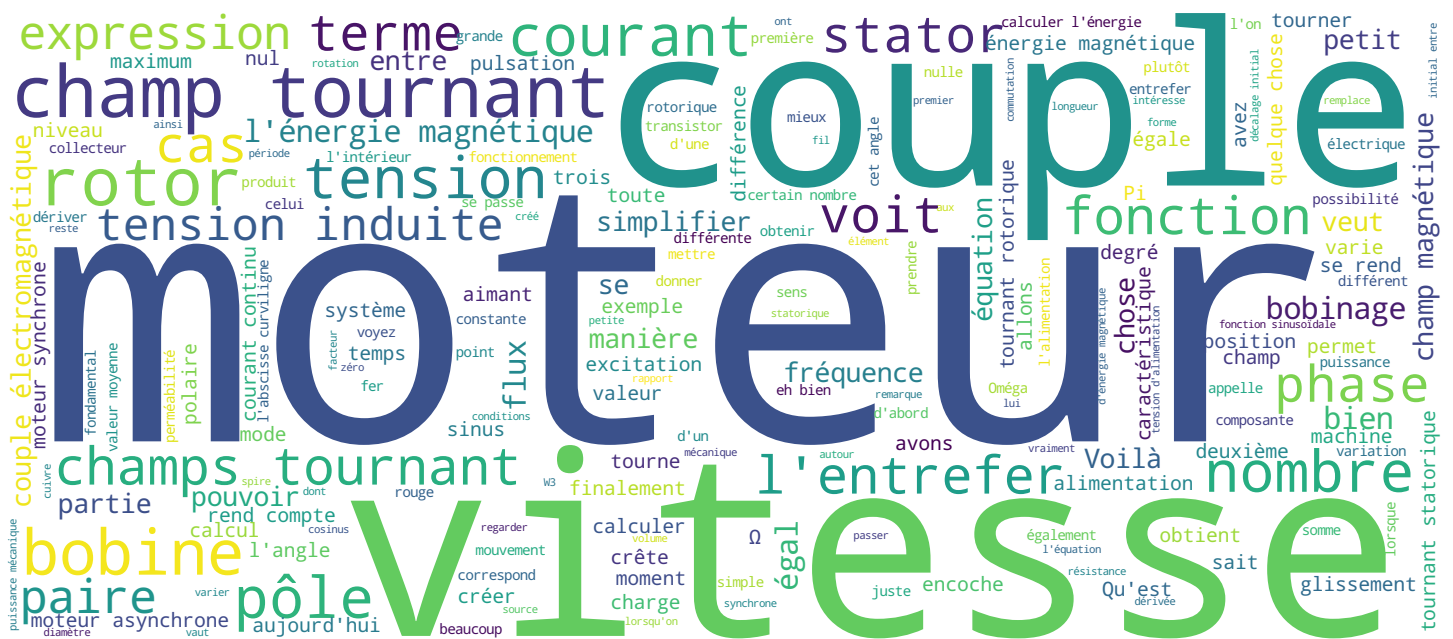
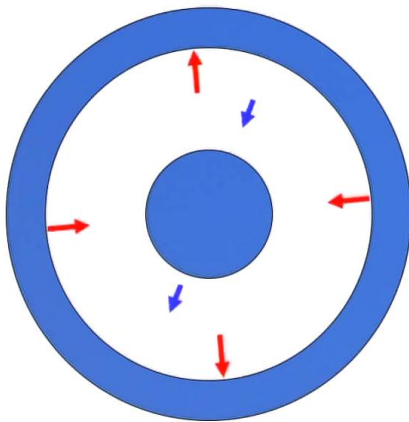


## Prof. Perriard &amp; Dr Koechli





Champ tournant **statorique**  $B_s$   $p_s$   $\Omega_s$

Champ tournant **rotorique**  $B_r$   $p_r$   $\Omega_r$

Entrefer «lisse»

