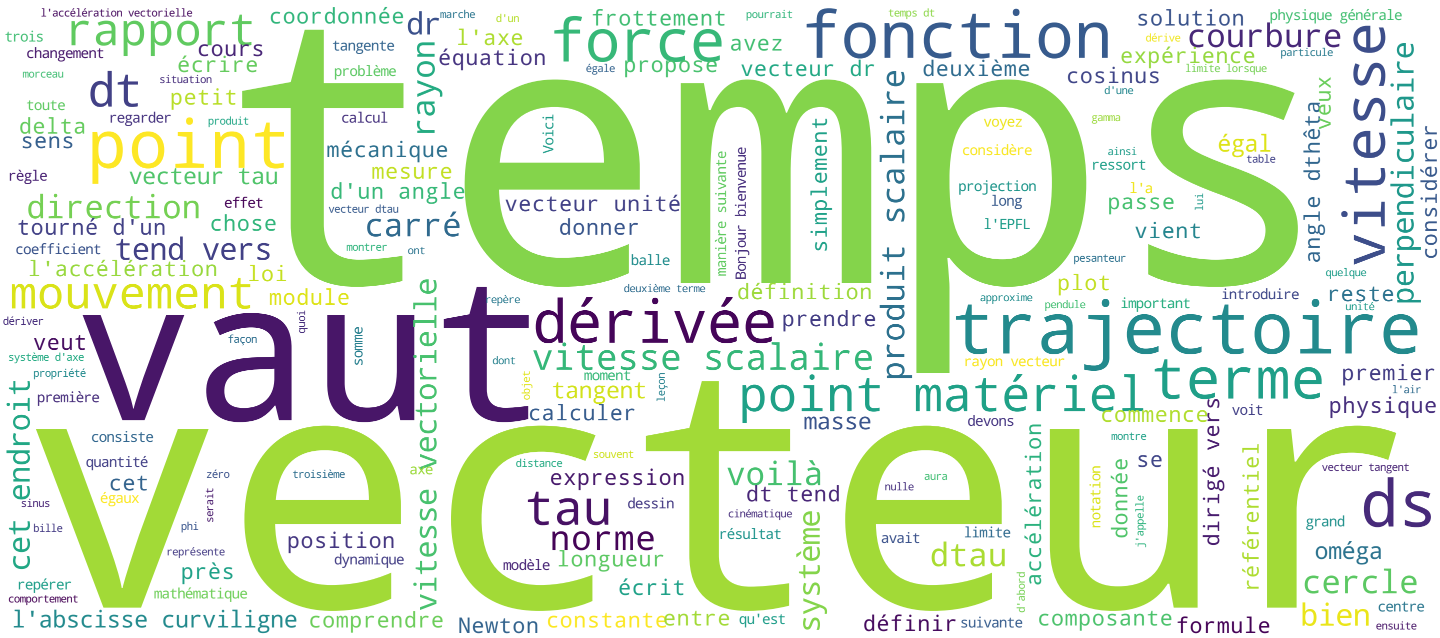
http://go.epfl.ch/traite-meca-1-6

Accélération normale et tangentielle

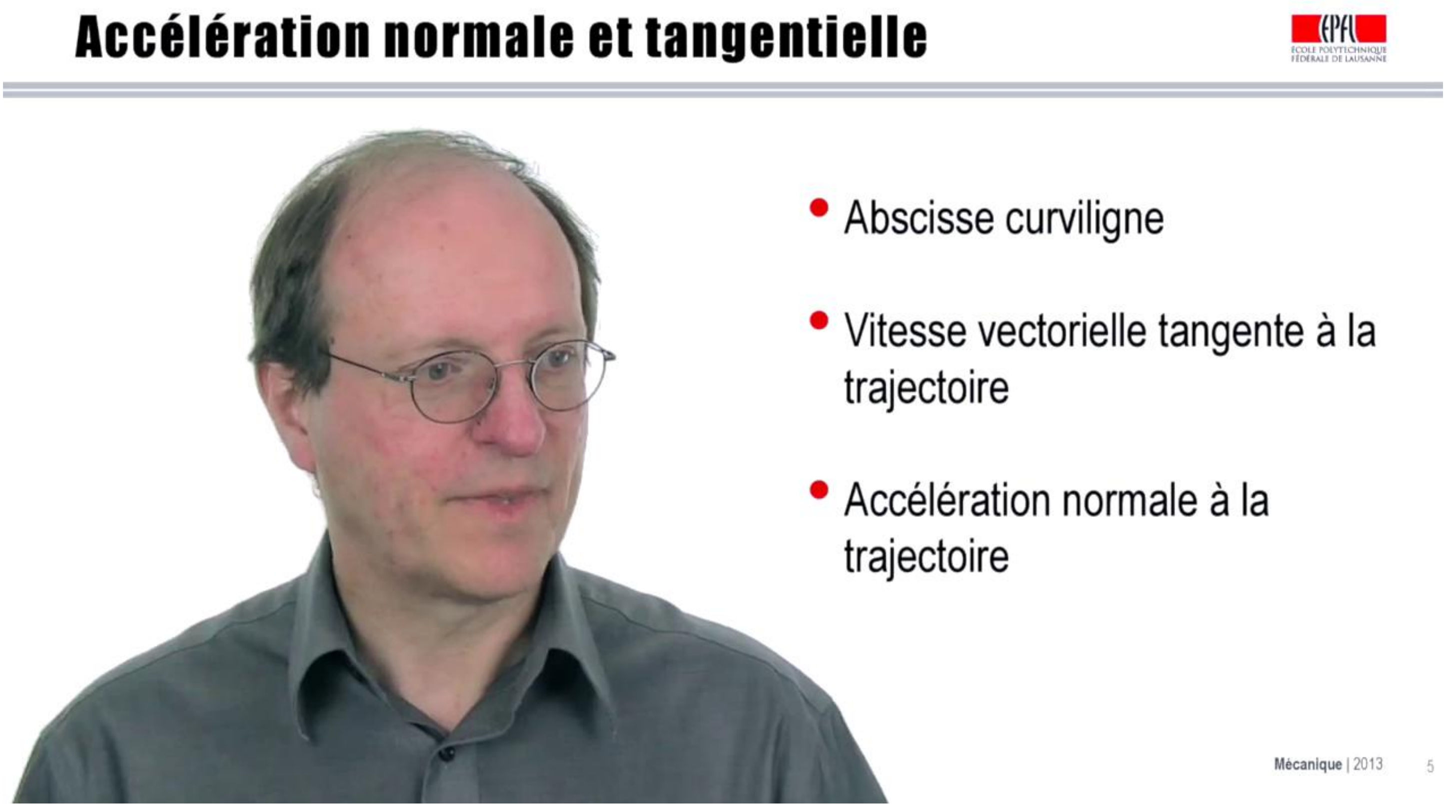
Mécanique, cours 6.1

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video



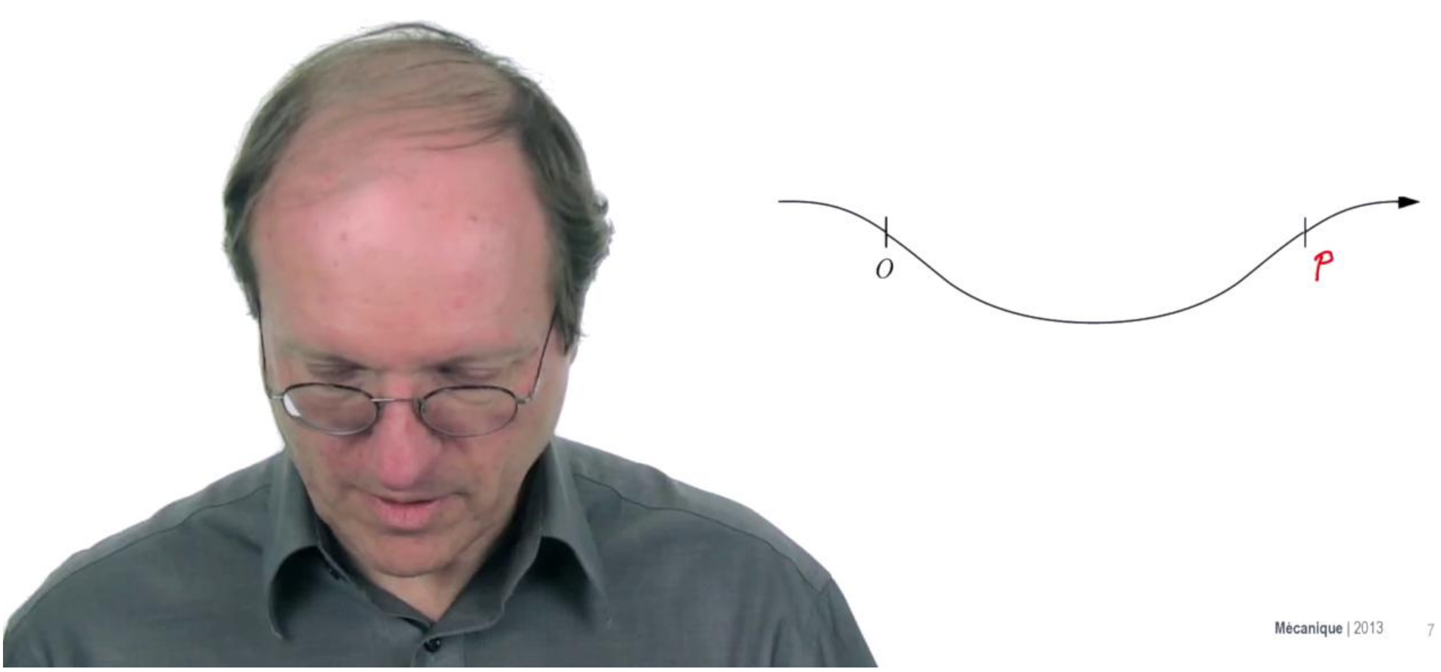
Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, j'aimerais revenir sur la notion d'accélération vectorielle. On a vu avec la deuxième loi de Newton que si un point matériel change de vitesse, c'est qu'une force a agit sur ce point matériel. Ce changement de vitesse s'exprime en terme de l'accélération, il est donc important pour comprendre la dynamique de comprendre ce qu'est une accélération vectorielle. Pour ce faire, je vais introduire la notion d'abscisse curviligne, cela me permettra de réaliser que la vitesse vectorielle est toujours tangente à la trajectoire, mais que l'accélération, elle, n'a pas simplement une composante tangente à la trajectoire, mais aussi une composante normale.

