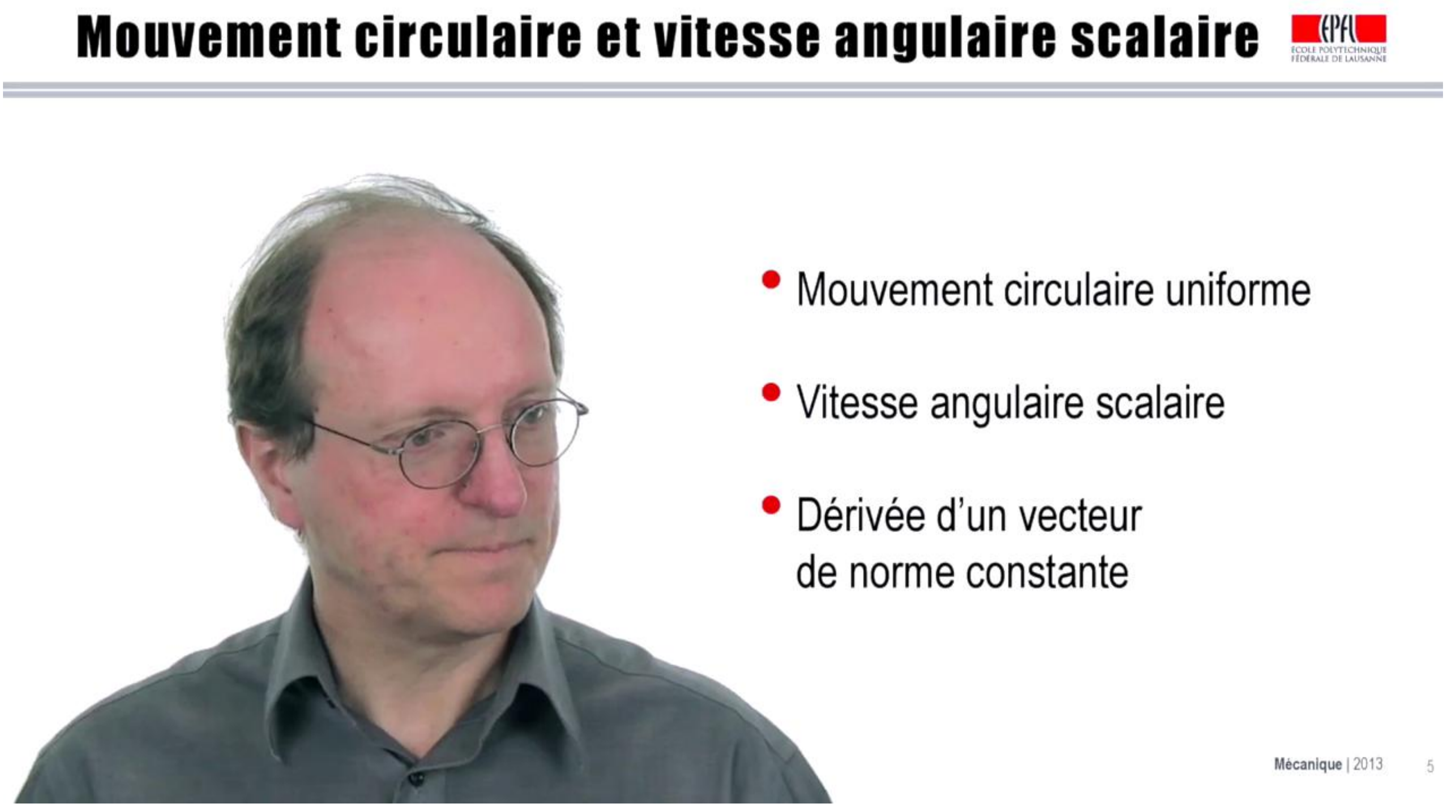
Mouvement circulaire et vitesse angul

Mécanique, cours 6.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-6

Video



Hallo, wilkommen zur Vorlesung für "allgemeine Physik" der EPFL. In dieser Lektion werde ich versuchen das Konzept der vektoriellen Beschleunigung zu erklären. Wir haben grundsätzlich gesehen, dass die vektorielle Beschleunigung eine Normalkomponente gegenüber der Trajektorie hatte. Diese wurde mit Hilfe der Geschwindigkeit und des Krümmungsradiuses an diesem Ort. Um dies klar zu machen schlage ich ihnen jetzt vor eine Kreisbewegung anzuschauen. Wir werden dafür eine gleichmässige Kreisbewegung beobachten. Dies heisst, dass die Skalargeschwindikeit konstant bleiben wird. Dieses Beispiel werde ich nutzen um eine neue physikalische Grösse zu definieren : die skalare Winkelgeschwindigkeit. Ich sage "skalare" weil wir später auch vektorielle Winkelgeschwindigkeiten sehen werden, und ich werde von diesen kinematischen Ergebnisse benutzen um Ihnen eine spezielle Eigenschaft der zeitlichen Entwicklung eines Vektors, dessen Norm konstant ist, zu zeigen.

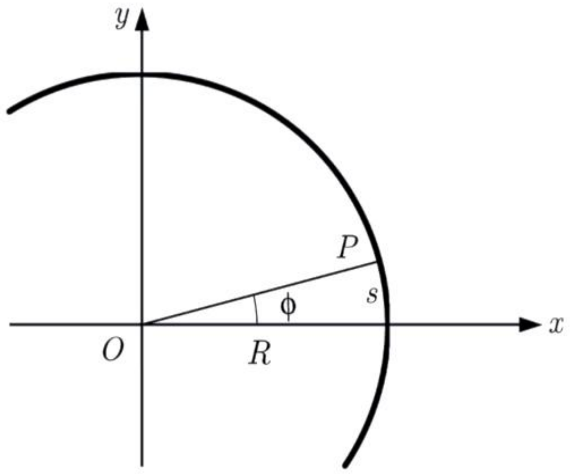
Notes

Summary

0m 03s

Définition : mouvement circulaire uniforme

Un point matériel se déplaçant sur un cercle appartenant au référentiel, avec une vitesse scalaire constante.