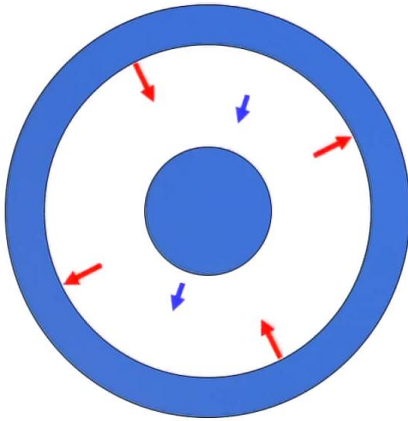
Bonjour. Aujourd'hui, nous allons attaquer le point central de ce chapitre sur les champs tournants : le calcul du couple électromagnétique dans un moteur électrique, ou je devrais dire plutôt dans une machine électrique puisque toutes les relations que nous allons voir aujourd'hui sont aussi valables lorsqu'on a un générateur. Pour calculer le couple, nous allons calculer l'énergie magnétique dans l'entrefer de notre machine dans un cas général. Puis, nous la dériverons et nous en tirerons un certain nombre de conclusions sur les conditions nécessaires pour que notre machine délivre un couple moyen non nul. Pour pouvoir calculer l'énergie magnétique dans l'entrefer, nous avons besoin de connaître l'expression du champ magnétique à l'intérieur. On va prendre un cas le plus général possible où on a un champ tournant statorique qu'on a noté en rouge et un champ tournant rotorique. On peut les faire tourner pour qu'ils soient vraiment tournants. Et j'ai pris un cas extrêmement général où le champ tournant statorique  $B_s$  a un nombre de paires de pôles  $p_s$  et une vitesse de rotation  $\Omega_s$  qui est différente de celle du champ tournant rotorique  $p_r$  avec une vitesse  $\Omega_r$ .

Notes

Summary



0m 04s



Champ tournant **statorique**  $B_s$   $p_s$   $\Omega_s$

Champ tournant **rotorique**  $B_r$   $p_r$   $\Omega_r$

Entrefer «lisse»

Et on le voit ici dans ce cas particulier, puisqu'on a deux pôles au niveau du rotor, quatre pôles au niveau du stator et les deux vitesses sont différentes. C'est le cas le plus général. On va voir que si on fait vraiment ça, on va avoir un couple moyen dans notre machine qui est nul. Il va falloir quand même qu'on trouve des conditions sur le nombre de paires de pôles et sur la vitesse des champs tournants. Il y a une autre chose qu'on doit dire, c'est qu'on n'a pas mis> de dissymétrie dans notre stator, ni dans notre rotor d'ailleurs, et on a un entrefer qui est lisse, de manière à ne pas avoir d'effet dit réluctant dans le couple de notre moteur.

Notes

Summary



1m 39s

En régime linéaire

$$w_{mag} = \int \frac{B^2}{2\mu} dv$$

$w'_{mag}$

Une fois qu'on a établi ces hypothèses avec ces champs tournants, il nous faut calculer l'énergie magnétique dans notre moteur. On va simplifier les choses. On va supposer qu'on n'est pas saturé, donc qu'on ait un régime linéaire. Dans ce cas, on sait que notre énergie magnétique peut être calculer dans l'entrefer ou dans tout le moteur d'ailleurs, comme une intégrale volumique de la densité d'énergie magnétique, donc sur tout le volume du moteur. Et ça, on peut le simplifier parce qu'on se rend compte que cette énergie magnétique dépend de  $\mu$ , la perméabilité, et si la perméabilité est grande, notre énergie magnétique va tendre vers zéro. Ça veut dire qu'on va avoir de l'énergie magnétique uniquement dans les parties de l'entrefer où la perméabilité est suffisamment petite. Dès le moment où on a du fer et que cette perméabilité tend vers l'infini, notre énergie magnétique est nulle. Donc, on va calculer uniquement l'énergie magnétique dans l'entrefer. Puis, comme on est en régime linéaire, cette énergie magnétique va être aussi égale à la coénergie magnétique qu'on peut dériver pour calculer le couple avec un courant constant.

