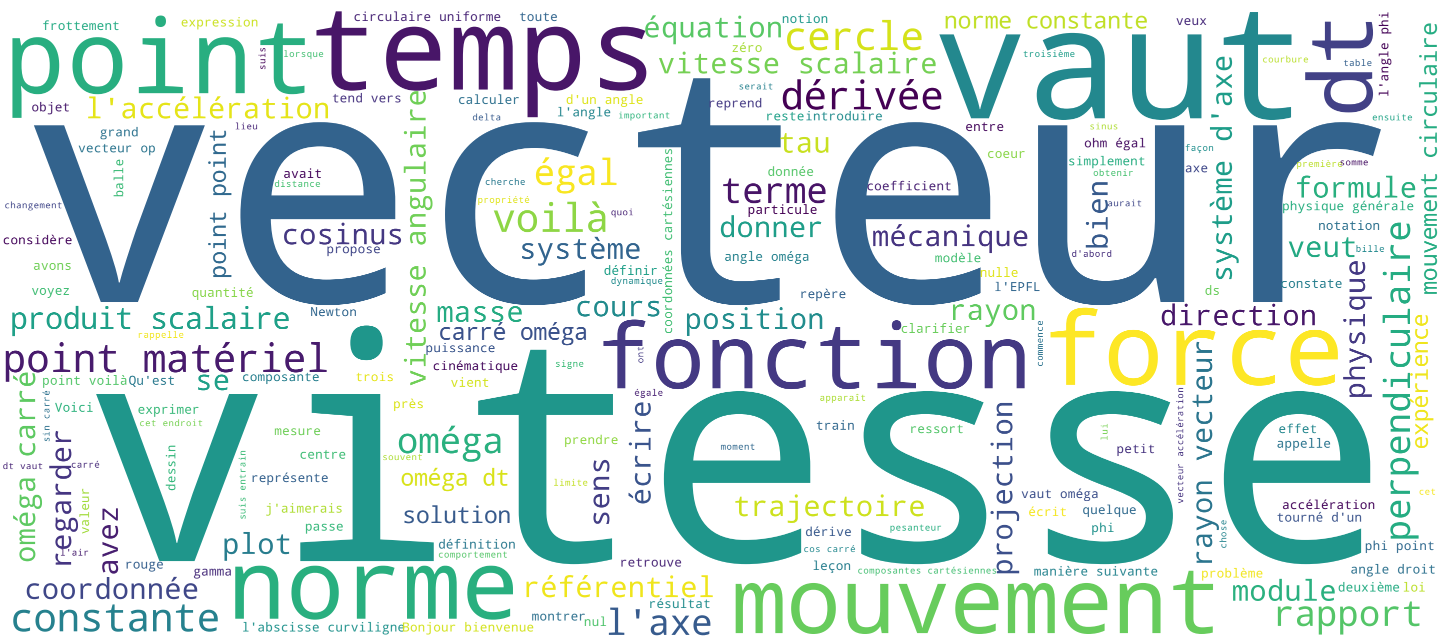
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-6

Mouvement circulaire et vitesse angul

Mécanique, cours 6.2

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

Mouvement circulaire et vitesse angulaire scalaire

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon je cherche à clarifier la notion d'accélération vectorielle. D'une manière générale on a vu que l'accélération vectorielle avait une composante normale à la trajectoire, qui était donnée par la vitesse et le rayon de courbure de la trajectoire à cet endroit. Pour clarifier cette notion je vous propose maintenant de regarder un mouvement circulaire. Alors on va regarder un mouvement circulaire uniforme, ça veut dire que la vitesse scalaire sera constante. Ce mouvement-là va me permettre d'introduire une nouvelle grandeur physique, la vitesse angulaire scalaire. Le fait que je dise scalaire suggère que plus tard on va introduire une vitesse angulaire vectorielle, et je vais profiter de ces résultats de cinématique pour vous montrer une propriété particulière de l'évolution dans le temps d'un vecteur dont la norme est constante.