$$s = R\phi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\dot{\phi} = R\omega$$

$$\phi = \omega t$$

Ich betrachte nun einen Massepunkt, der gezwungen wird, sich auf einem Kreis zu bewegen, dies mit einer gleichmässigen Skalargeschwindigkeit. Okay, hier ist unser Kreis, der zum Bezugssystem gehört. Ich definiere jetzt mein Koordinatensystem, mit o hier das Zentrum des Kreises. Meine Achsen nenne ich x, y; und da ist mein Massepunkt p. Ich beschreibe ihn einerseits mit dem Winkel Phi hier und anderseits mit der Bogenlänge und behaupte dafür, dass ich eine Bogen- länge von 0 auf der x-Achse habe. Was ich zuerst machen kann, ist zu schreiben, dass ich eine konstante Skalargeschwindigkeit habe. Die werde ich als eine Funktion der Bogenlänge ausdrücken. Ist r der Radius des Kreises, gilt s r mal phi. Die Skalargeschwindigkeit gleicht ds über dt. Dies entspricht r mal phi-punkt. In unserer Situation ist v eine Konstante. Also muss phi-punkt eine Konstante sein. Ich nenne diese Konstante Omega. Ich habe also den Winkel phi gleich Omega t.

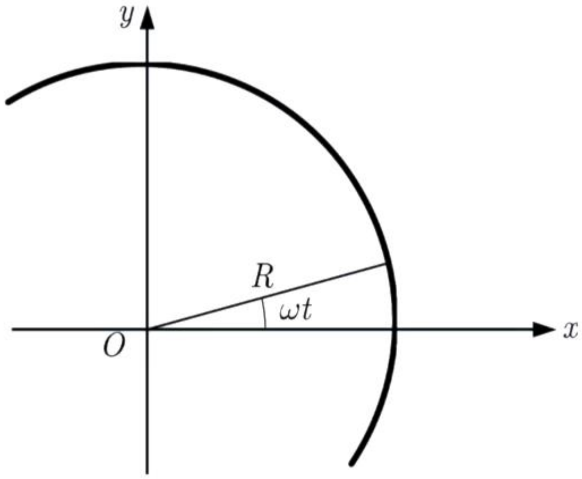
Notes

Summary

1m 17s

Définition : vitesse angulaire scalaire

ω : vitesse angulaire



$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$

$$\dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$$
$$\dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t)$$

