich dv über dt die die zeitliche Ableitung der skalaren Geschwindigkeit ist, und dies ist die Richtung von tau, der Parallelvektor und dann habe ich noch diesen Term, welcher, wir werden es bald erfahren, normal zur Trajektorie ist. Also werden wir diese Komponente die parallele Beschleunigung nennen. Es ist den intuitivsten Teil, bzw den Teil der bedeutet, dass die skalare Geschwindigkeit sich mit der Zeit verändert. Dies gibt uns eine Beschleunigung und dies ist einen Term, der entlang der Trajektorie liegt. Wir müssen zunächst den zweiten Term anschauen.

Notes

Summary

5m 55s

Propriété : accélération normale

$$v\frac{d\hat{\tau}}{dt} = ?$$

$$\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} + \frac{d\hat{\tau}}{dt} \cdot \hat{\tau}$$

$$\hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = 1 \implies \frac{d}{dt}\left(\hat{\tau} \cdot \hat{\tau}\right) = 0 = 2\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

Was bedeutet dieser eigentlich? Erstens ist tau einen Einheitsvektor. Das Skalarprodukt von tau mit sich selbst gibt das Quadrat de Norm, also 1. Die zeitliche Ableitung des Quadrats der Norm gibt also 0. Ich hätte hier berechnen können, diese Ableitung ist tau, skalarprodukt mit dtau über dt, plus dtau über dt skalarprodukt mit tau. Das Skalarprodukt ist kommutativ und diese beide Termen sind gleichwertig. Das habe ich hier geschrieben. Ich habe also das Skalarprodukt von tau und von der zeitlichen Ableitung von tau gibt 0. Dies bedeutet, dass die beiden Vektoren orthogonal sind.

Notes

Summary

7m 06s

Propriété : accélération normale

$$v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = ?$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}} = 1 \implies \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\right) = 0 = 2\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

$$v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = v^2\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$$

Mécanique | 2013 32

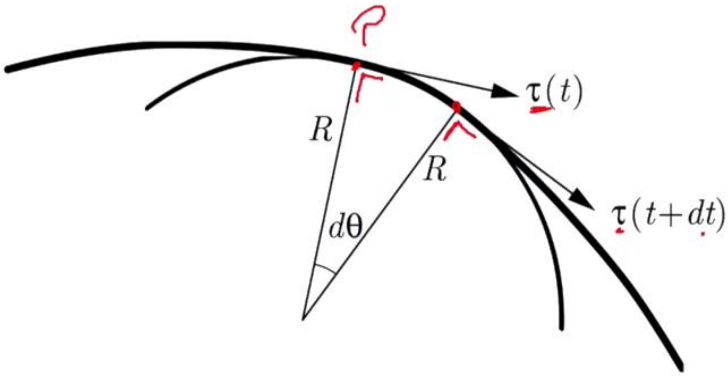
Ich erhalte also dieses Resultat. Um unsere Analyse zu verbessern werde ich Tau als eine Funktion von s bertachten und s als eine Funktion der Zeit. Diese Ableitung dtau über dt schreibt man nun als dtau über ds mal ds über dt. ds über dt haben wir schon als die Skalargeschwindigkeit identifiziert. Ich habe also das Quadrat einer Skalargeschwindigkeit mal den Vektor dtau über ds, dessen wir die Bedeutung noch suchen. Für was steht dieses dtau über ds?

Notes

Summary

8m 03s

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = ?$$



Stellen wir uns vor einen Teil der Trajektorie der so aussieht. Wir betrachten einen Massepunkt hier zur Zeit t, der einen Moment dt später da wäre. Man könnte eine Approximation anwenden, für die man sagt, dass man ungefähr eine Gerade kriegt wenn dt gegen 0 läuft. Wenn man dies macht erhält man hier und hier einen Vektor tau der dieselbe Richtung besitzt. Weil beide dieselbe Norm haben, sind sie gleichwertig. So könnte man nie beschreiben, dass die Trajektorie eine Krümmung besitzt. Im Mathematikkurs lernt man, dass eine bessere Approximation die eine Krümmung an diesem Ort beschreiben kann wäre einen Kreis. Dessen Radius heisst ein Krümmungsradius. Die Lage sieht nun so aus : wenn mein p-Punkt hier liegt zur Zeit t und zur Zeit t plus dt da ist, habe ich einen Parallelvektor Tau der Zur Trajektorie tangential ist. Dann gehen wir davon aus, dass die Trajektorie ungefähr ein Kreis ist und damit, dass tau zum Kreis tangential ist. Er ist also orthogonal zum Radius. Diesem Radius hier. Zur Zeit t plus dt ist der Vektor Tau tangential zur Trajektorie und also auch tangential zum Kreis und also orthogonal zu diesem Radius. Wenn sich der Radisuvektor um einen Winkel von dtheta gedreht hat, muss sich Tau auch um diesen Winkel gedreht haben.