Notes

Summary

0m 03s

Définition : abscisse curviligne



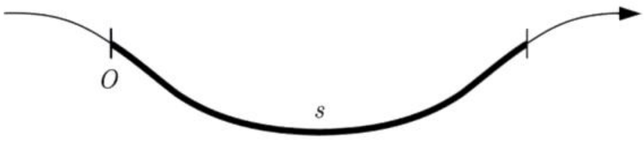
Je commence avec la définition de l'abscisse curviligne. Imaginez qu'on connaisse la trajectoire du point matériel. Le point matériel est ici, je vais me donner une origine sur la trajectoire, et je vais donner une orientation à la trajectoire; et je me propose de repérer la position du point matériel sur la trajectoire, par le chemin parcouru, que j'appelle s.

Notes

Summary

1m 00s

Vitesse scalaire avec abscisse curviligne



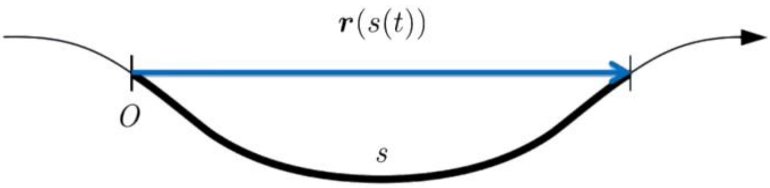
Vitesse scalaire : $v = \dfrac{ds}{dt}$

S c'est ce qu'on appelle l'abscisse curviligne.