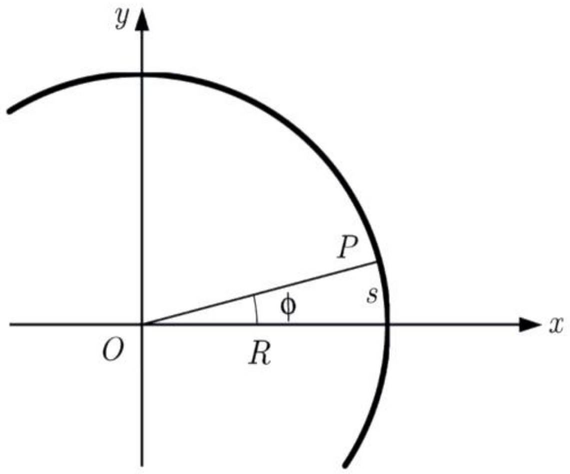
Notes

Summary

0m 03s

Définition : mouvement circulaire uniforme

Un point matériel se déplaçant sur un cercle appartenant au référentiel, avec une vitesse scalaire constante.



$$s = R\phi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\dot{\phi} = R\omega$$

$$\phi = \omega t$$

Mécanique | 2013 13

Alors, je considère maintenant un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle avec une vitesse scalaire uniforme. Voilà, donnons-nous un cercle, qui appartient au référentiel, je me donne un système d'axe, voilà o le centre du cercle, mon cercle, je me donne un système d'axes o, x, y; voilà mon point matériel ici; donc p, et je repère le point matériel, d'une part avec l'angle phi ici, et d'autre part avec l'abscisse curviligne en supposant que j'ai un 0 de l'abscisse curviligne sur l'axe des x. Alors, la première chose que je peux faire c'est exprimer le fait que j'ai une vitesse scalaire constante et je vais exprimer la vitesse scalaire en terme de l'abscisse curviligne. Si r est le rayon du cercle, s vaut r fois phi. La vitesse scalaire vaut ds sur dt. Ca fait r fois phi point. V, d'après la donnée, v est une constante, donc phi point est une constante. Je vais écrire cette constante Oméga. j'ai donc, l'angle phi qui vaut oméga t. Donc le phi ici vaut oméga t.

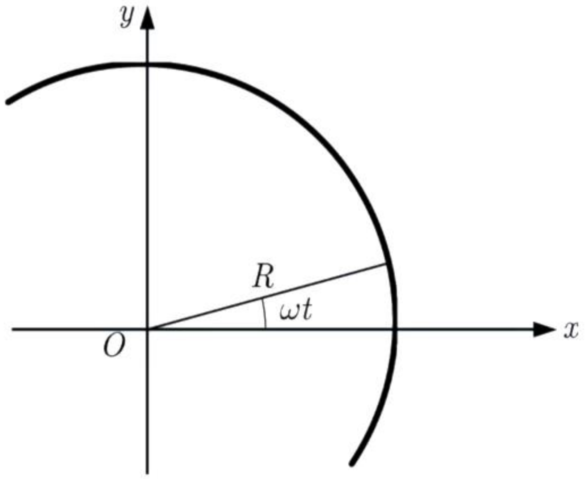
Notes

Summary

1m 17s

Définition : vitesse angulaire scalaire

ω : vitesse angulaire



$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$

$$\dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$$
$$\dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t)$$

Mécanique | 2013 19

Alors, on appelle vitesse angulaire ce oméga. Si je reprend mon cercle, mon système d'axe de coordonnées, je peux maintenant repérer la position du point p par cet angle-là qui vaut oméga t. Je peux aussi calculer les coordonnées cartésiennes de p, exprimées en termes de oméga t. Voilà les projections sur l'axe des x, l'axe des y du vecteur op. Je peux avoir ici un vecteur op que j'appelle d'habitude r, ce vecteur-là a les projections sur l'axe des x et sur l'axe des y, x et y r cos ohm égal t, r sin ohm égal t. Je dérive par rapport au temps pour obtenir la vitesse, les composantes cartésiennes de la vitesse. Voilà x point, voilà y point, dérivée du cosinus moins sinus, dérivée du sinus, cosinus, on a des fonctions de fonctions, donc on a le oméga qui apparaît. Je constate que ces deux vecteurs sont perpendiculaires, parce que si je fais le produit scalaire j'ai x, x point, plus y, y point, vous avez 0. Donc je suis entrain de dire que r, produit scalaire avec v, égal 0. Donc je suis en train de dire qu'en considérant les composantes cartésiennes du point matériel, du rayon vecteur, ici, et de la vitesse, j'ai trouvé qu'ils étaient perpendiculaires.