Man nennt diesen Omega "Winkelgeschwindigkeit". Ich komme zum Kreis und zu meinem Koordinatensystem zurück und kann also die Position vom Punkt p mit diesem Winkel der Omega t gilt beschreiben. Ich könnte auch die kartesischen Komponenten von p berechnen, welche von Omega t abhängen. Hier sind die Projektionen auf die Achse x, auf die Achse y des Vektors op. Ich habe hier einen Vektor op der normalerweise r genennt wird. Dieser hat Projektionen auf die Achse x und auf die Achse y von r cos Omega t, r sin Omega t. Ich leite nach der Zeit ab um die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit zu kriegen. Hier ist x-punkt und hier y-punkt, Ableitung vom cos minus sin, Ableitung vom sin: cos. Wir haben hier Funktionen von Funktionen, also kommt einen Omega heraus. Ich stelle nun fest, dass diese beide Vektoren orthogonal sind, weil wenn ich das Skalarprodukt berechne, kriege ich x x-punkt plus y y-punkt, das uns 0 gibt. Ich meine also, dass r Skalarprodukt mit v 0 ist. Ich meine also, dass wenn man die kartesischen Komponenten des Massepunktes betrachtet, also vom Radiusvektor, hier, und der Geschwindigkeit, stellt man fest, dass sie orthogonal sind.

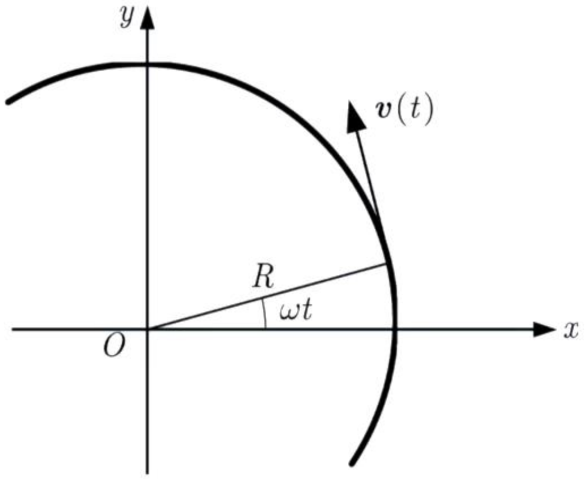
Notes

Summary

3m 06s

Définition : vitesse angulaire scalaire

ω : vitesse angulaire



$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$$
$$\dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t)$$

$$|\boldsymbol{v}| = R\omega$$

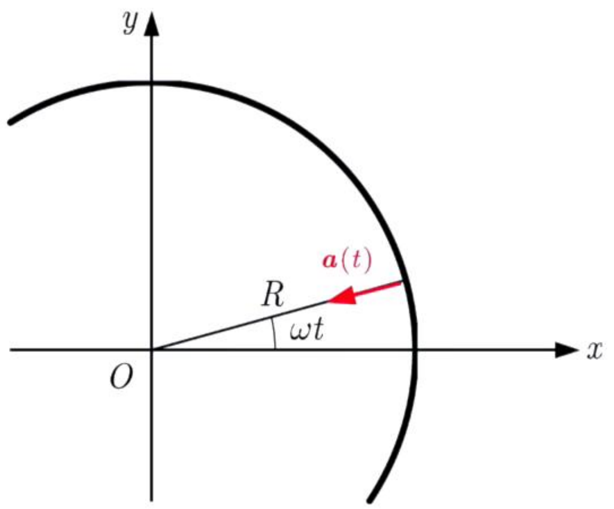
Tatsächlich, die Geschwindigkeit ist tangential zum Kreis, und deswegen orthogonal zum Radius, hier. Wir haben einen rechten Winkel. Man sieht auch dass die Geschwindigkeit, die Norm der Geschwindigkeit, oder dessen Quadrat, gibt uns r Quadrat, Omega Quadrat, mal sin Quadrat Omega t plus cos Quadrat Omega t. Dies ist 1. Hier steht also die Lösung für die Geschwindigkeit, die r Omega gilt. Dies habe ich mit Rot geschrieben, weil man es wirklich viel brauchen werden. Ich empehle also Ihnen, es auswendig zu lernen. Ich komme nun zur Beschleunigung.