Notes

Summary

1m 37s



Vitesse vectorielle : $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$

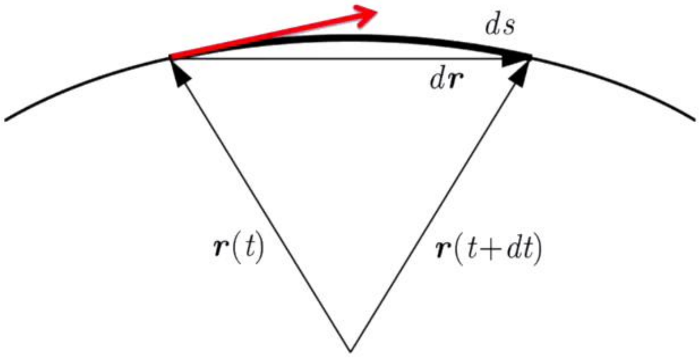
Avec l'abscisse curviligne, je vais maintenant définir la vitesse scalaire. Alors la vitesse scalaire, c'est le déplacement divisé par le temps, quand on prend la limite avec un delta t tend vers 0; donc le déplacement étant donné par s, il est clair que la vitesse scalaire sera la dérivée de s par rapport au temps. Comme ceci. Je passe maintenant à la vitesse vectorielle. J'imagine encore une fois, que j'ai ma trajectoire orientée, je me donne un 0 de l'abscisse curviligne, j'ai mon point P qui est ici, que je peux repérer par l'abscisse curviligne s, et je me propose de calculer la vitesse vectorielle La vitesse vectorielle elle est donnée par dr sur dt, avec r le vecteur, et maintenant, je veux exprimer cette vitesse en terme de l'abscisse curviligne, je le fais de la manière suivante: je me propose de considérer r comme une fonction de s, qui évidemment est une fonction du temps. Alors je dois faire la dérivée d'une fonction de fonction, r fonction s, s fonction du temps. Le calcul donne donc le résultat suivant en appliquant la règle de dérivation de fonction de fonction, voilà mon dr sur ds, et ici, j'ai ds sur dt, on vient de voir que ds sur dt c'est la vitesse scalaire v. Donc, ma vitesse vectorielle vaut la vitesse scalaire, fois ce vecteur-là.

Notes

Summary

2m 18s

Propriété : vitesse tangente à la trajectoire



$$|d\boldsymbol{r}| = |ds|$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Vecteur :

- tangent
- de norme 1

$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Nous devons encore comprendre le sens physique de cette dérivée dr sur ds. Alors, pour calculer dr sur ds, j'imagine un morceau de trajectoire, voilà mon point matériel p en t, je considère aussi le point matériel un temps dt plus tard, voilà le déplacement vectoriel dr et si ça c'est la trajectoire mon point matériel parcourt ds. Maintenant, si je vais prendre la limite lorsque dt tend vers 0, ce point-là va être par ici, et je vois bien que je vais me situer sur cette droite-là, elle est tangente à la trajectoire. Donc mon vecteur dr sur ds, je comprends une chose maintenant, dr sur ds est tangent à la trajectoire. Dessinons-le ainsi. Maintenant, que vaut la norme de ce vecteur ? Et bien ce dr-là, a une norme qui tend vers ds lorsque ds et dt tendent vers 0. Donc on a dr, le module de dr qui est à peu près égal à la valeur absolue de ds et ce vecteur dr sur ds a donc une longueur 1. C'est un vecteur unité, alors on vient de trouver que ce vecteur dr sur ds, est tangent à la trajectoire, et sa norme vaut 1. Quant à la vitesse vectorielle, on avait dit qu'elle valait v fois ce vecteur-là, donc on peut écrire la vitesse vectorielle comme étant la vitesse scalaire fois le vecteur unité tangent.

Notes

Summary

3m 52s

Propriété : accélération tangentielle

$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\left(v\hat{\boldsymbol{\tau}}\right) = \frac{dv}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$$

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Je passe maintenant à l'accélération vectorielle. Si je commence avec cette expression-là de la vitesse, pour trouver l'accélération, je dois dériver la vitesse par rapport au temps. J'ai un produit de deux termes, donc je vais me retrouver avec la somme de deux termes. Voilà, l'accélération, dérivée par rapport au temps, de cette expression-là, d'une part on a dv sur dt qui est donc la dérivée par rapport au temps de la vitesse scalaire, et ça c'est donc la direction de tau le vecteur tangent et on a cet autre terme, on va tout bientôt voir, que ce terme-là est perpendiculaire à la trajectoire, donc on va appeler accélération tangente cette composante-là, c'est la composante la plus intuitive celle qui consiste à dire que la vitesse scalaire change par unité de temps; ça ça donne une accélération, et ça c'est un terme qui est le long de la trajectoire. Nous devons maintenant étudier le deuxième terme.

Notes

Summary

5m 55s

Propriété : accélération normale

$$v\frac{d\hat{\tau}}{dt} = ?$$

$$\hat{\tau}\cdot\frac{d\hat{\tau}}{dt} + \frac{d\hat{\tau}}{dt}\cdot\hat{\tau}$$

$$\hat{\tau}\cdot\hat{\tau} = 1 \implies \frac{d}{dt}\left(\hat{\tau}\cdot\hat{\tau}\right) = 0 = 2\hat{\tau}\cdot\frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

Mécanique | 2013 30

Que vaut-il ou que représente-t-il ? Alors d'abord, tau est un vecteur unité, le produit scalaire de tau avec lui même donne sa norme au carré qui vaut 1, donc la dérivée par rapport au temps de la norme au carré vaut 0, Or, j'aurais pu calculer ici, cette dérivée-là vaut tau, produit scalaire avec dtau sur dt plus, dtau sur dt produit scalaire avec tau. Le produit scalaire est commutatif, ses deux termes sont égaux, c'est ce que j'ai écrit ici; et j'ai donc le produit scalaire de tau avec la dérivée de tau par rapport au temps qui donne 0, ça veut dire que les deux vecteurs sont perpendiculaires. Ça me donne ce résultat-là.