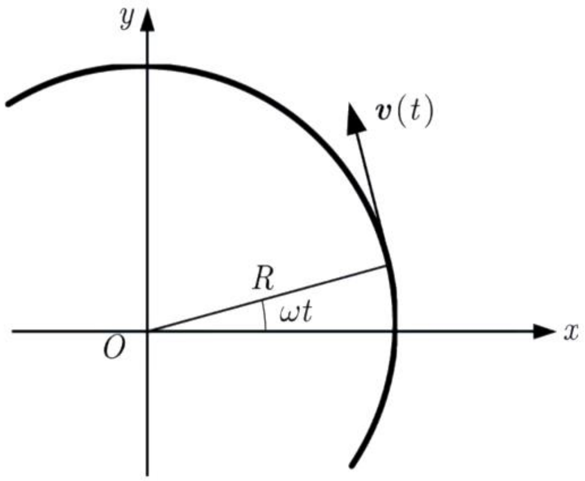
Notes

Summary

3m 06s

Définition : vitesse angulaire scalaire

ω : vitesse angulaire



$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$$
$$\dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t)$$

$$|\boldsymbol{v}| = R\omega$$

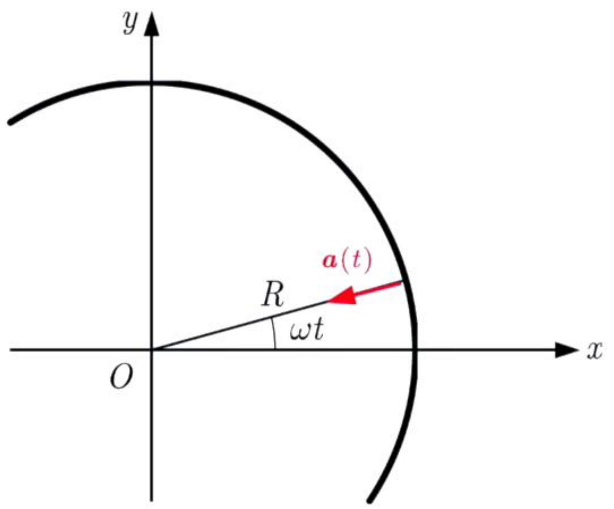
En effet, la vitesse est tangente au cercle, elle est donc perpendiculaire au rayon, ici, nous avons un angle droit. De plus, on constate que la vitesse, la norme de la vitesse, ou la norme au carré de la vitesse, ça va donner r carré, oméga carré, fois sin carré oméga t, plus cos carré oméga t, ça ça vaut 1; donc voilà la solution pour la vitesse, la vitesse vaut r oméga, j'ai écrit cette formule en rouge, parce que elle est extrêmement utile, on va souvent l'utiliser et je vous recommande de l'apprendre par coeur. Je passe maintenant à l'accélération.

Notes

Summary

4m 57s

Propriété : accélération centripète



$$x(t) = R\cos(\omega t) \qquad \dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t) \qquad \dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t)$$
$$\ddot{y}(t) = -R\omega^2\sin(\omega t)$$

$$|\boldsymbol{a}| = R\omega^2$$

Mécanique | 2013 28

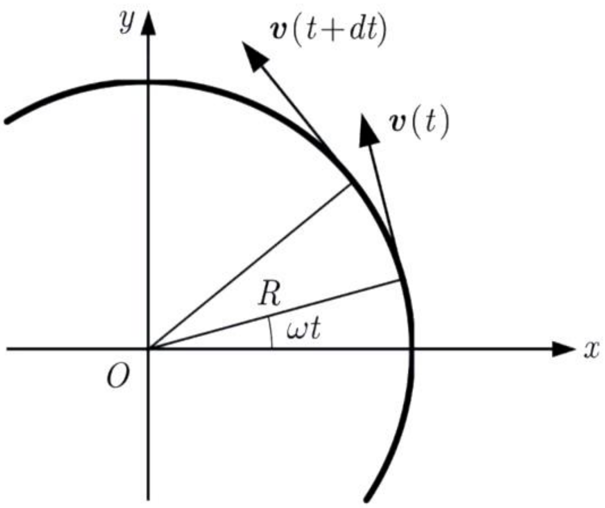
Alors, je vais calculer l'accélération en utilisant les coordonnées cartésiennes du point: voilà les coordonnées du point, voilà la première dérivée, voilà la deuxième dérivée. Qu'est-ce que j'observe? C'est que ici j'ai un r cos oméga t et r sin oméga t, je retrouve ces valeurs ici, donc x point point, y point point forment un vecteur qui est colinéaire avec le vecteur de composante x et y. Qu'est-ce que ça donne sur un dessin? Voilà mon dessin du cercle, le point matériel est ici, et je suis entrain de dire que l'accélération est dans le sens du rayon vecteur, mais il y a un r oméga carré, moins r oméga carré devant, donc, le vecteur, il est, le vecteur accélération est dirigé vers le centre du cercle. Si oméga change de signe, si au lieu de tourner dans ce sens-là, on tournait dans ce sens-là ça ne changerait rien, on aurait toujours l'accélération dirigée vers le centre du cercle. Et pour cette raison-là, on appelle cette accélération-là une accélération centripète. Que vaut le module de l'accélération? Le module du vecteur accélération au carré vaut r carré oméga à la puissance 4 fois cos carré plus sin carré, ça fait 1; donc on a le module de l'accélération qui vaut r oméga carré. J'écris la formule en rouge, c'est aussi une formule qu'il serait bon d'apprendre par coeur.