Notes

Summary



2m 35s

# Expression du champ tournant

$$H = \frac{3}{2} \hat{H} \sin\left(\frac{\pi y}{\tau_p} - \omega t\right)$$

$$B = \mu_0 H$$

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p}$$

$$\omega = \Omega_p p$$

$$y = \frac{D\alpha}{2}$$

$$\frac{\pi y}{\tau_p} =$$

Il nous faut B pour pouvoir calculer l'énergie magnétique dans l'entrefer de notre moteur. Et on va l'obtenir à partir des expressions des champs tournants statoriques et rotoriques. Pour ça, on a une expression générale de ce champ tournant qu'on va simplifier maintenant pour pouvoir l'appliquer plus facilement à notre cas. Ça, c'est l'expression de notre champ magnétique. Pour pouvoir la simplifier, on va d'abord considérer qu'on a uniquement le fondamental, c'est ce qu'on a fait ici, et qu'on a une valeur de crête de ce fondamental. Et on va aussi simplifier cette expression en fonction de l'abscisse curviligne y et du pas polaire. Et on va exprimer le tout en fonction de la vitesse du champ tournant. Il nous faut également l'expression de l'induction dans l'entrefer et pas celle du champ magnétique, alors c'est assez facile à obtenir. Ensuite, on exprime le pas polaire en fonction du diamètre D. Et la pulsation de l'alimentation en fonction de la vitesse du champ tournant,  $\Omega_p$ , et du nombre de paires de pôles p. Enfin, l'abscisse curviligne en fonction du diamètre et d'un angle  $\alpha$  afin d'avoir des expressions angulaires uniquement. On va simplifier cette expression-ci.

Notes

Summary



# Expression du champ tournant

$$H = \frac{3}{2} \hat{H} \sin\left(\frac{\pi y}{\tau_p} - \omega t\right)$$

$$B = \omega_0 \#$$

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p}$$

$$\omega = \Omega_p p$$

$$y = \frac{D\alpha}{2}$$

$$\frac{\pi y}{\tau_p} = \frac{\pi D \alpha}{2} \frac{2p}{\pi D} = p\alpha$$

$$B = \hat{B} \sin(p(\alpha - \Omega_p t))$$

$$B_s = \hat{B}_s \sin(p_s(\alpha - \Omega_s t))$$

$$B_r = \hat{B}_r \sin(p_r(\alpha - \gamma - \Omega_r t))$$

On remplace  $y$ , l'abscisse curviligne, par son expression, et  $\tau_p$  également par son expression ici. Ça se simplifie et on obtient que ça, c'est égal à  $p\alpha$ . Et on remplace. Ça, c'est l'expression générale pour le champ d'induction tournant. Puis, on peut l'exprimer pour le stator et pour le rotor. Pour le stator, on aura  $B_s$  en fonction de  $B_s$  crête, en fonction aussi du nombre de paires de pôles  $B_s$  et de la vitesse du champ tournant statorique  $\Omega_s$ . On peut également calculer le champ rotorique. À la différence avec le champ statorique, on remarque qu'on a remplacé tous les indices  $s$  par des  $r$  dans la valeur de crête, dans le nombre de paires de pôles et dans la vitesse. Et on a ajouté un angle qui correspond au décalage ou au déphasage du champ statorique et du champ rotorique à l'instant  $t=0$ .

Notes

Summary



# Calcul de l'énergie magnétique

$$\begin{aligned}
 W_{\text{mag}} &= \int_{\text{entrefer}} \frac{(B_s + B_r)^2}{2\mu_0} dV & dV &= l \delta \frac{D}{2} d\alpha \\
 &= \frac{\delta l D}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \left( \underbrace{B_s^2}_{W_1} + \underbrace{B_r^2}_{W_2} + \underbrace{2B_s B_r}_{W_3} \right) d\alpha \\
 W_1 &= \frac{\delta l D}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} B_s^2 \sin^2(\alpha - \Omega_s t) d\alpha \\
 &= \frac{\delta l D}{4\mu_0} B_s^2 \pi
 \end{aligned}$$