Notes

Summary

4m 57s

Propriété : accélération centripète



$$x(t) = R\cos(\omega t) \qquad \dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t) \qquad \dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t)$$
$$\ddot{y}(t) = -R\omega^2\sin(\omega t)$$

$$|\boldsymbol{a}| = R\omega^2$$

Mécanique | 2013 28

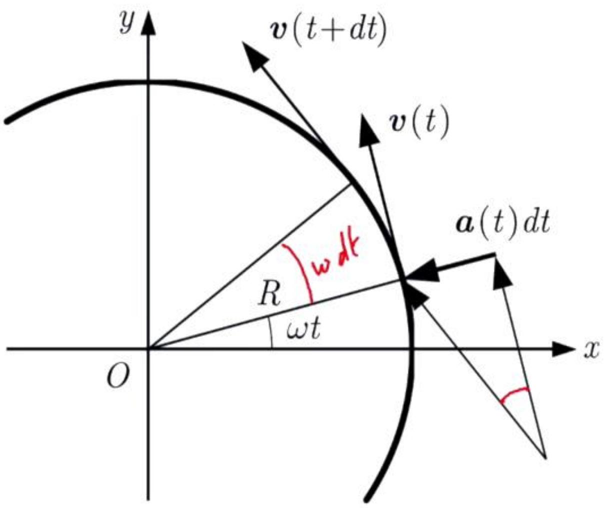
Ich werde diese mit den kartesischen Koordinaten berechnen. Hier sind die Koordinaten des Punktes. Hier ist die erste Ableitung, hier die zweite. Was sehe ich nun? Dass ich hier r cos Omega t und r sin Omega t habe, die ich wieder da sehe. Also charakterisieren x doppelpunkt y doppelpunkt einen Vektor, der kolinear mit dem Vektor mit Komponenten x y ist. Wie sieht dies auf einer Zeichnung aus? Hier ist mein Kreis, der Massepunkt ist hier und ich sage, dass die Beschleunigung in derselben Richtung wie mein Radiusvektor liegt, aber da steht r Omega Quadrat minus r Omega Quadrat vor ihm, also zeigt der Beschleunigungsvektor gegen das Zentrum des Kreises. Sollte Omega Zeichen wechseln, wenn stadt in diese Richtung dreht, in die Gegenrichtung drehen würde, würde dies nichts ändern. Wir hätten immer eine Beschleunigung die gegen das Zentrum zeigen würde. Deswegen nennt man sie zentripetale Beschleunigung Welchen Wert hat die Norm der Beschleunigung? Deren Quadrat gilt r Quadrat Omega hoch 4 mal cos Quadrat plus sin Quadrat, gibt uns 1. Wir haben also die Norm gleich r Omega Quadrat. Dies schreibe ich erneut mit Rot, und Sie sollten diese auch auswendig lernen.