Notes

Summary

5m 45s

Propriété : dérivée d'un vecteur de norme constante



Pour tout $\boldsymbol{v}$ de norme constante : $$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=0$$

$$2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=0$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\perp\boldsymbol{v}$$

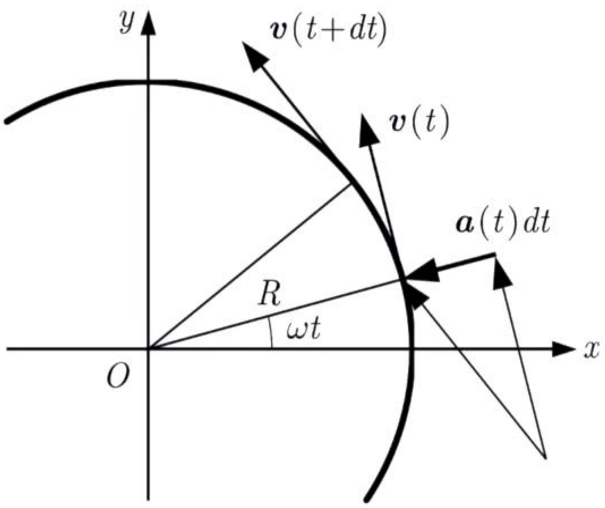
Je profite de ces considérations cinématiques pour faire l'observation suivante: pour tout vecteur, pour tout vecteur de norme constante, on a la propriété suivante; le produit scalaire de v avec lui-même, c'est la norme au carré et si la norme est constante, cette dérivée est nulle. Je peux écrire cette dérivée de la manière suivante: 2v produit scalaire dv sur dt, ceci est nul. Cette équation-là nous dit que dv sur dt est perpendiculaire à v, pour tout vecteur de norme constante, sa dérivée par rapport au temps est perpendiculaire au vecteur. Premier résultat, regardons de quoi ça à l'air sur le dessin quand on considère le cas particulier où v représente la vitesse ou le mouvement circulaire uniforme.

Notes

Summary

7m 38s

Propriété : dérivée d'un vecteur de norme constante



Pour tout $\boldsymbol{v}$ de norme constante :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$$

$$2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \perp \boldsymbol{v}$$

$$|\boldsymbol{a}|dt = |\boldsymbol{v}|\omega dt$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = |\boldsymbol{v}|\omega$$

Mécanique | 2013 37

Ici je représente le point matériel p en t, voilà sa position au point t plus dt, le rayon vecteur a tourné d'un angle oméga dt, donc comme ici on a un angle droit, ici on a aussi un angle droit, si les rayons vecteurs tournent d'un angle oméga dt, alors la vitesse a aussi tourné d'un angle oméga dt. Je peux représenter ceci en rapportant les vecteurs vitesse en p de la manière suivante: vous avez ici le v de t, qui était là, v de t plus dt je le reprends ici, on vient de se convaincre que le oméga dt qu'on avait ici, on l'a retrouvé là; par conséquent la norme de a dt vaut ce coté-là qui est v, c'est à dire la norme de v fois l'angle qu'on a ici, qui était oméga fois dt, ce que j'ai indiqué ici. Pour simplifier on a donc la norme de a qui vaut v fois oméga. A c'est la dérivée de ce vecteur, alors je vous rappelle on est en train de considérer n'importe quel vecteur de norme constante, la norme du vecteur dérivé vaut v fois le oméga, le oméga qui nous indique de combien le vecteur tourne, la vitesse angulaire du vecteur, du rayon vecteur, ou de ce vecteur-là c'est égal, les deux tournent à la vitesse angulaire oméga. J'arrive au résultat suivant: pour tout vecteur v de norme constante sa dérivée dv sur dt est perpendiculaire au vecteur v et sa norme, la norme du vecteur dv sur dt vaut la norme du vecteur, fois la vitesse angulaire.

Notes

Summary

8m 44s

Propriété : dérivée d'un vecteur de norme constante

Pour tout $\boldsymbol{v}$ de norme constante :

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \perp \boldsymbol{v}$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = |\boldsymbol{v}|\omega$$

ω : vitesse angulaire

Mécanique | 2013 38

Voilà un résultat qu'on aura l'occasion d'utiliser.

Notes

Summary

11m 04s