Notes

Summary

7m 06s

Propriété : accélération normale

$$v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = ?$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = 1 \implies \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}\right) = 0 = 2\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

$$v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = v^2\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}$$

Mécanique | 2013 32

Pour pousser l'analyse plus loin, je vais exprimer tau comme une fonction de s et s comme une fonction du t, temps. A ce moment-là cette dérivée dtau sur dt, s'exprime comme dtau sur ds fois ds sur dt, mais ds sur dt on l'a déjà identifié comme étant la vitesse scalaire, donc j'ai une vitesse scalaire au carré fois ce vecteur dtau sur ds et il nous reste à déterminer le sens de ce vecteur-là. Que vaut dtau sur ds?

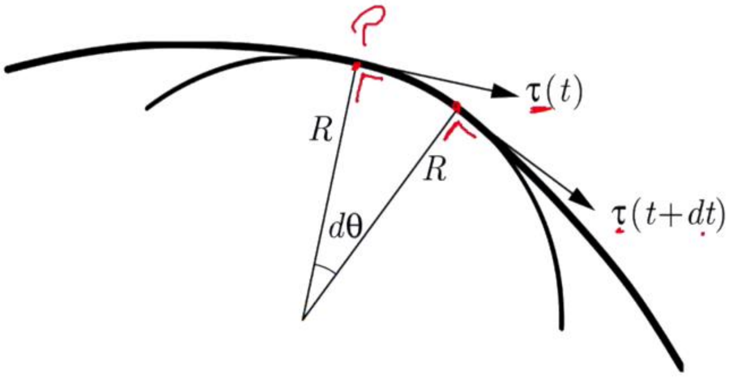
Notes

Summary

8m 06s

Définition : rayon de courbure

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = ?$$



Mécanique | 2013 36

Imaginons qu'on ait un morceau de trajectoire qui a cette allure-là, on peut considérer le point matériel ici au temps t et un temps dt plus tard il serait là, on pourrait faire l'approximation qui consiste à dire que on a à peu près une ligne droite quand dt tend vers 0. Si on fait ça, on aura à cet endroit-là et à cet endroit-là, un vecteur tau qui a la même direction et comme les deux vecteurs tau ont la norme unité, ils sont égaux. On ne va jamais rendre compte du fait qu'on a une courbure de la trajectoire. Alors en mathématiques, on peut apprendre que l'approximation d'ordre supérieur qui rend compte de la courbure de la trajectoire à cet endroit-là c'est un cercle, le rayon du cercle c'est un rayon de courbure, on a donc la situation maintenant qui est la suivante. Si j'ai mon point p qui est ici au temps t et qui est là au temps t plus dt, j'ai le vecteur tangent tau qui est tangent à la trajectoire, mais on suppose que la trajectoire est à peu près un cercle, donc le vecteur tau est tangent au cercle, il est donc perpendiculaire au rayon. Ce rayon-là. De même à t plus dt, le vecteur tau est tangent à la trajectoire donc il est tangent au cercle et donc il est normal à ce rayon vecteur-là.

Notes

Summary

8m 51s

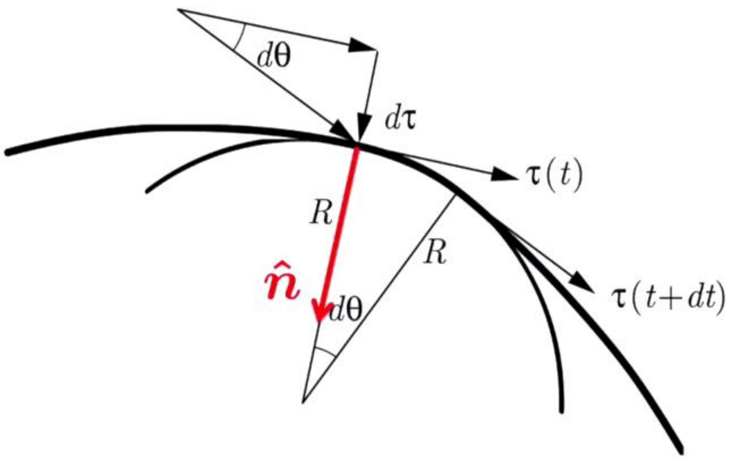
Définition : rayon de courbure

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = ?$$

$$|d\hat{\boldsymbol{\tau}}| = d\theta$$

$$R d\theta = ds$$

$$\left|\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\right| = \frac{1}{R}$$