Notes

Summary

5m 45s

Propriété : dérivée d'un vecteur de norme constante



Pour tout $\boldsymbol{v}$ de norme constante :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$$

$$2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \perp \boldsymbol{v}$$

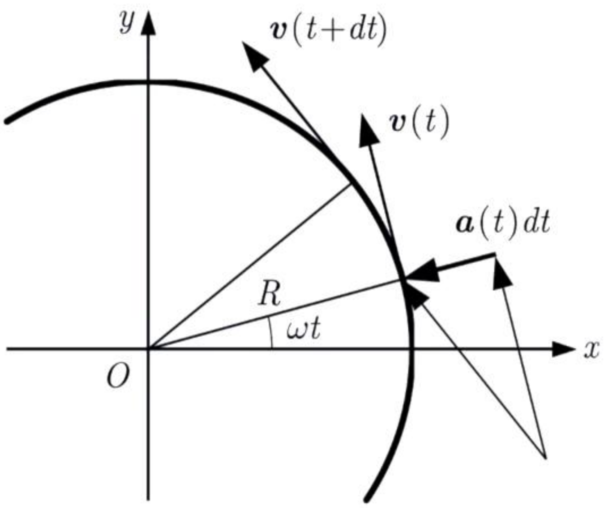
Ich profitiere von diesen kinematischen Ergebnissen, um folgendes fest zu stellen : für jeden Vektor, dessen Norm konstant bleibt, haben wir die folgende Eigenschaft: das Skalarprodukt von v mit sich selbst, ist das Quadrat der Norm, und wenn diese eine Konstante ist, ist dises Ableitung null. Ich kann dies so ausdrücken : 2v Skalaprodukt mit dv über dt ist null. Diese Gleichung zeigt uns, dass dv über dt othogonal zu v ist. Für jeden Vektor mit einer konstanten Norm, ist seine zeitliche Ableitung othogonal zum Vektor. Erstes Ergebnis, schauen wir mal wie es auf der Zeichnung aussieht wenn man den Fall betrachtet in dem v für eine Geschwindigkeit einer Kreisbewegung. Hier zeichne ich den Massepunkt p zur Zeit t. Hier ist seine Lage zur Zeit t plus dt. Der Radius hat sich um einem Winkel Omega dt gedreht, also weil man hier einen rechten Winkel hat, gilt dasselbe hier. Wenn sich die beiden Radiusvektoren um einen Winkel Omega dt gedreht haben hat sich die Geschwindigkeit auch so gedreht. Dies kann ich so zeichnen : ich schiebe die Geschwindigkeits- vektoren nach p. Hier haben Sie v von t, der dort war, v von t plus dt nehme ich hier. Wir haben festgestellt, dass sich der Omega dt, den man hier hatte, hier befindet.

Notes

Summary

7m 38s

Propriété : dérivée d'un vecteur de norme constante



Pour tout $\boldsymbol{v}$ de norme constante :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$$

$$2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \perp \boldsymbol{v}$$

$$|\boldsymbol{a}|dt = |\boldsymbol{v}|\omega dt$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = |\boldsymbol{v}|\omega$$

Also gilt die Norm von a dt dasselbe wie diese Seite, die v ist. Das heisst, die Norm von v mal diesen Winkel, der Omega mal dt war. Dies steht hier. Einfach gesagt, haben wir also die Norm von a die v mal Omega gilt. a ist die Ableitung von diesem Vektor. Zur Erinnerung: wir betrachten irgendeinen Vektor dessen Norm konstant ist Die Norm vom Vektor, der abgeleitet wurde, gilt v mal Omega. Dieser zeigt uns um wieviel sich den Vektor dreht, bzw die Winkelgeschwindigkeit vom Radius- vektor oder von diesem da.

Notes

Summary

9m 50s

Propriété : dérivée d'un vecteur de norme constante

Pour tout $\boldsymbol{v}$ de norme constante :

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \perp \boldsymbol{v}$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = |\boldsymbol{v}|\omega$$

ω : vitesse angulaire

Ist egal, beide dreen mit derselben Geschwindigkeit Omega. Ich komme also zum folgenden Ergebnis: für jeden Vektor v mit einer konstanten Norm, ist seine Ableitung dv über dt othogonal zum Vektor v und die Norm vom Vektor dv über dt gilt die Norm von v mal die Winkelgeschwindigkeit. Dieses Ergebnis werden wir mehrmals brauchen.

Notes

Summary

10m 44s