On remplace ça dans notre expression d'énergie magnétique dans l'entrefer de notre moteur. Et ça, c'est le volume de l'entrefer. Avec notre terme différentiel de volume qui va être égal à la longueur de l'entrefer, donc la longueur active du moteur, l'épaisseur en quelque sorte de l'entrefer, le rayon et un angle  $d\alpha$ . Et on a un petit volume différentiel qui va avoir une longueur  $l$ , un angle  $\alpha$ , une épaisseur  $\alpha$  et un rayon  $d/2$ , un rayon moyen  $d/2$ . Et ça nous donne pour l'énergie magnétique... Voilà, on voit qu'on a pu factoriser les termes constants. Et on a effectué le carré et on obtient un terme qui est uniquement lié à l'induction tournante statorique qu'on va appeler  $W_1$ , un terme qui est lié uniquement à l'induction rotorique  $W_2$  et un terme qui est mutuel stator-rotor,  $W_3$ . Je calcule  $W_1$  en remplaçant  $B_s$  par son expression qu'on a déduite de l'expression générale du champ tournant. On se rend compte qu'on a l'intégrale d'un  $\sin^2$  entre 0 et  $2\pi$ , puisqu'on va prendre tout l'entrefer, avec une expression qui est vraiment une sinusoïde au carré  $d\alpha$  sur une période. Et ça, on sait que ça va nous donner une constante. Que quel que soit  $\Omega_s t$  lorsqu'on intègre  $\sin^2(\alpha)/2\pi$ , on a une constante  $\pi$ .

Notes

Summary



# Calcul de l'énergie magnétique

$$\begin{aligned}
 W_{\text{mag}} &= \int_{\text{entrefer}} \frac{(B_s + B_r)^2}{2\mu_0} dV & dV &= l \delta \frac{D}{2} d\alpha \\
 &= \frac{\delta l D}{2\mu_0} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\underbrace{B_s^2}_{W_1} + \underbrace{B_r^2}_{W_2} + \underbrace{2B_s B_r}_{W_3}) d\alpha \\
 W_1 &= \frac{\delta l D}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} B_s^2 \delta \alpha^2 (p_s (\alpha - \Omega_s t)) d\alpha \\
 &= \frac{\delta l D}{4\mu_0} B_s^2 \pi
 \end{aligned}$$



Si on veut calculer un couple avec une dérivée d'énergie magnétique, on va assez vite se rendre compte que ça, ça ne va pas contribuer beaucoup à notre couple. C'est un terme qui ne va pas être très utile pour nous. La seule façon d'avoir ici quelque chose qui varie en fonction de la position du rotor, quelque chose qu'on peut dériver qui va pas nous donner quelque chose de nul, ça serait d'avoir un  $B_s$  qui varie en fonction de la position de notre rotor. C'est le cas si on a un rotor qui a des dissymétries, des dents, et la rotation du rotor va nous créer une variation dans l'induction statorique. Mais ce n'est pas le cas puisque nous, on a décidé de considérer uniquement les structures rotoriques et statoriques lisses, en estimant qu'on pouvait négliger tous les effets des petites ouvertures d'encoques pour faire passer le bobinage.  $W_1$  ne contribue pas au couple.  $W_2$ , ça va être exactement la même chose, sauf que c'est ce coup-là, le champ tournant rotorique qui intervient. Donc, le seul terme de l'énergie qui va contribuer au couple, c'est  $W_3$ .

Notes

Summary



$$W_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \hat{B}_s \cdot \hat{B}_r \int_0^{2\pi} \sin(p_s(\alpha - \Omega_s t)) \cdot \sin(p_r(\alpha - \Omega_r t - \delta)) d\alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$W_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{B}_s \hat{B}_r \left[ \int_0^{2\pi} \cos[(p_s - p_r)\alpha - (p_s \Omega_s - p_r \Omega_r)t + p_r \delta] d\alpha - \int_0^{2\pi} \cos[(p_s + p_r)\alpha - (p_s \Omega_s + p_r \Omega_r)t - p_r \delta] d\alpha \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(ax+b) \cdot dx = 0 \text{ si } a \neq 0$$