Notes

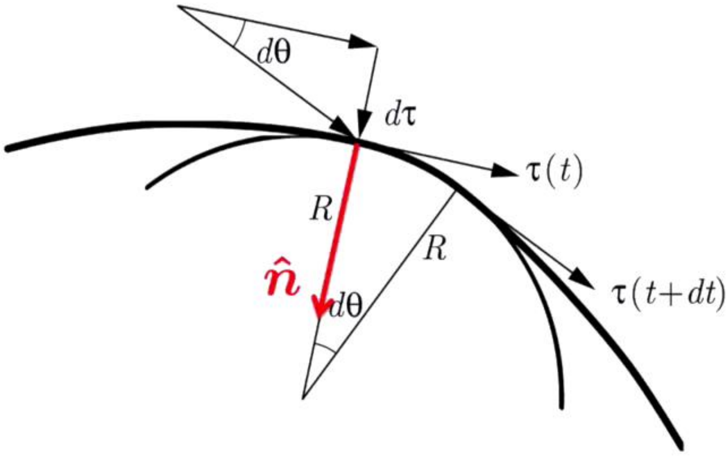
Summary

8m 51s

Définition : rayon de courbure

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = ?$$

$$|d\hat{\tau}| = d\theta$$



$$R d\theta = ds$$

$$\left|\frac{d\hat{\tau}}{ds}\right| = \frac{1}{R}$$

$$v^2 \frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{v^2}{R}\hat{n}$$

Mécanique | 2013 41

Um dies zu zeichnen werde ich disesen Tau hier nehmen und ihn hier plazieren. Ich zeige Ihnen wie die ganze Zeichnung aussieht. Hier habe ich erneut diesen Vektor tau zur Zeit t plus dt und hier tau von t. Wir haben gerade erst festgestellt, dass sich Tau um einen WInkel von dtheta gedreht hat. Jetzt kann ich dazu noch zeigen welche Norm dieser Vektor Tau besitzt. Zuerst merke ich, dass dtau in die normale Richtung zeigt. Wir haben gesehen, dass der Vektor n orthogonal ist. Dies heisst, orthogonal zu unserem Tau. Damit haben wir die Richtung von dtau und seine Norm wird mit dieser Zeichnung klar. Hier haben wir 1, hier den dtheta Winkel, hier erneut 1. Wir nehmen die Limes wenn dt gegen 0 läuft. Man kann davon aus gehehen, dass die Bogenlänge einen Wert von dtheta mal 1 hat. Dies habe ich hier geschrieben. ds ist diese Länge hier und man sieht, dass ds gleich r mal dtheta. Das steht nun hier. Also gleicht die Norm von dtau über ds, dtau über ds Also dies über dies hier, also 1 über r. 1 über den Krümmungsradius. Also gut, wir hatten einen Beschleunigungs- term der das Quadrat von v mal dtau über ds glich. Wir haben gerade erfahren, dass dies das QUadrat von v über den Krümmungsradius der Trajektorie an diesem bestimmten Ort mal den Vektor n, der gegen das Zentrum des Kreises zeigt und der die Krümmung an diesem Ort circa beschreibt.

Notes

Summary

11m 02s

Propriété : accélération tangentielle et normale

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{R}\,\hat{\boldsymbol{n}}$$

$\hat{\boldsymbol{\tau}}$: tangent à la trajectoire

$\hat{\boldsymbol{n}}$: normal à la trajectoire

Mécanique | 2013 42

Ich fasse alles zusammen : die vektorielle Beschleunigung besitzt zwei Teile. Der erste ist die zeitliche Ableitung der Skalargeschwindigkeit. Dies entspricht einer parallelen Beschleunigung. Der zweite Term entsteht aus dem Quadrat von v über r, wo r der Krümmungsradius der Trajektorie an diesem Ort ist, mal den Vektor n der nach innen in die Richtung des Zentrums des Kreises gerichtet ist der hier die Krümmung approximiert.

Notes

Summary

13m 26s