Si les rayons vecteurs, le rayon vecteur a tourné d'un angle dthêta, alors tau doit aussi avoir tourné d'un angle dthêta. Pour en faire le dessin, je vais prendre ce tau qui est ici et le reporter à cet endroit-là, je vous montre de quoi a l'air le dessin, voilà, j'ai reporté à la fois ce vecteur tau de t plus dt ici, tau de t je l'ai reporté là, on vient de se convaincre que le vecteur tau avait tourné d'un angle dthêta, et je vais maintenant pouvoir argumenter quelle est la longueur, la norme du vecteur tau. D'abord le vecteur dtau est dans la direction normale, on l'a vu, le vecteur n est perpendiculaire, ce vecteur n est perpendiculaire à tau, ça, ça donne la direction de dtau, et la norme de dtau elle est donnée par cette construction-là, ici, on a 1, on a l'angle dthêta, on a 1 ici aussi, donc on va à la limite dt tend vers 0, on peut dire que la longueur de l'arc ça vaut dthêta fois 1, c'est ce que j'ai écrit ici. Maintenant ds, c'est cette longueur-là et on voit que ds ça vaut r fois le dthêta, c'est ce que j'ai écrit ici, et donc la norme de dtau sur ds, vaut le rapport dtau sur ds, ça vaut ça divisé par ça donc 1 sur r. 1 sur le rayon de courbure.

Notes

Summary

10m 50s

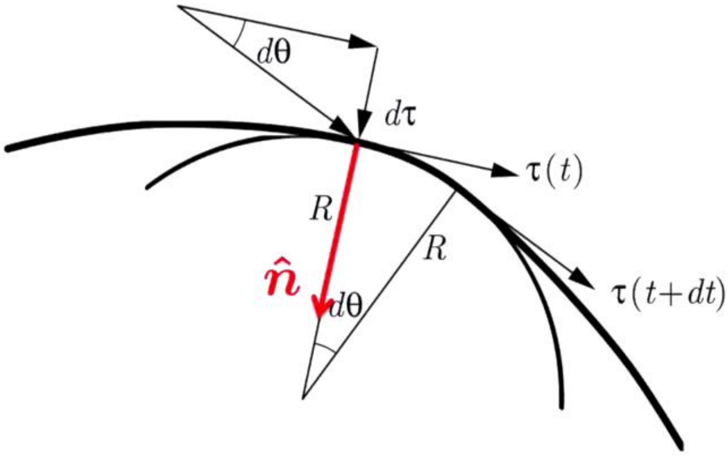
Définition : rayon de courbure

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = ?$$

$$|d\hat{\boldsymbol{\tau}}| = d\theta$$

$$R d\theta = ds$$

$$\left|\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds}\right| = \frac{1}{R}$$



$$v^2 \frac{d\tau}{ds} = \frac{v^2}{R} \hat{n}$$

Mécanique | 2013 41

Alors voilà, maintenant on avait un terme de l'accélération qui allait comme v carré fois dtau sur ds, on vient de voir que ceci vaut v carré sur le rayon de courbure à l'endroit, le rayon de courbure de la trajectoire à l'endroit considéré, fois le vecteur n dirigé vers le centre du cercle, qui approxime la courbure à cet endroit-là. Je résume: l'accélération vectorielle comporte deux termes, le premier c'est la dérivée par rapport au temps de la vitesse scalaire.

Notes

Summary

12m 53s

Propriété : accélération tangentielle et normale

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{R}\hat{\boldsymbol{n}}$$

$\hat{\boldsymbol{\tau}}$: tangent à la trajectoire

$\hat{\boldsymbol{n}}$: normal à la trajectoire

C'est une accélération dans la direction de la marche. Le deuxième terme s'écrit comme v carré sur r, avec r le rayon de courbure de la trajectoire à cet endroit-là fois le vecteur n dirigé vers l'intérieur, dirigé vers le centre du cercle qui approxime la courbure à cet endroit-là.

Notes

Summary

13m 39s