On va calculer notre expression de l'énergie magnétique, notre composante mutuelle de l'énergie magnétique  $W_3$  en fonction de ces deux composantes du champ tournant, puisqu'elle est mutuelle,  $B_r$  et  $B_s$ . On a les deux expressions de notre champ tournant statorique, et champ tournant rotorique, avec son nombre de paires de pôles, sa vitesse, nombre de paires de pôles rotoriques, vitesse rotorique et l'angle de différence entre les deux champs tournants au moment où on a  $t=0$ . Pour pouvoir résoudre cette intégrale, le mieux, c'est d'utiliser une bonne vieille relation trigonométrique. Là, je peux remplacer justement cette expression dans ma petite relation trigonométrique. Et j'obtiens une première intégrale qui correspond à ce terme-ci. Puis je vais en avoir une deuxième. Voilà. Or, on sait que l'intégrale entre 0 et  $2\pi$  de  $\cos(ax+b)dx$ , c'est égal à 0 si on a,  $a$  différent de 0. En fait, cette expression-ci a aucune chance d'être non nulle, puisque  $p$ , le nombre de paires de pôles statoriques, et le nombre de paires de pôles rotoriques sont tous les deux positifs. La seule manière d'avoir qu'une expression de l'énergie magnétique dans l'entrefer liée aux deux flux mutuels qui sont non nulle, c'est d'avoir ce terme-ci qui soit nul.

Notes

Summary



$$W_3 = \frac{\delta I D}{4 \mu_0} \cdot 2 \hat{B}_s \cdot \hat{B}_r \int_0^{2\pi} \sin(p_s (\alpha - \Omega_s t)) \cdot \sin(p_r (\alpha - \Omega_r t - \delta)) d\alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$W_3 = \frac{\delta I D}{4 \mu_0} \hat{B}_s \hat{B}_r \left[ \int_0^{2\pi} \cos[(p_s - p_r)\alpha - (p_s \Omega_s - p_r \Omega_r)t + p_r \delta] d\alpha - \int_0^{2\pi} \cos[(p_s + p_r)\alpha - (p_s \Omega_s + p_r \Omega_r)t - p_r \delta] d\alpha \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(a\alpha + b) d\alpha = 0 \text{ si } a \neq 0$$

$$p_s = p_r = p \text{ Si } p_s \neq p_r \Rightarrow W_3 = 0$$

$$W_3 = \frac{\delta I D}{2 \mu_0} \frac{\hat{B}_s \hat{B}_r}{2} \cdot 2\pi \cdot \cos(-p(\Omega_s - \Omega_r)t + p\delta)$$

Donc,  $p_s$  doit être égal à  $p_r$ . On doit avoir le même nombre de paires de pôles au stator qu'au rotor. Autrement, si  $p_r$  est différent de  $p_s$ , alors notre énergie magnétique est nulle. L'expression de l'énergie magnétique dans l'entrefer, qui est créée par l'interaction des champs tournants statoriques et rotoriques, le terme mutuel, il peut être écrit ou simplifié assez facilement. On va plus écrire  $p_s$  ou  $p_r$ . On va dire que  $p_s$  égal  $p_r$  égal  $p$ . Et l'intégrale est triviale puisqu'on n'a plus de termes en  $\alpha$ . Bon, maintenant, il va falloir calculer le couple électromagnétique. Et pour ça, on va devoir faire une dérivée.

Notes

Summary



$$W_3 = \frac{\mu_0}{2} \frac{\hat{B}_s \hat{B}_r}{2} \cos \left( -p \frac{(\Omega_s - \Omega_r)t + \gamma}{\xi} \right)$$

$$\xi = -(\Omega_s - \Omega_r)t + \gamma$$

$$W_3 \propto \cos(p\xi)$$

$$M_{em} = \frac{dW_{mag}}{d\xi} = - \frac{\mu_0 \hat{B}_s \hat{B}_r}{2} p \sin \left[ -(\Omega_r - \Omega_s)t + \gamma \right] p$$

Je vais réécrire cette expression de  $W_3$  de notre énergie magnétique dans l'entrefer, la partie, en tout cas, qui nous intéresse. J'ai réécrit l'expression de l'énergie magnétique dans l'entrefer, la partie mutuelle. Et ce qu'on va faire maintenant, c'est de regarder comment est-ce qu'on peut la dériver. Pour ça, on va se rendre compte que le degré de liberté qui nous intéresse ici, c'est l'angle entre le champ tournant statorique et le champ tournant rotorique. Cet angle, il est égal à cette partie-ci. La composante... La somme de la partie liée au temps de l'angle et du décalage initial. Ça, on va l'appeler  $\xi$ .  $\xi$ , il a une composante liée au temps et un décalage initial entre les deux champs tournants. En fait, notre  $W_3$  est proportionnelle à  $\cos(p\xi)$ . Et je vais dériver l'énergie magnétique ou la coénergie magnétique pour être précis. Comme les deux sont égales, ça ne fait pas de différence dans notre affaire pour obtenir le couple électromagnétique qui se crée entre ces deux champs tournants. Je remplace direct  $\xi$  par son expression e le tout fois  $p$ . C'est là que ça devient intéressant parce qu'en fait, ça veut dire que notre couple électromagnétique, c'est une fonction sinusoïdale.

Notes

Summary



$$W_3 = \frac{\delta D}{2\nu_0} \frac{\hat{B}_s \hat{B}_r}{2} 2\pi \cos \left( -p \frac{(\Omega_s - \Omega_r)t + \gamma}{\xi} \right)$$

$$\xi = -(\Omega_s - \Omega_r)t + \gamma$$

$$W_3 \sim \cos(p\xi)$$

$$M_{em} = \frac{dW_{mag}}{d\xi} = - \frac{\delta D \pi}{2\nu_0} \hat{B}_s \hat{B}_r \cdot p \sin \left[ -(\Omega_r - \Omega_r)t + \gamma \right] p$$

$$\Omega_s = \Omega_r \quad \text{sinon} \quad \overline{M_{em}} = 0$$

$$\Rightarrow M_{em} = - \frac{\pi D \delta}{2\nu_0} \hat{B}_s \hat{B}_r \cdot p \cdot \sin(p\gamma)$$

Et cette fonction sinusoïdale dépend du temps et de la différence de vitesse, et du décalage entre les deux champs tournants, du décalage initial entre les deux champs tournants. Et on se rend compte assez vite que si ce terme-ci n'est pas nul, la valeur moyenne de notre couple électromagnétique, comme c'est un sinus, va, elle, être nulle. Pour que la valeur moyenne du couple électromagnétique ne soit pas nulle, il nous faut que  $\Omega_s = \Omega_r$ . Sinon, notre couple électromagnétique est égal à zéro. Donc, la valeur de notre couple électromagnétique, la valeur moyenne sur une période, c'est une fonction sinusoïdale. Puisque là, l'angle  $\gamma$ , c'est non seulement l'angle initial entre les deux champs tournants, mais comme la vitesse des deux champs tournants est la même, c'est l'angle permanent entre les deux champs tournants. On a un maximum lorsque cet angle-ci, donc le produit des paires de pôles et du décalage mécanique, est égal à 90 degrés. On voit aussi que lorsque les deux champs tournants sont alignés, on a un couple nul.

Notes

Summary





- Le couple électromagnétique est créé à partir de deux champs tournants:
  - de même polarité
  - de même vitesse
- => Couple moyen non nul
- Proportionnel à  $\sin(\gamma)$

Voilà, nous avons vu aujourd'hui qu'il était possible de créer un couple électromagnétique lorsqu'on a deux champs tournants qui ont le même nombre de pôles et qui tournent à la même vitesse. Ce couple est proportionnel au sinus de l'angle électrique entre les champs tournants et il est nul lorsque les champs sont alignés et maximal lorsqu'ils sont en quadrature. Ces calculs nous donnent des conditions très générales sur la formation du couple, mais ça ne nous dit pas encore comment faire pratiquement pour les remplir. C'est ce que nous verrons ensemble lors du prochain cours.

Notes

Summary



21m 50s